面向复杂曲面的黎曼度量驱动网格生成方法

熊永平[1]　谢冬香[1]　慕茹霜[1]　刘 杨[1]

[1] 中国空气动力研究与发展中心 计算空气动力研究所，四川绵阳 621000

一、研究背景与挑战

网格生成是数值仿真的基础支撑，高质量表面网格须同时满足单元形状质量、尺寸自适应与梯度控制三项要求。

工程痛点　复杂 CAD 模型的表面网格普遍存在细长三角形、尺寸过渡不均等缺陷，催生网格重划分（Remesh）技术。

挑战一　参数化畸变与度量重建

调和映射保角但面积畸变大；最小二乘映射控制面积但特征区可能自交；参数域距离不再等于曲面真实弧长。

挑战二　多源尺寸约束冲突

曲率加密、预设点线、背景场等约束来源不同、作用重叠，融合须在张量空间进行而非简单数值比较。

挑战三　Delaunay 与 AFT 互有优劣

Delaunay 全局拓扑最优但缺节点位置控制力；AFT 局部精细但全局冲突检测是性能瓶颈。

二、方法框架

① 曲率估计与边界离散
Rusinkiewicz 张量法 · 曲率自适应采样

↓

② 参数化与黎曼度量
调和 / 最小二乘映射 · $G = J^T J$

↓

③ 初始 Delaunay 与边界恢复
超级三角形插点 · 空圆准则换边 · 删外部单元

↓

④ DAFT 耦合推进
短边优先 · $min(d, q)$ 竞争准则

↓

⑤ Laplace 光顺与质量检验
顶点移向 1-邻域平均位置

三、离散曲率估计与参数化映射

曲率估计（Rusinkiewicz 张量法）　对顶点 1-邻域面片法向直接微分构建曲率张量，免参数化拟合、对噪声鲁棒：

$k_1 = H + \sqrt{(H^2 - K)}$，　$k_2 = H - \sqrt{(H^2 - K)}$

$S = \sum(\beta(e)/\|e\|) \cdot (e \otimes e)$，　$e \in N(v)$

$\beta(e)$ 为边 e 两侧面片的法向夹角，张量 S 的特征分解得主曲率 k_1、k_2。

参数化映射　$f: R^3 \to R^2$，两种映射各取一项几何性质：

调和：$E(u) = 0.5 \int \|\nabla u(x)\|^2 dx$（Dirichlet 能量极小，保角）

最小二乘：$min \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$（观测残差极小）

四、黎曼度量构建

以第一基本形式（Jacobi 矩阵）构造度量张量，使参数域度量与物理弧长一致，补偿参数化畸变：

$$G = J^T J, \quad J = [\partial X/\partial u, \partial X/\partial v]$$

度量长度 $|v|_G = \sqrt{v^T G v}$：Delaunay 空圆、推进距离与“等边”判据一律按度量长度度量。

边界离散：端点尺寸按关联边计算，配合曲率尺寸自适应采样，构造高质量初始边界。

要点　度量张量统一“畸变补偿”与“尺寸度量”，参数化畸变与网格尺寸并入同一张量。

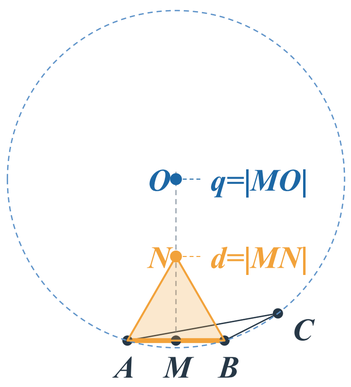
判据统一　Delaunay、AFT 与尺寸融合在同一度量中，量纲一致，避免标准冲突。

方法协同　全局拓扑与局部控点在同一度量下得以兼顾，不再顾此失彼。

边界同源　边界离散与内部尺寸场一致，网格尺寸过渡平滑、全局渐变。

五、Delaunay-AFT 耦合推进（DAFT）

短边优先推进：前沿按边长升序排列，候选点沿前沿边法向生成，推进距离由尺寸场控制；空圆准则边交换保证 Delaunay 拓扑。



DAFT 迭代内核

沿前沿边法向插点　L = min(d,q)

