基于聚合AMG的三维笛卡尔网格欧拉方程求解

李滢艳[1,2]　陈浩[1]　陈波[1]

[1]中国空气动力研究与发展中心　　[2]邮箱：318621870@qq.com

一、背景

三维欧拉方程的精确求解在计算流体力学中具有核心地位，广泛应用于飞行器气动外形设计与推进系统内部流动分析。然而，随着计算规模的急剧增长，传统隐式迭代方法在收敛速率与计算效率方面日益显现出瓶颈。特别是在三维复杂构型流动模拟中，离散所得的大型稀疏代数方程组常面临条件数恶化、内存占用激增等问题，导致常规迭代策略收敛迟缓甚至数值发散，严重制约了高精度气动仿真的高效开展。代数多重网格（AMG）方法凭借其不依赖网格几何拓扑、仅通过矩阵系数构建粗化策略的特性，在椭圆及抛物型偏微分方程求解中展现出卓越的大规模计算能力。然而，针对具有强非对称性与对流主导特征的双曲型欧拉方程，传统AMG在粗网格修正阶段易因波传播方向的局部特征丢失而导致迭代不稳定。为突破这一数值瓶颈，本文提出一种基于非对角块Roe平均态近似的隐式代数多重网格求解方法。该方法通过重构离散矩阵的谱结构，有效弱化对流项引起的病态特征，显著降低隐式求解过程中的等效CFL数阈值，从而大幅提升时间推进的数值稳定性与收敛效率。

二、数值方法

无粘可压缩流动方程：

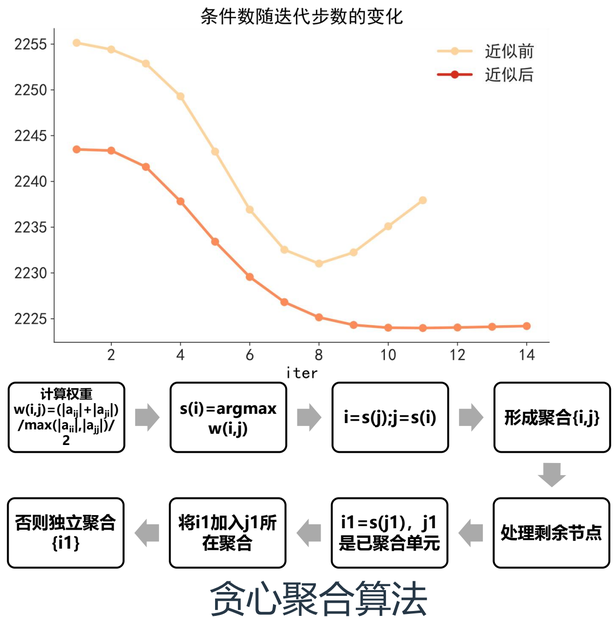
$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\Omega}\boldsymbol{Q}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

空间上用有限体积进行离散，时间上采用向后欧拉格式：

$$\left(\frac{V_i}{\Delta t_i}\boldsymbol{I}+\sum_{j\in N(i)}\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{F}}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\right)}{\partial\boldsymbol{Q}_i}S_{ij}\right)\Delta\boldsymbol{Q}_i^n+\sum_{j\in N(i)}\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{F}}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\right)}{\partial\boldsymbol{Q}_j}S_{ij}\Delta\boldsymbol{Q}_j^n=\mathrm{Res}_i^n$$

非对角块近似：

$$\sum_{j\in N(i)}\frac{\partial\left(\tilde{\boldsymbol{F}}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\right)}{\partial\boldsymbol{Q}_j}S_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{j\in N(i)}\left(\frac{\partial\left(F(\boldsymbol{Q}_j)\cdot\boldsymbol{n}\right)}{\partial\boldsymbol{Q}_j}-\left|\boldsymbol{A}_{\mathrm{roe}}\right|\right)S_{ij}\approx\frac{1}{2}\sum_{j\in N(i)}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{roe}}-\left|\boldsymbol{A}_{\mathrm{roe}}\right|\right)S_{ij}$$



