中国空气动力学会

CHINESE AERODYNAMICS RESEARCH SOCIETY

MEGAS **2026**

全国网格生成及应用研讨会

MEsh Generation and Applications Symposium (MEGAS 2026)

论文集

PROCEEDINGS

2026 年 11 月 5 日—7 日

中国 • 厦门



中国空气动力学会

2026 全国网格生成及应用研讨会

MEsh Generation and Applications Symposium (MEGAS 2026)

论文集

PROCEEDINGS

主办单位 中国空气动力学会

承办单位 厦门大学

中国空气动力学会计算空气动力学专业委员会

中国工业与应用数学学会几何设计与计算专业委员会

协办单位 浙东南人工智能与大数据研究院

厦门市计算机学会

2026 年 11 月 5 日—7 日　中国・厦门

https://graphics.xmu.edu.cn/MEGAS2026/

大会主页

目录

第一部分　论文 **1**

基于壁面距离的层推进弹簧法高效动网格技术（P000003） 2
动边界/流场全自动自适应笛卡网格方法（P000004） 5
基于四边形网格的等角网与计算设计（P000005） 34
基于改进栅格法和 Delaunay 的全四边形与六面体占优鲁棒网格划分引擎研发（P000007） 38
基于图神经网络的边界层推进方向预测方法（P000009） 42
一种笛卡尔网格流场自适应过程的高效滤波优化方法（P000010） 46
基于特征图的 B-Rep 模型简化技术研究（P000011） 54
A wavelet-attention physics-informed Fourier residual network for structured mesh generation（P000014） 58
融合局部邻域特征与全局注意力的自适应网格生成方法（P000015） 63
基于切割单元的并行笛卡尔网格生成方法（P000016） 67
面向全六面体网格生成的拓扑感知强化学习 CAD 分解（P000019） 71
面向复杂曲面的多约束尺寸自适应四边形占优网格生成方法（P000020） 74
基于多约束尺寸场的曲率自适应各向同性重网格化（P000022） 79
基于深度强化学习和最优共形映射的多块结构网格自动生成框架（P000024） 83
虚几何技术在脏几何修复中的工程化实践与挑战（P000025） 87
基于共形映射压缩梯度场的四边形占优网格生成方法（P000026） 92
自适应笛卡尔网格生成的 GPU 并行方法（P000027） 96
基于 SCNN 结合拓扑保持的网格压缩方法（P000028） 99
面向工业应用的 NURBS 曲面保型三角化方法（P000031） 103
PACE：基于误差等分布的物理感知网格简化（P000032） 106
基于标架场引导与单调拓扑修正的特征保持孔洞修复方法（P000033） 109
面向网格生成前处理的飞机 B-Rep 模型部件语义分割（P000034） 113
Robust Constrained Tetrahedralization with Steiner-point-free Boundaries（P000036） 116
动态虚拟单元方法求解薄壁几何（P000037） 119
自适应网格加密与粗化准则参数对临界雷诺数钝体尾流大涡模拟预测的影响（P000038） 123
笛卡尔网格并行生成加速与高雷诺数湍流模拟研究（P000039） 126
蝗虫翅翼几何重构、参数化与网格生成的一体化框架（P000045） 131
基于 IDW 算法网格自动生成与深度学习模型的离心压气机性能优化设计（P000046） 135
基于参数化搜索的自适应网格并行生成负载均衡算法（P000047） 140
Generative AI-Driven Polycube Modeling for Hexahedral Mesh Generation and Volumetric Spline Construction（P000048） 157
Angle-Based Metric Adaptation for Quadrangulation（P000049） 161
流向压力梯度作用下基于符号回归的壁面函数建模研究（P000050） 164
特征保持的流形样条曲面生成（P000051） 167
任务需求驱动的网格价值场神经算子方法（P000053） 184

基于 ODE 壁面模型的笛卡尔网格湍流 RANS 模拟方法研究（P000055） 189
壁面距场驱动的多块结构网格自动生成方法（P000056） 192
面向船舶 CFD 分析的自适应非结构边界层网格生成方法（P000057） 194
面向结构 CAE 分析的船舶结构 CAD 理想化模型自动处理方法（P000058） 200
人工数据方法用于（无网格）神经算子学习（P000060） 207
三角翼标模升力平台特性的多面体网格收敛性研究（P000063） 210
网格生成策略对飞行器尾迹涡模拟的影响研究（P000064） 213
基于交叉场引导与分层筛选的网格弱特征提取算法（P000067） 215
一种用于舵面偏转和变形的动网格技术（P000068） 228
点胞关系驱动的 Voronoi 图快速计算方法（P000071） 231
Curve resampling based high-quality high-order unstructured quadrilateral mesh generation（P000072） 235
NeurFrame: Learning Continuous Frame Fields for Structured Mesh Generation（P000073） 239
面向无黏与黏性流动的笛卡尔切割单元虚拟合并方法（P000074） 243
基于 SO(3) 表示的网格特征对齐 N 方向场设计（P000075） 247
基于静电场的点云法线定向方法（P000076） 250
基于样条表示的极小曲面近似计算（P000077） 253
面向变构飞行器的动态笛卡尔网格方法及应用（P000079） 257
复杂外形的多策略六面体占优网格自动生成方法（P000080） 261
基于 NNW-GridStar 的非结构网格智能生成方法（P000081） 266
适用于翼型风帆模拟的动态笛卡尔网格方法（P000083） 269
Hybrid Subdivision Volume Representation for Shape Optimization（P000084） 272
基于概率分布重塑的高光表面三维高斯几何重建（P000085） 276
Surface Quadrilateral Mesh Generation Based on Weierstrass $\wp$ Function（P000088） 280
基于亚纯四次微分的无缝参数化与闭式锥奇异点优化（P000089） 282
HiQu3DGen：一致性多视图引导的高质量 3D 资产生成（P000091） 286
基于线性网格曲线化的高阶 CFD 网格生成技术（P000094） 290
面向扫掠体分解的方向场引导的 Query-Mask 点云网络（P000096） 293
基于几何与拓扑特征的复杂三角网格自适应细缝修复方法（P000097） 296
体分解后扫掠顺序规划与六面体网格生成方法研究（P000098） 300
Adaptive Cartesian Mesh Generation Based on Distance Field（P000099） 303
面向复杂工程几何的域分解与子域优化全四边形网格生成方法（P000100） 331
HexBlockGen: Generating Simple Hexahedral Block Structures via Volumetric Distance Fields（P000101） 338

第二部分　海报 **343**

面向共形 FDTD 网格的多尺度几何特征表征框架（P000008） 344
面向结构网格质量评价的几何感知多阶段专家网络（P000012） 347
基于深度学习的电子产品几何模型简化方法（P000013） 351
基于聚合 AMG 的三维笛卡尔网格欧拉方程求解（P000017） 355
基于黎曼几何的灵活且保留路径的曲边 P2 网格生成框架（P000018） 357
一种面向投影型自适应笛卡尔网格的并行生成方法（P000021） 359
减层推进法：非结构附面层网格的自适应生成算法（P000023） 361
DRL-MeshOpt：面向高质量多块网格生成的拓扑保持顶点优化方法（P000029） 364
基于几何感知 Hilbert 曲线分区的笛卡尔网格求解器（P000030） 368

A Novel Structured Mesh Generation Method via Geometry-aware Graph Neural Network（P000035） 372
面向复杂曲面的黎曼度量驱动网格生成方法（P000040） 376
Fifth-Order Hyperbolic-Tangent WCNS Method Coupled with Penalization Boundary Treatment on Cartesian Grids（P000041） 378
烧蚀数值模拟中的计算域更新方法研究现状（P000042） 381
GKS 在自适应笛卡尔网格上的方法探究（P000043） 400
基于笛卡尔网格无粘求解器的耦合边界层动量积分方法研究（P000044） 404
基于流形样条曲面的四边形网格几何优化（P000052） 408
网格策略与自适应过程对方柱–平板临界间隙流动及气动声学响应的影响（P000059） 413
基于结构/非结构网格的时域电磁 FVTD 算法（P000061） 416
动态非结构重叠网格的并行增量装配方法（P000065） 419
重叠网格分布特性对分布式复合翼飞行器流场气动特性影响的数值仿真研究（P000066） 423
A Particle-Based GPU Parallel Method for Fast and High-Quality Tetrahedral Mesh Generation（P000078） 427
基于收缩包裹与可见性引导的三角网格法向快速矫正（P000082） 449
基于深度强化学习的三角形网格拓扑优化方法（P000087） 460
基于二次曲面变分形状逼近的全局四次三角 Bézier 曲面简化（P000090） 464
跨声速风洞核心流-透气壁-驻室网格生成与风洞流场计算（P000092） 467
考虑边界层细分的高阶混合网格翻转检测与修正方法（P000093） 472
一种复杂几何自适应笛卡尔网格快速生成方法（P000095） 487

