基于黎曼几何的灵活保路径曲边P2网格生成框架

张蕊丽　章盛祺

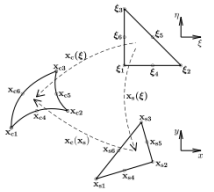
宁波数字孪生（东方理工）研究院，宁波东方理工，宁波 315000

一、研究背景与问题

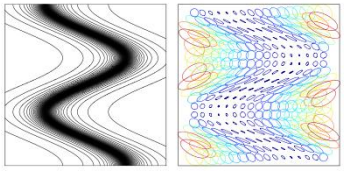
高阶数值模拟（CFD、有限元）需要高精度曲边网格，以准确匹配复杂几何与各向异性物理特征。

之前曲边网格生成存在不足：内部点方向数固定；三角剖分未保持顶点生成路径；曲边化仅关注有效性，可能产生过长曲边。

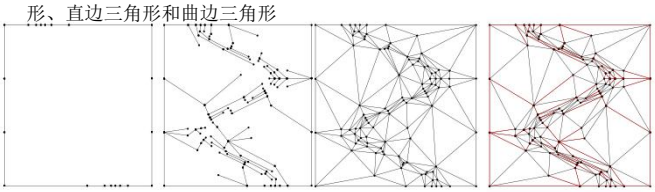
目标：构建灵活、路径保持的曲边 P2 网格生成框架，提升各向异性/曲边特征捕捉能力，降低插值误差并改善误差均匀性。



局部坐标下的二阶参考单位三角形、直边三角形和曲边三角形



解析函数对应的度量等值线和特征圆



左：边界点和边界连接关系
右：边界点、内部点及其连接关系

左：由 Delaunay 三角剖分生成的直边网格
右：由约束 Delaunay 三角剖分生成并保留连接关系（红色）的直边网格

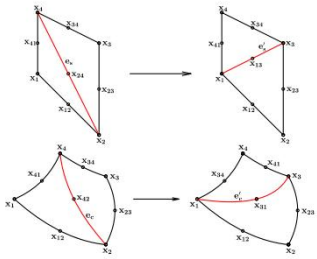
核心贡献：灵活内部点生成（方向数 3~8 自适应）与路径保持约束 Delaunay 三角剖分；结合有效性感知曲边化与高效边交换。主要基准误差降低约 20%，特定情况超过 75%。

二、方法框架

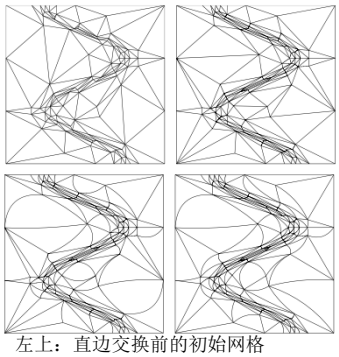
整体流程：边界点采样 → 内部点生成 → 约束 Delaunay 三角剖分 → 直边曲边化 → 边交换。

1. 边界点均匀分布：沿边界按黎曼度量长度等分，保证采样均匀。
2. 灵活内部点生成：方向数 Np 可在 3~8 之间自适应选择，通过比较候选三角剖分质量确定最优方向数。
3. 路径保持约束 Delaunay：将顶点生成路径作为约束边保留，使网格对齐度量场，避免传统 Delaunay 破坏各向异性结构。
4. 直边曲边化：基于测地抛物线最小化长度，并施加有效性约束（Jacobian 正定条件）；采用黄金分割搜索寻找最短有效曲边。
5. 曲边交换：存储四顶点组合避免重复计算，仅在提升网格质量且保持有效时执行交换。

理论基础：插值误差估计、黎曼度量、测地线 ODE、抛物线边参数化。



直边交换（上）与曲边交换（下）示意图



左上：直边交换前的初始网格
右上：直边交换后的自适应网
左下：直边网格弯曲后的自适应网格
右下：曲边交换后的自适应网格

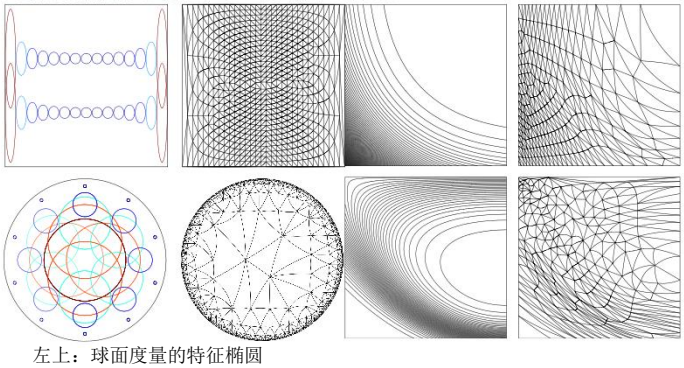
三、关键结果

球面度量与庞加莱圆盘模型：网格特征椭圆与度量场一致。

解析函数：网格自适应对齐等值线与梯度方向。

CFD 温度场：网格跟随大尺度涡结构，呈结构化分布。

在解析度量（球面度量、庞加莱圆盘模型）、解析函数及 CFD 温度场中，新方法生成的网格均能良好对齐各向异性/曲边特征。主要基准插值误差降低约 20%，特定工况降低超过 75%。逐单元插值误差更均匀，极端值显著减少。

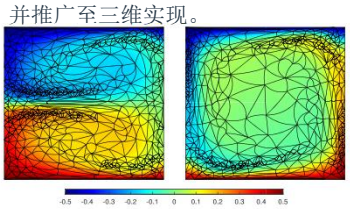


左上：球面度量的特征椭圆
右上：自适应曲边网格
左下：庞加莱圆盘模型的特征椭圆
右下：自适应曲边网格

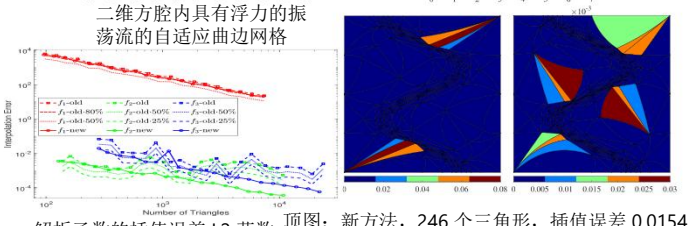
左：解析函数的等值线
右：自适应曲边网格

四、 结论与展望

提出了灵活且路径保持的曲边 P2 网格生成框架：灵活方向采样、路径保持约束 Delaunay、有效性感知曲边化与高效边交换。新框架在多数情况下误差降低约 20%，特定情况超过 75%，误差分布更均匀。接下来的工作是，扩展到三角形/四边形混合网格，并推广至三维实现。



二维方腔内具有浮力的振荡流的自适应曲边网格



解析函数的插值误差 L2 范数

顶图：新方法，246 个三角形，插值误差 0.0154
左下：旧方法，248 个三角形，插值误差 0.173
右下：旧方法，318 个三角形，插值误差 0.0652

致谢：
国家自然科学基金（12501510, 12302284）；宁波市科技局（2024A-185-G, 2024J194, 2023Z227, 2023-DST-001）；宁波市教育局（2024A-149-G）。