AMG算法流程

启动阶段

1、网格粗化

2、构造插值算子 I_H^h 、限制算子 I_h^H 和粗网格算子 A_H：

$I_h^H=\left(I_H^h\right)^T$， $A_H=I_h^H A_h I_H^h$（H 表示粗网格层，h 表示细网格层）

求解阶段

输入系数矩阵 A_h，右端项 $\boldsymbol{r}^h$，初始近似 z_0^h，光滑次数 v_1 和 v_2

V 循环 $z^h=MG(A_h,z_0^h,\boldsymbol{r}^h,v_1,v_2)$

1、前光滑：$z^h=\mathrm{smooth}^{v_1}(A_h,z_0^h,\boldsymbol{r}^h)$

2、计算残差：$\tilde{\boldsymbol{r}}^h=\boldsymbol{r}^h-A_h z^h$；

3、粗化：$\boldsymbol{r}^H=I_h^H\tilde{\boldsymbol{r}}^h$

if $H==h_0$ then

| 精确求解：$A_H\delta^H=\boldsymbol{r}^H$

else

| 递归：$\delta^H=MG(A_H,0,\boldsymbol{r}^H,v_1,v_2)$

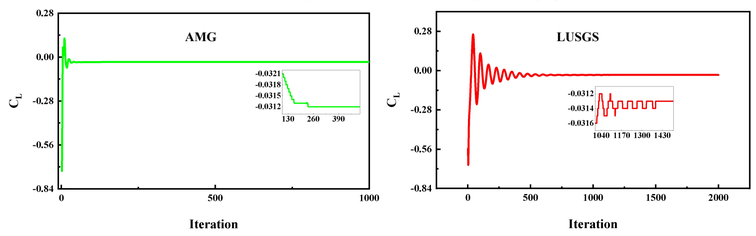
4、校正：$z^h=z^h+I_H^h\delta^H$

5、后光滑：$z^h=\mathrm{smooth}^{v_2}(A_h,z^h,\boldsymbol{r}^h)$

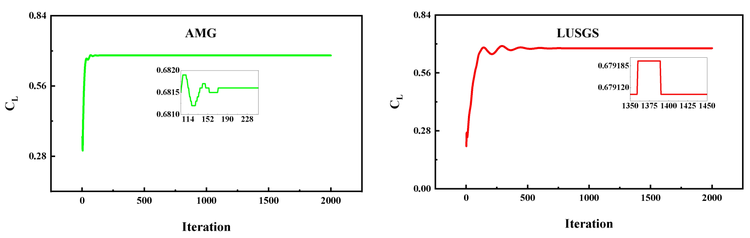
三、结果

		收敛时间/s	收敛步数
CHN-F1	AMG	648.73	233
	LUSGS	2007.50	1387
CT-1	AMG	558.14	214
	LUSGS	2114.74	1437
DLR-F6-WB	AMG	389.02	172
	LUSGS	1613.28	1390

- CHN-F1，Ma=0.2，计算效率提升至3.09倍
- CT-1，Ma=0.5，计算效率提升至3.78倍
- DLR-F6-WB，Ma=0.75，计算效率提升至4.14倍
- AMG和LUSGS计算收敛后的升力系数相当



CT-1



DLR-F6-WB

四、总结

为提高三维欧拉方程的隐式求解效率，本文提出一种基于非对角块Roe平均态近似的隐式代数多重网格求解方法。该方法通过重构离散矩阵的谱分布特征，有效改善强对流项引发的系统病态问题，显著降低线性方程组的条件数。得益于矩阵条件的优化，该方法大幅拓展了隐式时间推进的稳定适用区间，允许采用更大的有效CFL数，从而显著提升整体时间步进的数值稳定性与迭代收敛效率。

未来的研究工作将重点围绕以下两个方面展开：

其一，开发支持大规模笛卡尔网格的并行计算版本，以突破复杂构型下的大规模求解瓶颈；

其二，进一步优化代数多重网格的跨尺度修正与平滑机制，旨在提高算法可采用的有效CFL数，从而扩大隐式时间推进的稳定运行区间。