第一部分

论文

基于壁面距离的层推进弹簧法高效动网格技术

尹强，李艳亮，史万里，李鸿岩

（航空工业空气动力研究院 高速高雷诺数气动力航空科技重点实验室，沈阳 110034）

摘　要：传统弹簧比拟法在动网格计算中需联立求解大型稀疏线性系统，计算成本高，并行效率受限。本文提出一种层推进弹簧法（Layerwise Spring Smoothing），将壁面距离计算与网格变形两个环节统一于前沿推进的框架下实现高效化。首先采用波前推进法沿网格拓扑快速生成全场壁面距离，将计算复杂度从 $O(N^2)$ 降至 $O(N\log N)$；继而，依据该距离场将网格节点划分为有序的层结构，从物面层开始，每一层内部的节点通过局部弹簧平衡进行独立更新，完成后再向下一层推进，从而将全局耦合方程组解耦为一系列规模小得多的层内子问题。各层求解时完全独立，天然支持层间并行。数值实验表明，与全局弹簧法相比，本文方法在壁面距离计算与网格变形两个环节的总耗时降低约一个数量级，变形后网格质量良好，适用于大规模非定常流场计算中的高频网格更新。

关键词：层推进弹簧法；壁面距离；波前推进法；网格变形；计算效率

0　引　　言

在计算流体力学（CFD）中，壁面距离是多种湍流模型与混合 RANS-LES 方法的关键参数，其自身的计算效率对整体模拟有直接影响。传统遍历搜索法在百万级以上网格上成本高昂，限制了大规模并行计算的启动速度。另一方面，涉及运动边界的动网格问题，如气动弹性、外形优化、流固耦合等，常采用弹簧比拟法或弹性体法来传递边界位移。此类方法需要在每个时间步组装并求解关于所有内部节点位移的大型稀疏线性方程组，计算耗时随网格数量超线性增长，成为非定常仿真的主要效率瓶颈。

本文提出层推进弹簧法。首先利用波前推进法获得全场精确的壁面距离场；然后根据距离将网格节点划分为若干层，各层边界（即到壁面等距面）将变形问题自然解耦。每一层内部节点通过局部弹簧系统达到平衡，由于层内节点数远小于全局节点数，其求解成本极低且各层可并行；层与层之间按由内到外的顺序依次推进，最终将物面位移传递至全域。该方法在保留弹簧法网格质量优势的同时，完全避免了全局大型稀疏矩阵的求解，在壁面距离计算和网格变形两个步骤上均实现了效率的跨量级提升。

1　问题描述

考虑网格规模为 N，壁面单元数为 N_{wall}。暴力搜索壁面距离需计算每个内部点到所有壁面单元的距离，复杂度为 $O(N\times N_{wall})$，在大网格上难以接受。弹簧比拟法则要求每一变形步求解以节点位移为未知量的线性系统 $K\Delta x=f$，其中刚度矩阵 K 规模为 $N_{node}\times N_{node}$，求解常需多次迭代，且在并行时因全局通信而扩展性受限。

1.1 波前推进法高效计算壁面距离

本文将所有壁面单元初始化为距离 0 的种子点，放入优先队列。每次从队列中弹出当前最短距离的单元，向其邻居传播“当前距离 + 单元中心间距”的候选值。若候选值小于邻居当前存储的距离，则更

新并通过优先队列继续传播。该过程直至所有可达单元的距离值稳定为止。

1.2 基于壁面距离分层的层推进弹簧法

获得壁面距离场 d 后，变形传递采用层推进弹簧法，其步骤为：

1) 节点分层

将壁面距离归一化至 [0,1] 区间，按预设的层数 M（如 M=20）划分，物面节点属于第 0 层，远场边界节点属于第 M 层。可以划分为等距层：第 k 层包含满足 $(k-1)/M \le d < k/M$ 的所有内部节点，也可以加入拉伸函数，使得离物面越远层的间距越大。

2) 逐层推进变形

设物面节点位移 Δx_{wall} 已给定。从第 1 层开始，依次处理每一层：

o 对于第 k 层内的任一节点 i，其位移受同层和已处理的前一层（第 k−1 层）节点的弹簧力约束。在层内执行局部弹簧平衡：假想弹簧连接节点 i 与其所有相邻节点，视前一层节点的位移为固定边界，建立层内局部方程组。

o 由于每层节点数远小于总节点数，层内矩阵规模极小。各层求解过程彼此独立，此处采用并行策略，多个层可同时启动求解（需注意层间依赖，通过软同步实现粗粒度并行）。

o 求解出第 k 层所有节点的位移后，将其作为下一层的边界条件，向第 k+1 层推进。

3) 远场处理

对于最外层及远场边界节点，强制位移为零或不参与变形，以保证网格变形局限于近壁影响区。

整个变形流程中，无需组装和求解全局刚度矩阵，将 $O(N_{node})$的耦合求解转换为 M 个小型子系统的顺序或并行求解。该方法本质上是将物理上的弹簧平衡与几何上的距离分层推进相结合，在保留弹簧法抗畸变能力的同时，获得了显式方法的效率。

2 算例测试

对 DPW 阻力预测模型机翼施加展向变形，计算出的壁面距离场如图 1 所示。

3 结　论

本文成功地将前沿推进思想应用于壁面距离计算与网格变形两个关键阶段，提出了层推进弹簧法：

- 在壁面距离计算阶段，波前推进法以拓扑传播代替全局搜索，实现了接近一个数量级的加速。
- 在网格变形阶段，通过壁面距离分层将全局耦合弹簧系统解耦为小规模的层内局部问题，逐层推进，完全避免了大规模稀疏方程组求解，效率提升，消耗内存减小。
- 两阶段叠加，总计算耗时降低约一个数量级，且变形后网格质量满足工程计算要求。

该方法特别适合需要高频网格更新的多物理场耦合仿真。下一步工作将研究自适应分层策略及大变形下的层间光顺算法，进一步提升方法的鲁棒性与适用范围。

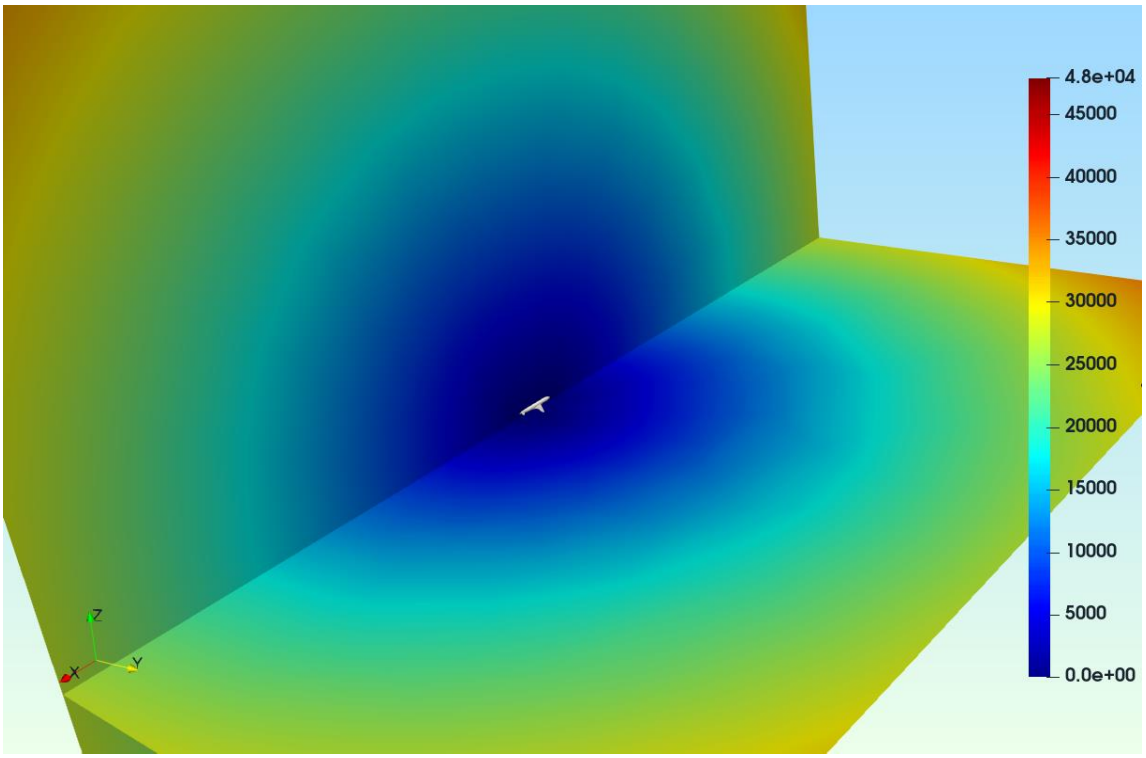


图 1. DPW 阻力预测标模机翼变形后的距离场

参 考 文 献:

[1] Sethian J A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1996, 93(4): 1591-1595.

[2] Tucker P G. Differential equation-based wall distance computation for DES and RANS[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 190(1): 229-248.

[3] Zhi H, et al. Enhancement on parallel wall distance calculation methodology for partitioned unstructured grid[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2023, 95(4): 557-578.

[4] Blom F J. Considerations on the spring analogy[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2000, 32(6): 647-668.

