基于流形样条曲面的四边形网格几何优化

陈富卫[1]　罗钟铉[1]　雷娜[1,*]

[1]大连理工大学，大连 116620

一、输入映射与流形样条构造

四边形网格广泛用于几何建模与数值仿真，其精度与质量影响后续计算。针对非平面、角度畸变及局部翻转问题，本文以原始三角网格 T 为参考，以 $Q=(V,F)$ 初始化控制网格，保持拓扑与顶点—面关联不变，仅优化顶点位置。

最近点投影与局部参数映射

对每个三角网格顶点 $\boldsymbol{x}$，在 Q 的近邻顶点一环中建立候选四边形面。沿对角线将候选面划分为三角形，计算最近点及重心坐标，再将其转换为四边形局部参数 (u,v)。选取距离最小的面 f，形成拟合样本 $(f,u,v,\boldsymbol{x})$。

边界、特征与未覆盖区域补充

除原始三角网格顶点外，采样边界边与二面角大于 $60°$ 的特征边中点，增强尖锐区域约束。对未被覆盖的四边形面，将参数中心 $(0.5,0.5)$ 投影到 T 生成回退样本，避免局部拟合缺少数据支撑。

局部图册、极形式与双五次曲面

每个四边形图表对应一个双五次曲面片。极形式 $\boldsymbol{f}$ 对两组参数分别对称且多维仿射，使控制点与局部网格点之间的关系可写为显式仿射组合。局部曲面的 Bernstein 表达为

$$\boldsymbol{F}(u,v)=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}B_i^5(u)B_j^5(v)\boldsymbol{A}_{ij}$$

$$\boldsymbol{F}(u,v)=\boldsymbol{f}(u,u,u,u,u;v,v,v,v,v)$$

B 为五次 Bernstein 基函数，$\boldsymbol{A}$ 为曲面控制点，由极形式在对应的 $0/1$ 参数组合处取值得到。

二、连续性约束与顶点回写

公共边与跨片 G^1 连续性

先同步公共边控制数据，再约束两侧跨边导数 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$ 与边界切向量 $\boldsymbol{E}'$ 的关系，使相邻曲面片共享切平面：

$$\boldsymbol{D}_1(v)+\boldsymbol{D}_2(v)=\beta(v)\boldsymbol{E}'(v)$$

$$\beta(v)=(1-v)\beta_0+v\beta_1$$

比较 Bernstein 系数，将导数条件装配为控制点线性约束。双五次曲面为公共边两端的扭矢约束提供独立内部自由度，避免双三次曲面在奇异点间产生过约束。

带连续性约束的全局拟合

$$\min_{\boldsymbol{P}}\left[E_1(\boldsymbol{P})+\lambda E_2(\boldsymbol{P})\right]$$