↓

Delaunay 空圆检验，违例换边

↓

边长控制　l > 1.4h 分裂 / l < 0.7h 塌缩

↓

更新融合尺寸场

↑

迭代至收敛

新点N沿前沿边法向按L=min(d,q)插入；d为等边三角形高，q为外心到边中点度量距离

右：DAFT迭代内核，空圆准则与1.4h/0.7h阈值交替，直至质量收敛。

六、尺寸场融合

边界尺寸初始化　$l_A = 0.5(l_{AB} + l_{AC})$

内部点重心插值　$l_p = \lambda_A l_A + \lambda_B l_B + \lambda_C l_C$

背景尺寸融合　$Sz_B = max(min(Sz_{tar}, Sz_{cur}), Sz_{min})$

增长率闭环　$l_p \leftarrow l_p \cdot gr \ (if \ l_p < Sz_B)$; $l_p \leftarrow l_p \ / \ gr$ (else)

五层递进尺寸场融合（优先级自左向右递增）

全局默认尺寸 → 全局最小尺寸 → 预设点线尺寸 → 曲率尺寸 → 背景场尺寸

七、数值验证

在 NNW-GridStar 引擎中实现，经 F6 与 Jet 工业模型验证：

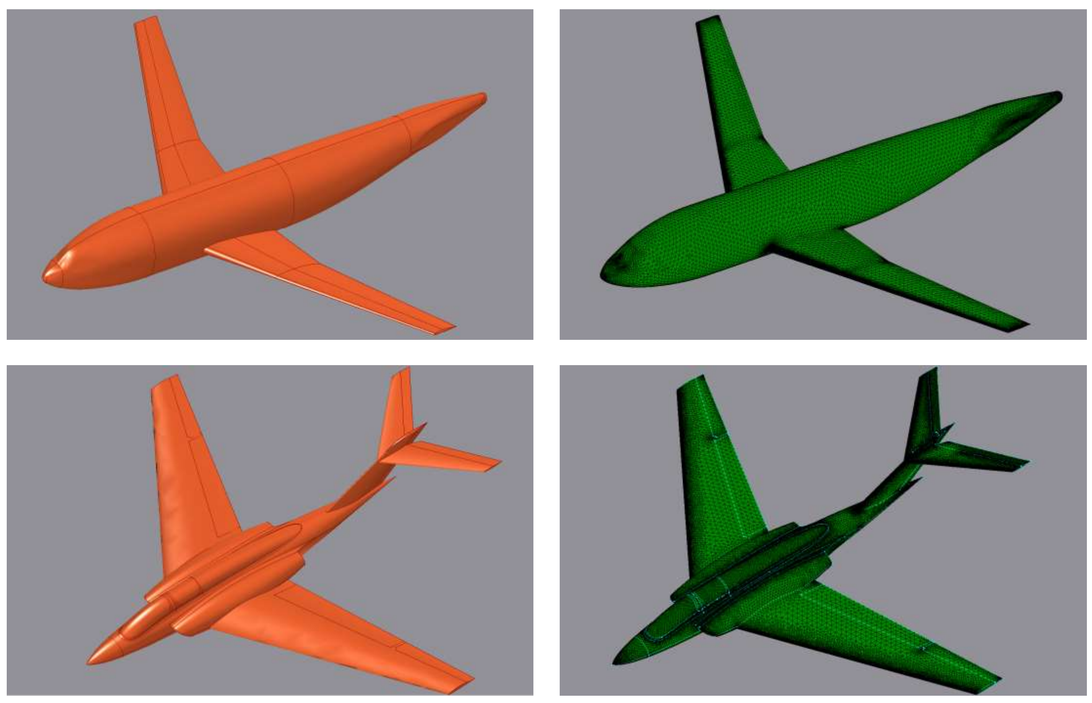


图 1　F6（上）与 Jet（下）模型：左为数模，右为生成网格

八、结论

本文核心贡献体现在四个方面：1)提出面向复杂曲面的黎曼度量驱动三角网格生成框架；2)基于第一基本形式构建黎曼度量，补偿参数化畸变；3)建立五层尺寸场递进融合机制；4)提出$min(d, q)$竞争准则，统一AFT局部尺寸控制与Delaunay全局拓扑保障。