[5] OpenFOAM Foundation. OpenFOAM v10 User Guide: meshWave wall distance method [EB/OL].

aerospace

MDPI

Article

A Novel Solution- and Moving Boundary-Adaptive Cartesian Grid Strategy for Efficient and High-Fidelity Simulations of Complex Flow with Moving Boundaries

Zhiwei Guo [1], Lincheng Xu [2,3,*], Yuan Gao [4] and Naizhen Zhou [4]

[1] School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; gzw@nwpu.edu.cn
[2] School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
[3] National Key Laboratory of Aircraft Configuration Design, Xi'an 710072, China
[4] Science and Technology on Space Physics Laboratory, Xi'an 710072, China; gylxmagic@163.com (Y.G.); skypainter@126.com (N.Z.)
* Correspondence: lincheng.xu@nwpu.edu.cn

Abstract

In this paper, a novel solution- and moving boundary-adaptive Cartesian grid strategy is proposed and used to develop a computational fluid dynamics (CFD) solver. The new Cartesian grid strategy is based on a multi-block structure without grid overlapping or ghost grids in non-fluid areas. In particular, the dynamic grid adaptive operations, as well as the adaptive criteria calculations, are restricted to the grid block boundaries. This reduces the grid adaptation complexity to one dimension lower than that of CFD simulations and also facilitates an intrinsic compatibility with moving boundaries since they are natural grid block boundaries. In addition, an improved hybrid immersed boundary method enforcing a physical constraint of pressure is proposed to robustly implement boundary conditions. The recursively regularized lattice Boltzmann method is applied to solve for fluid dynamics. The performance of the proposed method is validated in simulations of flow induced by a series of two- (2D) and three-dimensional (3D) moving boundaries. Results confirm that the proposed method is adequate to provide efficient and effective dynamical grid refinements for flow solutions and moving boundaries simultaneously. The considered unsteady flow physics are accurately and efficiently reproduced. Particularly, the 3D multiscale flow induced by two tandem flapping wings is simulated at a computational time cost about one order lower than that of a reported adaptive Cartesian strategy. Notably, the grid adaptations only account for a small fraction of CFD time consumption, about 0.5% for pure flow characteristics and 5.0% when moving boundaries are involved. In addition, favorable asymptotic convergence with decreasing minimum grid spacing is observed in the 2D cases.

Keywords: computational fluid dynamics; adaptive Cartesian grid; lattice Boltzmann method

check for updates

Academic Editor: László Könözsy

Received: 13 September 2025
Revised: 19 October 2025
Accepted: 24 October 2025
Published: 26 October 2025

Citation: Guo, Z.; Xu, L.; Gao, Y.; Zhou, N. A Novel Solution- and Moving Boundary-Adaptive Cartesian Grid Strategy for Efficient and High-Fidelity Simulations of Complex Flow with Moving Boundaries. *Aerospace* **2025**, *12*, 957. https://doi.org/10.3390/aerospace12110957

Correction Statement: This article has been republished with a minor change. The change does not affect the scientific content of the article and further details are available within the backmatter of the website version of this article.

Copyright: © 2025 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

1. Introduction

During the past decades, the Cartesian grid-based lattice Boltzmann (LB) method has been widely accepted as an efficient and effective computational fluid dynamics (CFD) approach for various unsteady flow simulations (e.g., multiscale flow, multiphase flow, and combustion) [1–4]. This is mainly due to advantages of both the Cartesian grids (e.g., easy grid generation for complex boundary geometries, perfect mesh quality, and simple

discretization of the LB equations) and the LB method (e.g., explicit time marching scheme, linear convection term, simple parallel implementation and low numerical dissipation). However, due to the geometric symmetry refining of Cartesian grids is usually isotropic, hence resulting in an exponential increase in the grid number as well as the computational time cost. The problem becomes crucial in simulations of multiscale flows and/or flows induced by moving boundaries, because the refined area might be significantly enlarged by the fluid dynamics and/or the boundary movements [5,6]. Although many adaptive Cartesian grid methods have been proven effective in relieving the challenge [6–8], more efficient adaptive strategies are still in high demand to solve complex problems.

Adaptive Cartesian grids have long been deemed a promising solution to several substantial challenges of CFD, such as tedious mesh generation work, dependence on professional mesh generation software, and uncertainties caused by non-ideal mesh quality [9]. The topic has been extensively studied and various adaptive Cartesian grid strategies have been proposed within both the traditional Navier–Stokes paradigm [10–15] and the relatively new LB framework [8,16,17]. The effectiveness of adaptive Cartesian grids in improving numerical accuracy and reducing cost, especially when complex boundary geometries are involved, has been repeatedly verified in simulations of the unsteady wake of blunt objects [7,13,16–18], flow induced by multiple and/or moving objects [7,8,10], interface evolution in multiple-phase flow [19], and compressible flow with shocks [18,20].

In these successes, two prominent advantages of Cartesian grids for the implementation of adaptive refinement have been emphasized. First, compared to body-fitted meshes identified by the location in physical computer memories, Cartesian grids can be self-marked by the integrals proportional to their coordinates. This feature allows Cartesian grids to identify their neighboring nodes directly based on physical positions. Assisted by tree-like data structures, it could facilitate convenient and efficient basic operations during adaptive refinements, such as searching for a specific node, adding new nodes, and deleting redundant nodes [7]. Second, in terms of mesh quality, Cartesian grid refinement is usually realized by halving local grid spacings without deteriorating mesh quality as the adaptive refinements of body-fitted meshes usually do [21,22].

However, many of the reported adaptive Cartesian grid strategies are mainly suitable for static boundaries, and many of those considering moving boundaries require ghost grids in non-fluid areas [6,7]. The preference of ghost grids in combination with diffused immersed boundary treatments (e.g., the classic one proposed by Peskin [23]) is favorable to avoid the complexity caused by fresh grids immediately after a moving boundary. Despite that, ghost grids also lead to considerable redundant computational cost, which is especially true when ghost grids are part of the finest grid blocks [6,7]. Moreover, most of the reported solution-adaptive Cartesian grid strategies require calculation of the adaptive criteria, which is also considerably expensive [6,18]. To circumvent these drawbacks and facilitate efficient high-fidelity simulations of complex flow induced by moving boundaries, it is desirable to develop more efficient solution-adaptive Cartesian grids that are simultaneously adaptive for moving boundaries without ghost grids.

The lattice Boltzmann (LB) method is an explicit time–space coupling scheme with an intrinsic compatibility with Cartesian grids. Different from the traditional macroscopic CFD methods that directly solve the Navier–Stokes equations, the LB method is a mesoscopic alternative focused on the possibility distribution functions of fluid particles [3]. Simplified from the continuous Boltzmann equation, the LB method solves a finite set of possibility distribution functions by taking an effective discretization of the full velocity space according to the Gaussian integral theorem [24]. Meanwhile, a linear time relaxation procedure is adopted to model particle collisions [10]. Theoretically, the LB equations can be restored to the weakly compressible Navier–Stokes equations with second-order

accuracy [25–27]. Based on Cartesian grids, the LB method can be expressed by two local procedures, i.e., a stream process and a collision process. Among the various LB models (e.g., the well-known BGK [28] and MRT [29] models), the recursively regularized (RR) LB method [30,31] applies a distinguishing nonlinear reconstruction of the non-hydrodynamic moments of the distribution functions from the hydrodynamic ones. The method is praised for high computational efficiency as well as favorable numerical stability [32,33].

Different from traditional CFD methods with a sophisticated taste for body-fitted meshes, the LB method intrinsically relies on proper boundary treatments to bridge the staggered Cartesian boundary grids with general curved boundary geometries [3,34]. Some of the reported boundary treatments directly reconstruct the LB distribution functions by mimicking the bounce-back behavior of particles hitting a wall, e.g., the widely used bounce-back (BB) method and its various improved variants [6]. These mesoscopic boundary treatments are usually simple to implement without ghost grids but might not be related to macroscopic boundary conditions in one-to-one maps.

Many boundary treatments for Cartesian grids are developed from a macroscopic view. The aforementioned diffused immersed boundary (IB) method models the presence of boundaries as an external force diffused among the surrounding Cartesian grids, e.g., the classic IB method proposed by Peskin [23] and various improved strategies [7,34]. This kind of method is usually relatively easy to implement, but the boundaries cannot be accurately resolved as sharp interfaces. In contrast, the cut-cell method treats boundaries as sharp interfaces by taking full advantage of the exact local intersections between the boundary interfaces and the staggered Cartesian grids [35]. Due to the geometric complexity, especially for 3D moving boundaries, many applications of the cut-cell method are focused on 2D static boundary problems [34,36].