$$E_1(\boldsymbol{P})=\sum_s\|\boldsymbol{F}_s(u_s,v_s)-\boldsymbol{x}_s\|^2$$

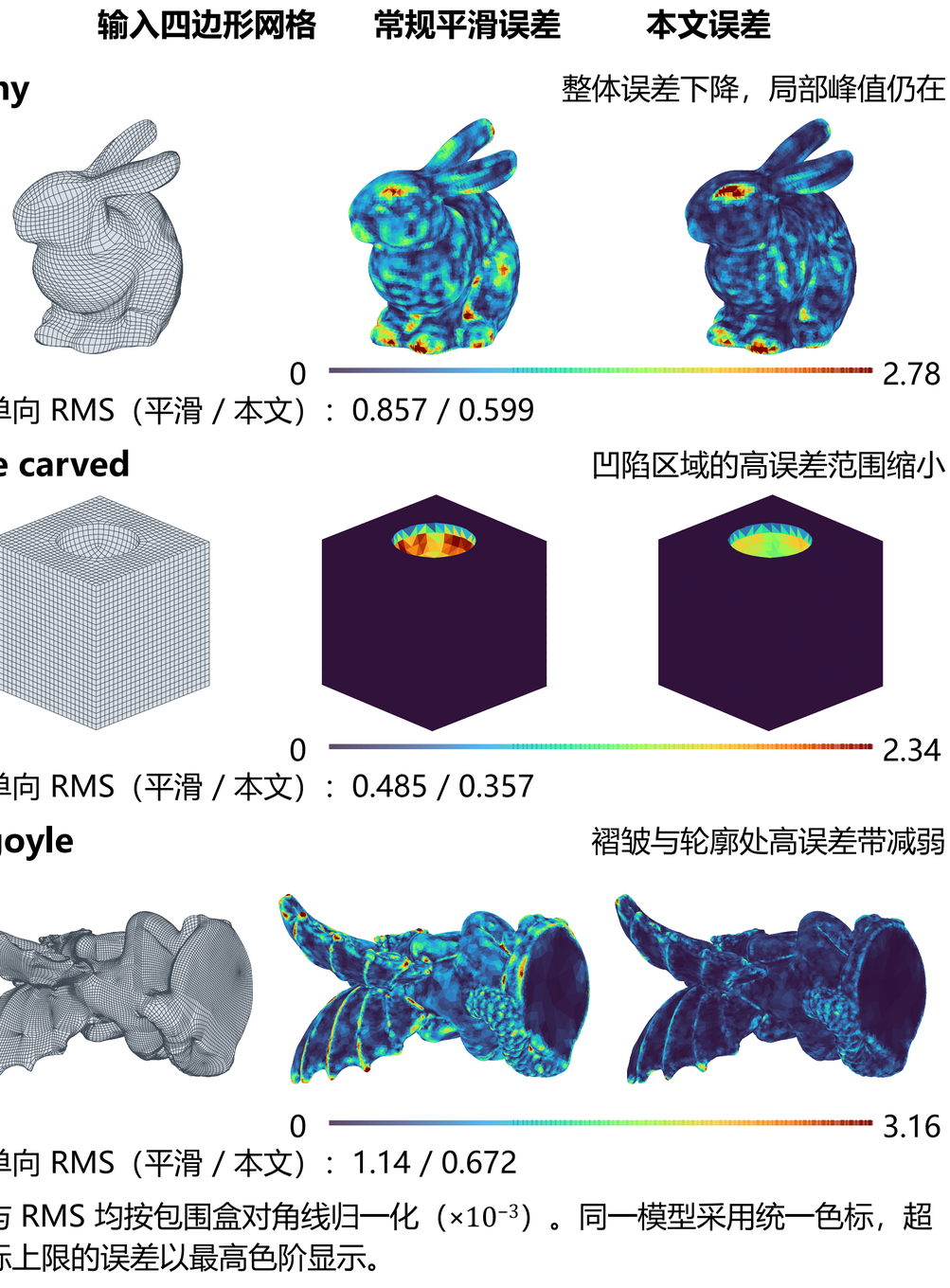
$$E_2(\boldsymbol{P})=\iint\left(\|\boldsymbol{F}_{uu}\|^2+2\|\boldsymbol{F}_{uv}\|^2+\|\boldsymbol{F}_{vv}\|^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$\boldsymbol{P}$ 为待求控制点，E_1 为样本拟合项，E_2 为薄板项。下标 uu、uv、vv 表示二阶偏导，$\boldsymbol{F}_s$ 为样本所在曲面片。取 $\lambda=0.05$，拟合阈值 10^{-5}。

共享参数角点求值与顶点回写

依据半边方向匹配网格顶点与相邻曲面的参数角点，u、v 均取 0 或 1。逐片求值并汇总同一顶点的候选位置，统一写回 V'。输出 $Q'=(V',F)$，使用曲面上的真实点，而非求解得到的控制点坐标。

三、几何误差可视化



顶点单向 RMS（平滑 / 本文）：0.857 / 0.599

顶点单向 RMS（平滑 / 本文）：0.485 / 0.357

顶点单向 RMS（平滑 / 本文）：1.14 / 0.672

误差与 RMS 均按包围盒对角线归一化（$\times10^{-3}$）。同一模型采用统一色标，超出色标上限的误差以最高色阶显示。

四、定量评价与结论

29.55%

模型平均 RMS 改善率

27.65%

负 Jacobian 单元减少

双向采样 RMS（$\times10^{-4}$）与负 Jacobian 单元数

模型	平滑	本文	改善/%	负 J 初/本
Bunny	6.87	4.79	**+30.4**	17 / 12
Cube carved	2.16	1.32	**+38.8**	0 / 0
Gargoyle	8.03	4.41	**+45.2**	273 / 191
Knot	12.8	13.2	−3.6	137 / 108
Spoon	0.396	0.163	**+58.8**	7 / 3
D. torus	5.79	5.34	**+7.7**	0 / 0

RMS 相对常规平滑比较，多数测试结果改善。负 J 相对输入网格比较，总数由 434 降至 314。缩放 Jacobian 保持或提高，边长变异未增大。

流形样条为任意拓扑四边形网格提供了连续几何载体。通过显式参数对应与共享角点回写，在保持原拓扑的同时实现离散网格与连续曲面的几何相容，为曲面重建及后续高阶几何处理提供一致的输入。

平均误差降低并不保证局部最大误差与平面性同步改善。后续需结合自适应采样、特征约束与可行域修正，兼顾几何精度与单元有效性。

论文编号 P000052