The hybrid immersed boundary method is proposed to combine the advantages of the diffused IB method and the cut-cell method [37]. In this method, macroscopic variables at boundary grid nodes are reconstructed from the surrounding domain nodes without ghost grids so that an external force is implicitly imposed and the boundary is resolved as a sharp interface [34,37]. The velocity boundary condition is usually of the Dirichlet type or the Neumann type, and an interpolation could be used in the reconstruction of velocity [38,39]. In contrast, the density or pressure at physical boundaries is usually of neither the Dirichlet type nor the Neumann type, i.e., both their values and/or gradients at boundaries are not explicitly prescribed. In many steady high Reynolds number applications with thin boundary layers, this problem is omitted by assuming a Neumann boundary condition, i.e., $\partial_n p = 0$, but this might not be applicable for relatively low Reynolds numbers, unsteady flows, and/or moving boundaries. In these cases, the Poisson equation is usually solved for the required pressure [38,40].

This paper aims to develop a novel dynamic adaptive Cartesian grid strategy facilitating simultaneous adaptability for flow solutions and moving boundaries so that complex flow with moving boundaries can be efficiently simulated with high fidelity. To achieve this, an improved hybrid IB method is proposed to provide efficient and robust flow information reconstructions for boundary grid nodes. The RR-LB method is adopted to solve for fluid dynamics in the weakly compressible regime. Following this section, the RR-LB algorithm is briefly introduced in Section 2, the novel adaptive Cartesian grid strategy is presented in Section 3, and the improved hybrid IB boundary treatment is detailed in Section 4. Then the proposed method is validated and assessed in a series of 2D and 3D flow simulations considering static or moving boundaries in Section 6. Finally, some critical conclusions are drawn in Section 7.

2. The Recursively Regularized (RR) Lattice Boltzmann (LB) Method

The RR-LB method is applied to solve for fluid dynamics. The method maintains the simple BGK framework by applying a single relaxation time. Specifically, the RR-LB method is decomposed into two cyclic processes, i.e., a streaming process and a collision process. The streaming process can be expressed as

$$f_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i\Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\boldsymbol{x}, t) \tag{1}$$

where f_i is the ith distribution function, $\boldsymbol{x}$ is the coordinate vector, $\boldsymbol{e}_i$ is the ith discrete characteristic velocity, t is the time, Δt is the time step and f_i^* is the ith distribution function after collision. After the streaming step, the collision process occurs as

$$f_i^*(\boldsymbol{x}, t) = f_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau} f_i^{ne} \tag{2}$$

where $1/\tau$ is the single relaxation time and f_i^{ne} is the ith off-equilibrium distribution function. Theoretically, the numerical collision frequency τ is determined as

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{\nu}{c_s^2 \Delta t} \tag{3}$$

where c_s is the lattice sound speed satisfying $c_s^2/c^2 = \frac{1}{3}$, with $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ and Δx being the grid spacing. The macroscopic variables are related to f_i as

$$\rho = \sum f_i, \boldsymbol{u} = \sum f_i \boldsymbol{e}_i, p = \rho c_S^2 \tag{4}$$

with $\rho, \boldsymbol{u}$ and p being the fluid density, velocity and pressure, respectively.

The off-equilibrium f_i^{ne} is determined as

$$f_i^{ne} = f_i - f_i^{eq} \tag{5}$$

with f_i^{eq} being the ith equilibrium distribution function, determined as

$$f_i^{eq} = \rho\omega_i \left[1 + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i}{c_s^2} + \frac{\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i - c_s^2\mathbf{I}\right) : \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}{c_s^4} \right] \tag{6}$$

where ω_i is the weight factor associated with $\boldsymbol{e}_i$ and $\mathbf{I}$ is the identity matrix.

Following Coreixas et al. [24], for the classical D2Q9 and D3Q27 models, f_i^{ne} can be expressed as

$$f_i^{ne} = \omega_i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{c_s^{2n} n!} \boldsymbol{a}_n : \mathcal{H}_n(\boldsymbol{e}_i) \tag{7}$$

with $\mathcal{H}_i$ being the ith Gaussian–Hermite tensor and $\boldsymbol{a}_n$ being the nth coefficient tensor. Different from the classic BGK collision model, which directly uses f_i^{ne} in Equation (5) (or Equation (7)), the RR method [30] applies a nonlinear reconstruction of f_i^{ne} by dropping the high-order ($n > 3$) terms in Equation (7). The first four Gaussian–Hermite tensors are formulated as

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\boldsymbol{e}_i) &= 1 \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_1(\boldsymbol{e}_i) &= \boldsymbol{e_i} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(\boldsymbol{e}_i) &= \boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_i} - c_s^2\mathbf{I} \\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_3(\boldsymbol{e}_i) &= \boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_i} - c_s^2\mathbf{I}\boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{8}$$

and the corresponding coefficient tensors are recursively related as

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \boldsymbol{a}_1 = 0 \\ \boldsymbol{a}_2 &= \sum_{i=1}^{Q} (f_i - f_i^{eq}) \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(\boldsymbol{e}_i) \\ &\approx \rho \tau c_s^2 \nu (\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u}^T) \\ \boldsymbol{a}_3 &\approx \rho \nu \boldsymbol{u a}_2 \end{aligned} \tag{9}$$

As illustrated in Equation (9), the term $\boldsymbol{a}_2$ could be calculated either from $f_i - f_i^{eq}$ or from the macroscopic velocity gradients. Notably, the above recursive regularization process significantly improves the numerical stability by directly filtering out the potentially unstable high-order moments, and the nonlinear reconstruction in Equations (7)–(9) is not compatible with the linear MRT framework [24].

To facilitate synchronization between two different grid spacings, the equilibrium distribution functions as well as the macroscopic variables remain unchanged, while the off-equilibrium distribution functions are related as [16]

$$\frac{f_i^{ne,c}}{\tau_c \Delta x_c} = \frac{f_i^{ne,f}}{\tau_f \Delta x_f} \tag{10}$$

where the subscripts $_c$ and $_f$ represent the coarse and fine grid spacings, respectively.

As demonstrated in Equations (1) and (2), the LBM adopts an explicit time–space coupling strategy. For weakly compressible flows, the maximum velocity is widely accepted to be less than $0.3c_s$, which is consistent with the stability analysis of the LBM [26]. In the rest of this paper, the well-known D2Q9 and D3Q27 LB models will be used in 2D and 3D simulations, respectively.

3. Algorithm of the Novel Adaptive Cartesian Grid Strategy

The efficient solution- and moving boundary-adaptive Cartesian grid system is a fundamental contribution of this paper. In the following, details of the novel strategy are dissected into three parts: the basic characteristics, the solution-adaptive algorithm, and the moving boundary-adaptive algorithm.

3.1. Basic Characteristics

In order to reduce unnecessary computation as much as possible, as illustrated in Figure 1, the grid system is based on a multi-block structure without grid overlapping between adjacent blocks or ghost grids in non-fluid areas. A minimum number of five grid layers is enforced in every grid block to avoid contact between the inner boundary and the outer boundaries. Intuitively, the flexible control of grid layers is necessary to realize the grid adaptability for flow solutions, which is critical to provide high-fidelity flow simulations using the fewest grid cells possible. These basic features are essential improvements compared to the purely geometry-adaptive strategy reported in Ref. [7], where ghost grids and prescribed grid distribution are fundamental factors.

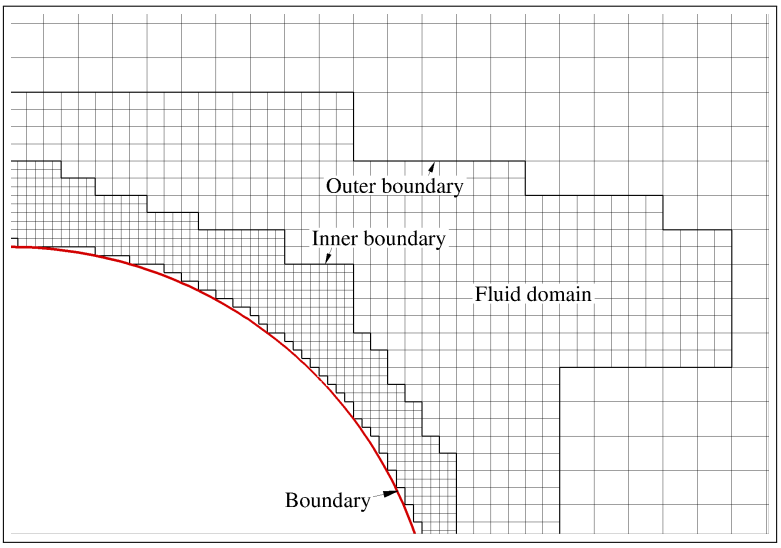


Figure 1. Illustration of the new solution- and moving boundary-adaptive Cartesian grid.

3.2. Solution-Adaptive Algorithm

Figure 2 demonstrates the adaptive grid algorithm for flow solutions. The process begins with the calculation of two criteria at the outer boundary of a grid block. If either of the adaptive criteria exceeds the prescribed threshold values, a refining process is triggered. Apart from that, the refining process could also be triggered when the minimum number of grid layers between an outer node and the inner boundary of the block is less than five. In contrast, if both the criteria are lower than a fraction (e.g., 0.25) of the threshold values, a coarsening process is triggered. A small fraction, 0.25, is chosen to relieve the triggering frequency. Following Coirier and Powell [10], the adaptive criteria are determined as

$$C_1 = |\nabla \cdot \boldsymbol{u}|\Delta x^{1.5}, C_2 = |\nabla \times \boldsymbol{u}|\Delta x^{1.5}. \tag{11}$$

The threshold values $T_1 = T_2 = 0.1U_{ref}$ (U_{ref} is the reference velocity) are used.

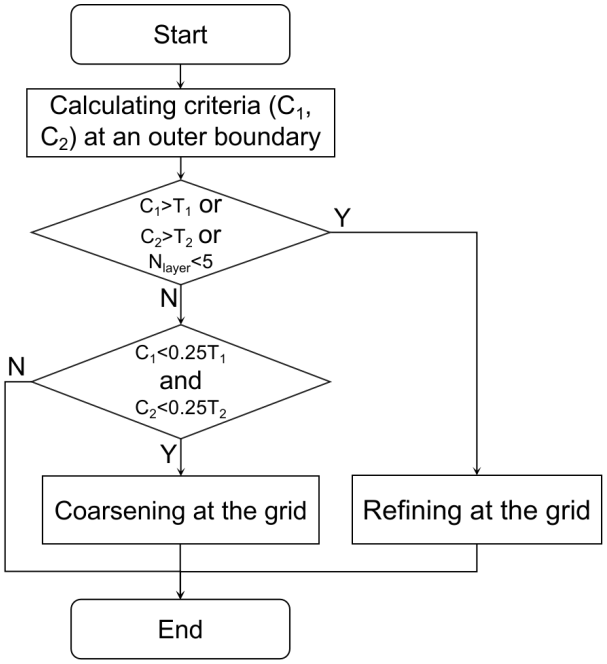


Figure 2. Solution-adaptive grid algorithm. T_1 and T_2 are threshold values for the adaptive criteria C_1 and C_2, respectively.

Figure 3 illustrates the refining and coarsening processes at an outer grid boundary. When a refining process is triggered (e.g., at A), new fine grids (e.g., D, E, F, and G) are firstly added to fill all the connected coarse cells (e.g., the cell ABDC). Then the coinciding node (e.g., at A) on the inner boundary of the coarse block is deleted so that the original block boundary BAC changes to be BDC. The coarsening process is exactly the opposite. Taking D for instance, when a coarsening process is triggered, all the connected fine nodes (e.g., E, F, and G) are firstly deleted so that the original block boundary BDC changes to be BAC. Accordingly, the newly emerging coarse inner boundary nodes (e.g., A) are added to the coarse block.

The flow information at the newly added coarse nodes and the fine nodes that coincide with coarse ones is reconstructed from the coinciding nodes through the information synchronization mechanism between two grid blocks introduced in Section 2. For the newly added fine nodes not coinciding with coarse ones, the flow information is reconstructed through quadratic polynomial interpolations from that at the surrounding coarse nodes within the range of two grid spacings (if a coarse node is missing, the coinciding fine one will be used, e.g., H, I, or K). The regular and well-centered stencil is favorable for smooth and stable interpolations. Still, the information synchronization mechanism is applied before the interpolations.

It should be noticed that the above information reconstructions put an emphasis on the smooth transition between grid blocks without guaranteeing the conservation of mass and momentum. Considering that the potential deviation is mainly produced in the quadratic polynomial interpolations and can be expressed as a truncation error in the order of Δx^3, it could actually be deemed a minor disturbance within the second-order accurate LB method.

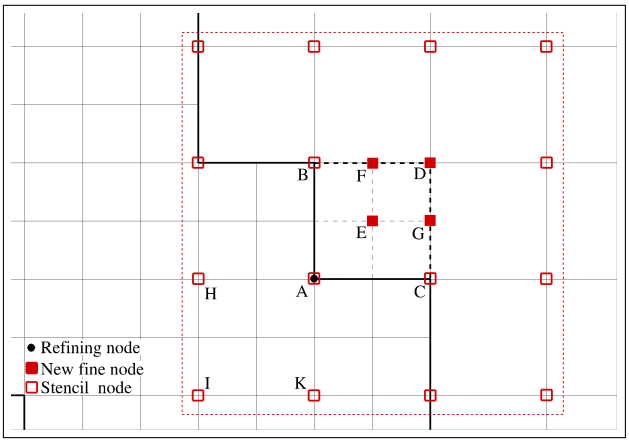


Figure 3. Grid adaptive process for flow solutions. For a refining process, A is the grid node to be refined. D, E, F and G are the newly added fine nodes, and the coarse node at A will be deleted. All the coarse nodes (or the overlapping fine nodes like H, I, K) indicated by empty squares will be used to reconstruct the flow information at the newly added fine node. For a coarsening process, D is the grid node to be coarsened. D, E, F and G will be deleted and a new coarse node will be added at A.

3.3. Moving Boundary-Adaptive Algorithm

The moving boundary-adaptive grid processes are directly simplified from the above solution-adaptive ones by taking the boundary grids as the inner boundary of the block and ignoring the fine grid-related operations. As demonstrated in Figure 4, the processes are triggered when a moving boundary sweeps over a Cartesian node (e.g., D). The node will be deleted if it is already in the fluid area. Otherwise, it will be added as a new node. The flow information at a new boundary grid node is reconstructed using the proposed immersed boundary treatment detailed in the next section (i.e., Section 4).

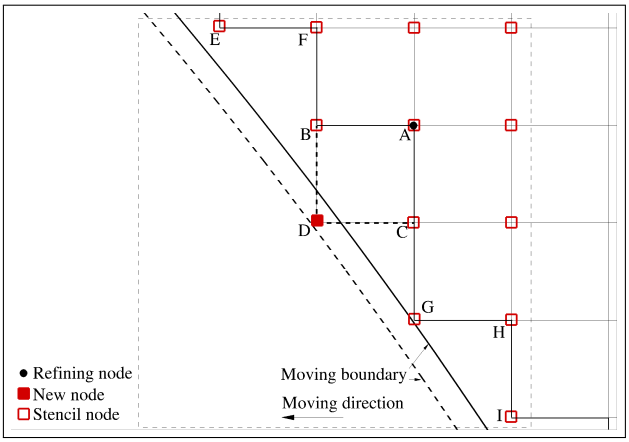


Figure 4. Grid adaptive process for a moving boundary. The boundary moves across the node D. If the boundary moves to the left, a new grid node will be added at D, and the surrounding nodes indicated by empty squares (e.g., A, B, C, E, F, G, H, I) will be used to reconstruct the flow information at D. Otherwise, if the boundary moves to the right, the already existed grid node D will be deleted, and the previous domain node A becomes a boundary grid node.

4. The Improved Hybrid Immersed Boundary (IB) Treatment

To facilitate robust information reconstruction at boundary grid nodes, especially the fresh ones immediately following a moving boundary (see Figure 4), an improved hybrid IB treatment requiring no ghost grid is proposed to accurately implement the non-slip boundary condition.

Following Jacob et al. [32], the required distribution functions at boundary grid nodes are reconstructed from macroscopic variables (e.g., ρ and $\boldsymbol{u}$) as well as their gradients according to the RR-LB theory (see Equations (6)–(9)). Different from many existing IB methods, the improved hybrid IB method manages to avoid extrapolation of ρ or solving the Poisson equation in the reconstruction of density (or pressure) by enforcing a physical gradient constraint according to the Navier–Stokes equation, i.e.,

$$\begin{aligned} c_s^2 \nabla_n \rho =& \nabla_n p = -\rho \frac{D u_n}{D t} + \nu (\nabla \cdot S)_n \\ =& -\rho a_{v,n} + \nu (\nabla \cdot S)_n \end{aligned} \tag{12}$$

where the subscript n indicates the component normal to the local boundary, a_v is the boundary acceleration, S is the shear strain tensor, $\frac{D}{Dt}$ is the material derivative, and all the variables are on the boundary surface. It should be noticed that Equation (12) is mainly valid for weakly compressible flow since the assumption $p = \rho c_s^2$ is applied.

Since the physical constraint in Equation (12) includes velocity and its gradient (e.g., the viscous term), they are reconstructed before ρ. As shown in Figure 5, following Ref. [32], a reference point (e.g., C) immersed in the fluid domain normal to the boundary with a distance $d_{ref} = 2.5\Delta x$ is introduced to assist the macroscopic reconstruction. The required macroscopic flow information at the boundary grid node B is calculated using that at the reference point C and the perpendicular projection A.

First, the flow information at the reference point C, including $\rho, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}$ and $(\nabla \cdot S)_n$, is calculated from the surrounding domain nodes (e.g., D) satisfying $|x_i - x_{B,i}| \leq 2\Delta x$ ($1 \leq i \leq N$, with N being the number of dimensions) through a polynomial interpolation. Specifically, quadratic interpolation is preferred once the stencil is suitable. Otherwise, linear interpolation is preferred until the stencil is not applicable, in which case the boundary treatment is terminated by holding the variables from the previous step unchanged.

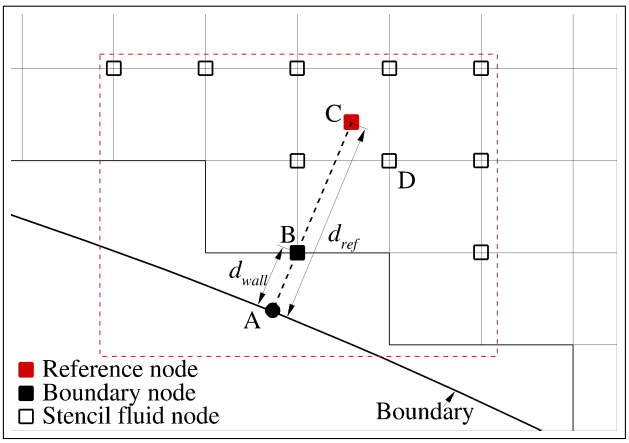


Figure 5. Sketch of the immersed boundary method. B is the boundary grid node to be reconstructed. A is the perpendicular projection on the boundary. C is a reference point on the line AB with a distance $d_{ref} = 2.5\Delta x$ away from the boundary. Domain nodes are denoted by empty squares (e.g., D).

Based on this, the desired velocity at B is determined through linear interpolation with second-order accuracy, i.e.,

$$\boldsymbol{u}_B = \left(1 - \frac{d_{wall}}{d_{ref}}\right)\boldsymbol{u}_A + \frac{d_{wall}}{d_{ref}}\boldsymbol{u}_C \tag{13}$$

where the subscripts A, B and C are referred to the points shown in Figure 5 and d_{wall} is the wall distance of B. The velocity gradient $\nabla \boldsymbol{u}$ at B directly takes that at the reference point C without deteriorating the second-order accuracy.

For the desired density ρ at B, a linear interpolation using ρ_C and the normal gradient of ρ at A ($\nabla_n \rho_A$), i.e.,

$$\rho_B = \rho_C - \left(d_{ref} - d_{wall}\right)\nabla_n \rho_A \tag{14}$$

Using $\nabla_n \rho_A$ instead of $\nabla_n \rho_C$ in Equation (14) is favorable to avoid extrapolation as the latter might be smeared by ρ_C. Similarly, ρ_A could be determined as

$$\rho_A = \rho_C - d_{ref}\nabla_n \rho_A \tag{15}$$

By combining Equation (12) with Equation (15), the gradient $\nabla_n \rho_A$ could be determined as

$$\nabla_n \rho_A = \frac{-\rho_c a_{v,n} + \nu(\nabla \cdot S)_n}{c_s^2 - d_{ref} a_{v,n}} \tag{16}$$

where $(\nabla \cdot S)_n$ directly takes its value at the reference point (e.g., C).

Substituting Equation (16) into Equation (14), the desired density is determined as

$$\rho_B = \rho_C - \left(d_{ref} - d_{wall}\right)\frac{-\rho_c a_{v,n} + \nu(\nabla \cdot S)_n}{c_s^2 - d_{ref} a_{v,n}} \tag{17}$$

Apparently, numerical singularity when $c_s^2 = d_{ref} a_{v,n} = 2.5\Delta x a_{v,n}$ can be avoided by adjusting Δx.

Furthermore, the ratio between the two terms in the denominator of Equation (17), i.e., $d_{ref} a_{v,n}/c_s^2$, can be related to the time step Δt as

$$\frac{d_{ref} a_{v,n}}{c_s^2} = 2.5\frac{a_{v,n}\Delta t c}{c_s^2} = 2.5\sqrt{3}\frac{a_{v,n}\Delta t}{c_s} \tag{18}$$

where the aforementioned relations $d_{ref} = 2.5\Delta x$, $c = \Delta x/\Delta t$ and $c^2/c_s^2 = 1/3$ are applied. When a small Δt is used so that the velocity change $a_{v,n}\Delta t$ is much less than the sound speed c_s (e.g., $a_{v,n}\Delta t/c_s < 0.01$, which is called the "high time resolution assumption" in the following), the above ratio is much less than one (e.g., 0.05), and thus $d_{ref}a_{v,n}$ is negligible compared to c_s^2. By neglecting $d_{ref}a_{v,n}$, Equation (17) is then simplified as

$$\rho_B = \rho_C - \frac{d_{ref} - d_{wall}}{c_s^2}\nu(\nabla \cdot S)_n \tag{19}$$

Since $a_{v,n}\Delta t/c_s < 0.01$ is always satisfied for incompressible flows and usually satisfied in weakly compressible flow simulations with high time resolutions, Equation (19) is preferred for the sake of simplicity in this paper.

Notably, the proposed boundary treatment in Equations (13), (17) and (19) is purely explicit and involves no extrapolation. This is not only favorable for numerical stability but could also be directly used to reconstruct flow information for both existing and fresh boundary grid nodes.

5. Program Implementation

An in-house CFD solver is developed by implementing the RR-LBM together with the improved IB method based on the proposed solution- and moving boundary-adaptive Cartesian grid system.

To facilitate convenient and efficient basic operations for both grid adaptations and CFD calculations, each grid block is organized in a flexible data structure following Xu et al. [7]. Specifically, all grids in a block are stored in an extensible sequence of compact physical memories. Meanwhile, they are effectively sorted in a balanced binary tree (see Figure 1 in Ref. [7]). The compact memories are able to provide efficient data traversal, while the balanced binary tree is ready for efficient basic grid operations, including searching for a node, deleting a redundant node, and adding a new node.

Considering that only local calculations and/or operations are involved throughout the whole algorithm (i.e., the adaptive grid method, the RR-LB method, and the improved IB method), excellent parallel performance can be expected. The solver is coded in the MPI framework using the well-known C/C++ language (version 11). To obtain a clear performance validation of the whole method, including the time consumption caused by the adaptive grid operations, parallelization-related complexity is avoided by using one CPU in the following simulations.

6. Validation and Discussion

The validation is scheduled to assess the performance of the proposed method in detail in a 2D context by considering cases from a static cylinder and oscillating cylinders in different flow conditions to flapping foils with significantly different kinematics. Then a representative case with 3D complex moving boundaries, i.e., two tandem infinitely thin dragonfly wings flapping out of phase, is simulated for a preliminary validation of effectiveness in a 3D context. All simulations are run using one CPU on an ordinary laptop equipped with i5-13500H CPUs.

6.1. Sensitivity of the Adaptive Criteria-Related Parameters

Before going further, sensitivity of the adaptive criteria-related parameters, including the exponent in Equation (11) and the threshold values, is assessed. Considering that the adaptive criteria-related parameters directly work during the solution-adaptive process, the well-documented classical vortex shedding flow induced by a 2D static cylinder at Re = 100 is simulated. Three exponents (i.e., 1.0, 1.5 and 2.0) as well as five threshold values (i.e.,

0.4, 0.2, 0.1, 0.05 and 0.025 U_{ref}) are considered. A minimum grid spacing $\Delta x/D = 0.01$ (D is the cylinder diameter) together with a corresponding time step $U_{ref}\Delta t/D = 0.002$ is used. The maximum grid spacing is $1.28D$, resulting in eight grid blocks in total. Far-field boundaries about $100D$ away from the cylinder are used. All the simulations terminate at $U_{ref}t/D = 180$ to obtain fully developed regular vortex shedding flow.

Figures 6 and 7 show time histories of the resulting lift (C_L) and drag (C_D) coefficients, respectively. In general, both C_L and C_D are only slightly affected by the varying parameters. However, observable high-frequency disturbance of C_D can be observed in Figure 6a when the exponent is 1.0 and the threshold value is $\leq$0.2. The high-frequency disturbance is associated with vorticity contours not smoothly resolved using relatively coarse grids (see Figure 8a). The problem is then effectively removed by increasing the exponent to $\leq$1.5 and/or decreasing the threshold value to $\leq 0.1U_{ref}$ (see Figures 6, 8 and 9).

Conclusively, the adaptive criteria in Equation (11) and the threshold values ($0.1U_{ref}$) are well selected to reproduce the considered vortex shedding flow in direct numerical simulations.

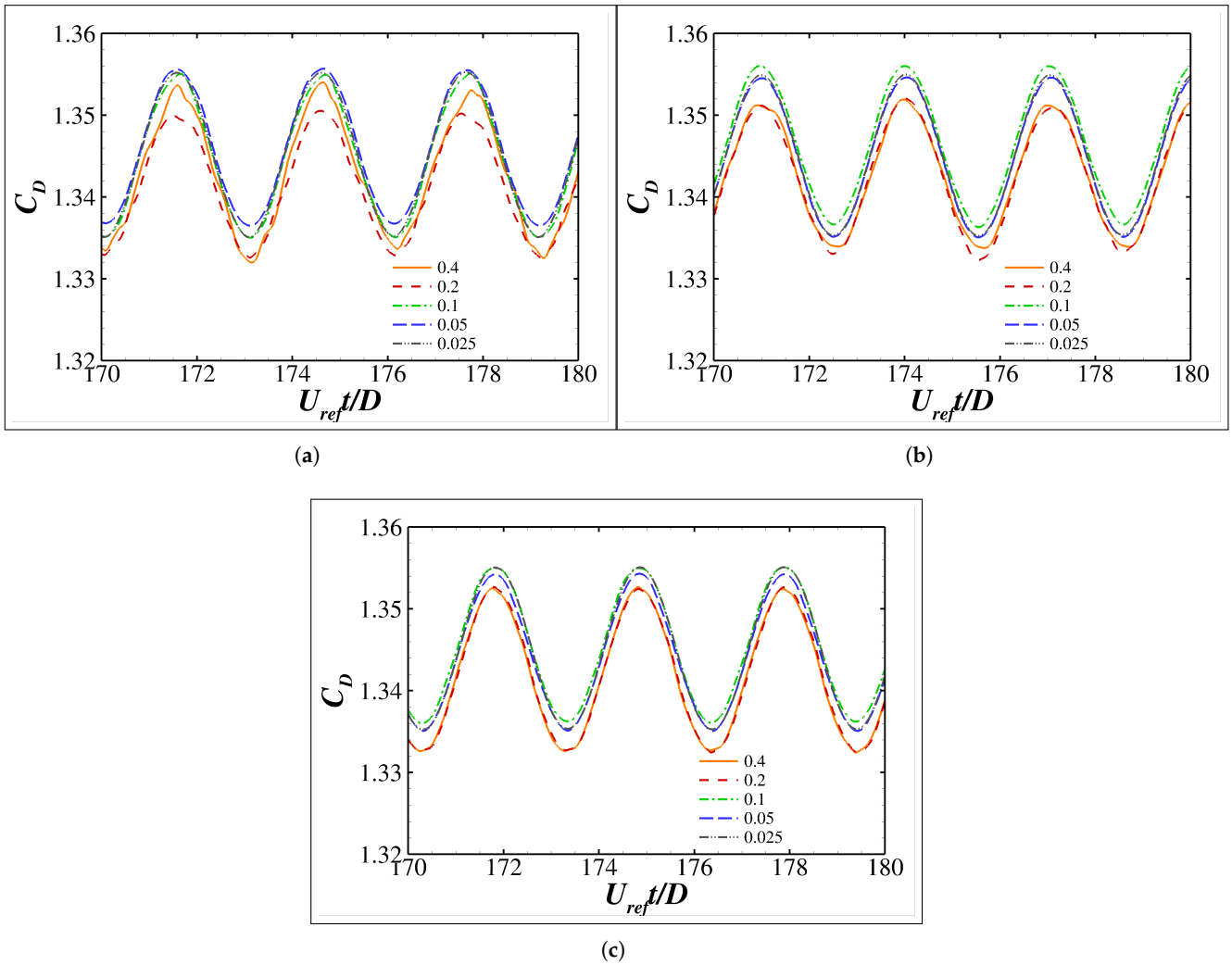
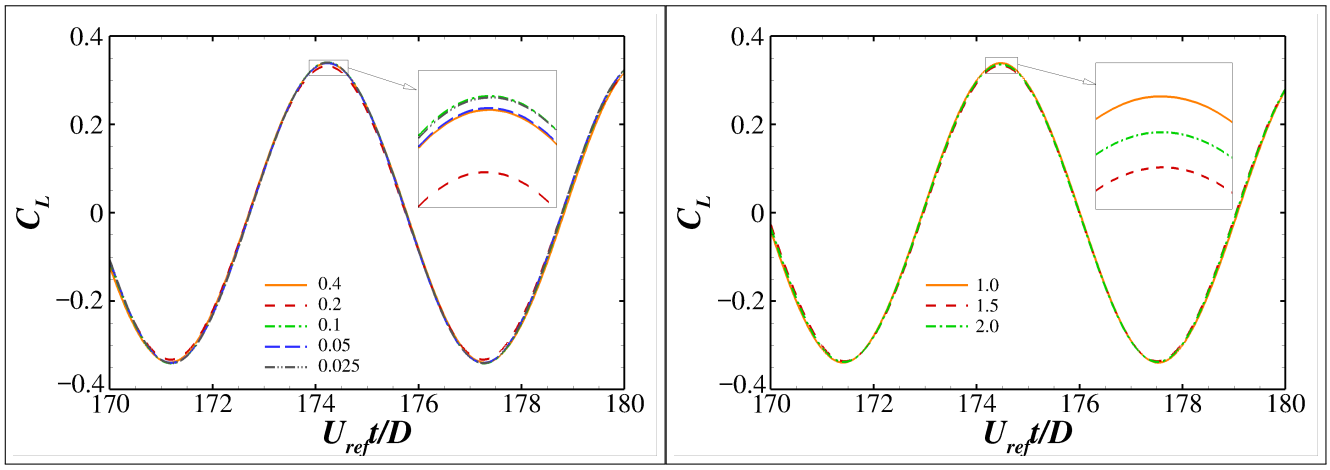
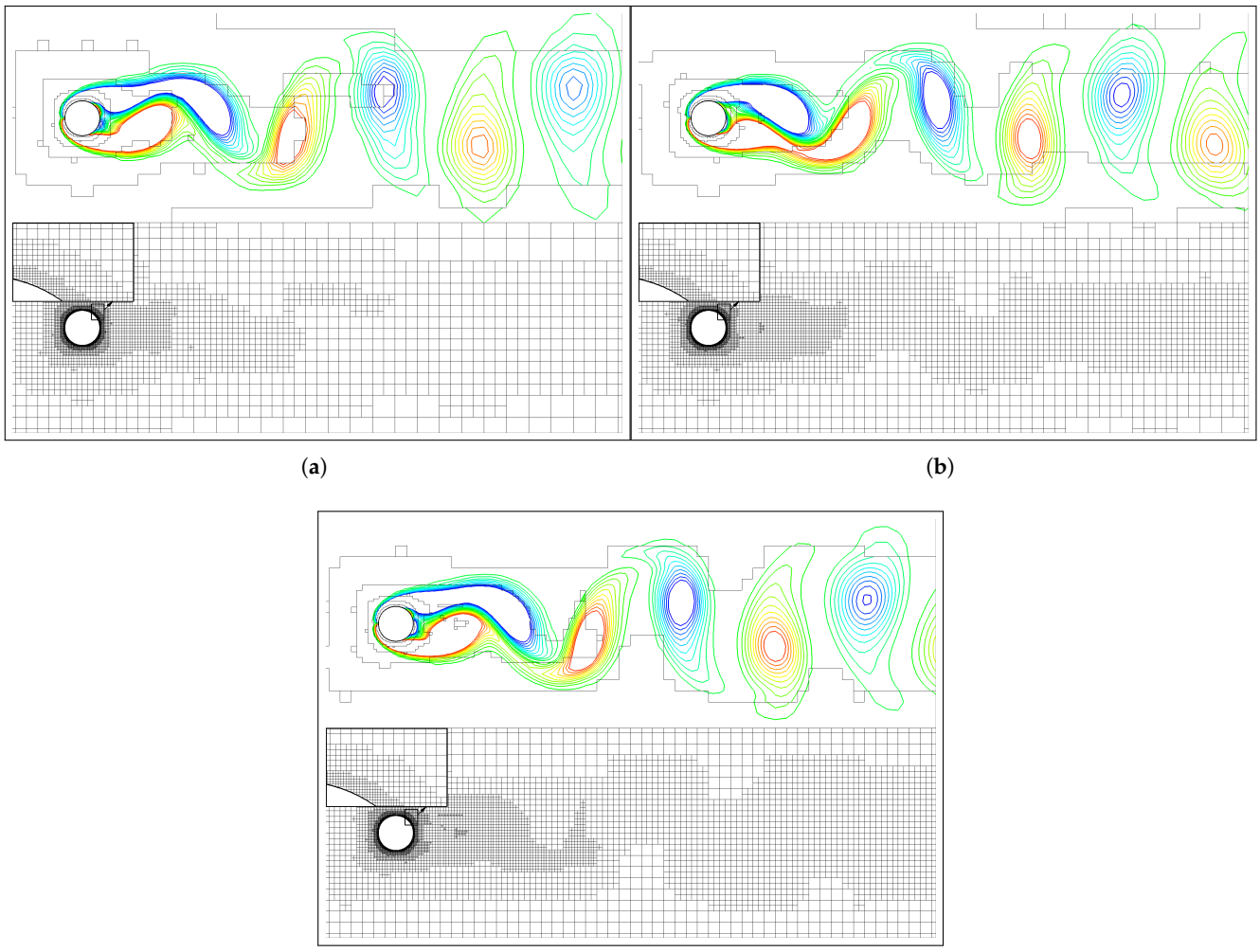


Figure 6. Time histories of the drag coefficient for different exponents ((**a**) 1.0., (**b**) 1.5., and (**c**) 2.0.) and threshold values (U_{ref}). Results are shifted within half a vortex shedding period to present in phase.



(**a**) (**b**)

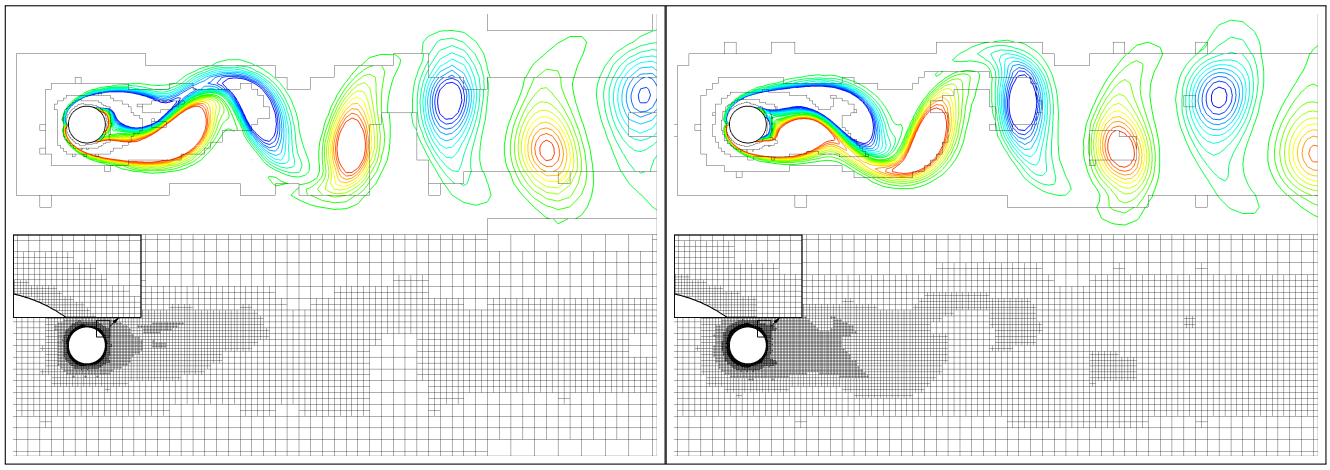
Figure 7. Time histories of the life coefficient for different threshold values with the exponent being 1.0 (**a**) and for different exponents with the threshold value being $0.4U_{ref}$ (**b**). Results are shifted within half a vortex shedding period to present in phase.



(**a**) (**b**)

(**c**)

Figure 8. Vorticity contours (from −1 (blue) to 1 (red) U_{ref}/D) and the corresponding grid distributions for different exponents ((**a**) 1.0, (**b**) 1.5, and (**c**) 2.0) with the threshold value being $0.4U_{ref}$.



(**a**) (**b**)

Figure 9. Vorticity contours (from -1 (blue) to 1 (read) U_{ref}/D) and the corresponding grid distributions for different threshold values ((**a**) $0.2U_{ref}$ and (**b**) $0.1U_{ref}$) with the exponent being 1.0.

6.2. Two-Dimensional Flow over a Cylinder

The classical vortex flow induced by a static or moving circular cylinder at Reynolds numbers (Re) around 100 is widely used to validate basic characteristics of numerical schemes. In the following, flow over a static cylinder and that induced by an oscillating cylinder with and without a free stream are considered in sequence.

6.2.1. Flow over a Static Cylinder

The canonical flow over a 2D static circular cylinder with alternatively shedding vortices is simulated to validate and assess the solution-adaptive grid capability of the proposed method in a 2D context. The minimum grid spacing varies from $\Delta x/D = 0.00125$ to 0.02, with the corresponding time steps varying from $U_{ref}\Delta t/D = 0.000125$ to 0.002, respectively. The maximum grid spacing is fixed at $1.28D$, and the number of grid blocks varies from 11 to 7. Still, the far-field boundaries are about $100D$ away from the cylinder, and the simulations are terminated at $U_{ref}t/D = 180$.

Figure 10 shows the vorticity contours as well as the corresponding solution-adaptive grid distributions for different minimum grid spacings. The natural vortex shedding process is smoothly resolved with high resolutions in all these simulations. All the grid distributions exhibit effective adaptability for the vortex evolution in a similar manner, i.e., local refinements move in phase with the vorticity concentrations and the stronger vortices are resolved with finer grids. Meanwhile, the refined minimum Δx is mainly restricted to the vicinity of the boundary, indicating that a minimum Δx of $0.02D$ is sufficient to reproduce the unsteady fluid dynamics in the wake.

Figure 11a,b show time histories of the drag coefficient (C_D) and the lift coefficient (C_L), respectively. Both C_D and C_L are smoothly resolved and converge favorably, with the minimum grid spacing continuously halved. Clear asymptotic behaviors of C_D and C_L are achieved for $\Delta x/D \leq 0.01$ (see Figure 11a,b). Moreover, as shown in Figure 12, the time-averaged drag coefficient converges at a super-linear rate of about 1.95 when the minimum grid spacing decreases. It should be noticed that this convergence is different from the conventional grid convergence because the decreased minimum grid spacing is only a local refinement near the boundary. Therefore, the nearly quadratic convergence rate is more related to the second-order accurate hybrid IB method proposed in Section 4. In addition, all the data shown in Table 1, including the vortex shedding Strouhal number,

time-averaged C_D, and oscillating amplitudes of C_D and C_L, show good agreement with those reported from different studies.

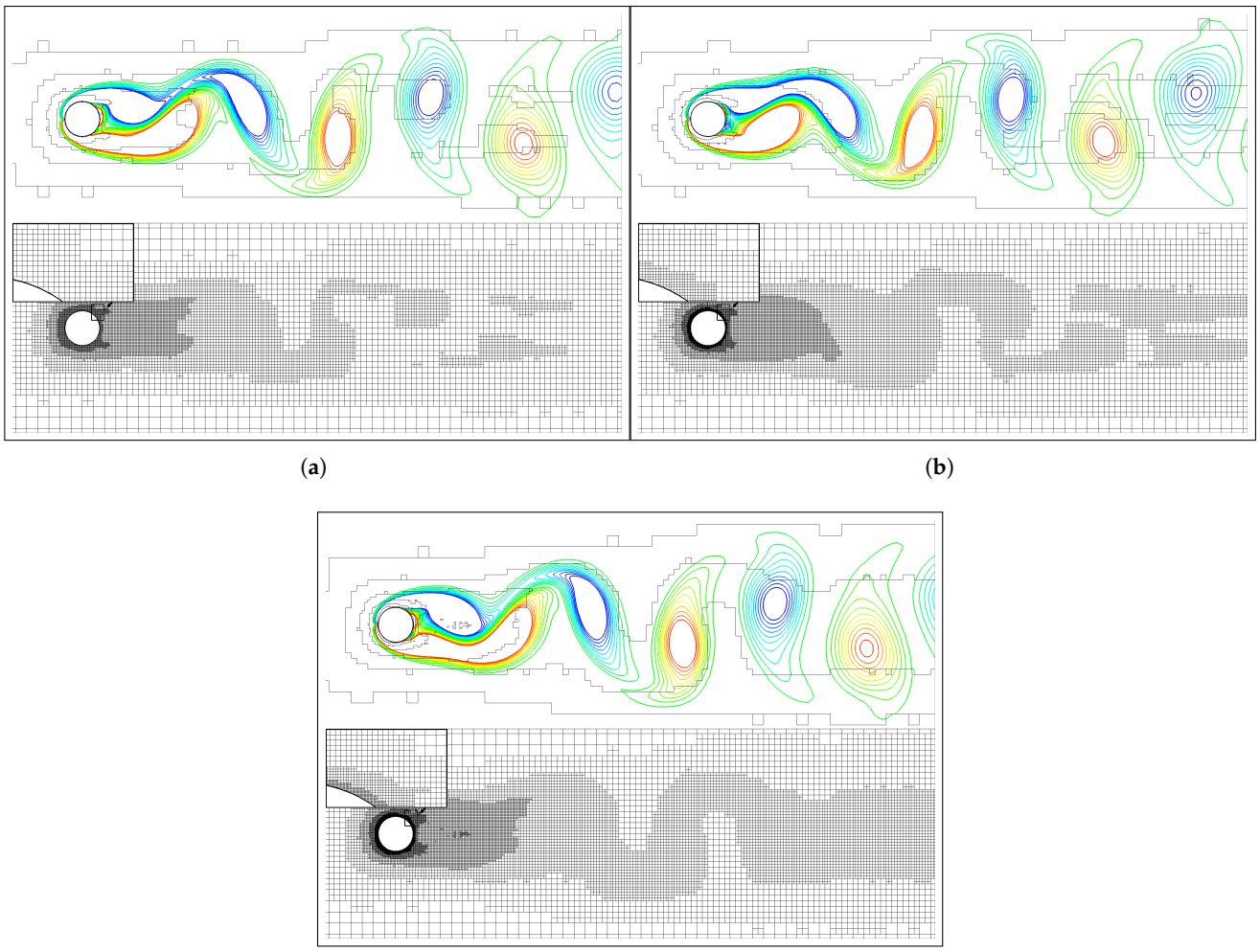


Figure 10. Vorticity contours (from -1 (blue) to 1 (red) U_{ref}/D) and the corresponding grid distributions at $Re = 100$ with different minimum grid spacings ($\Delta x/D$). (**a**) $\Delta x/D = 0.02$. (**b**) $\Delta x/D = 0.01$. (**c**) $\Delta x/D = 0.005$.

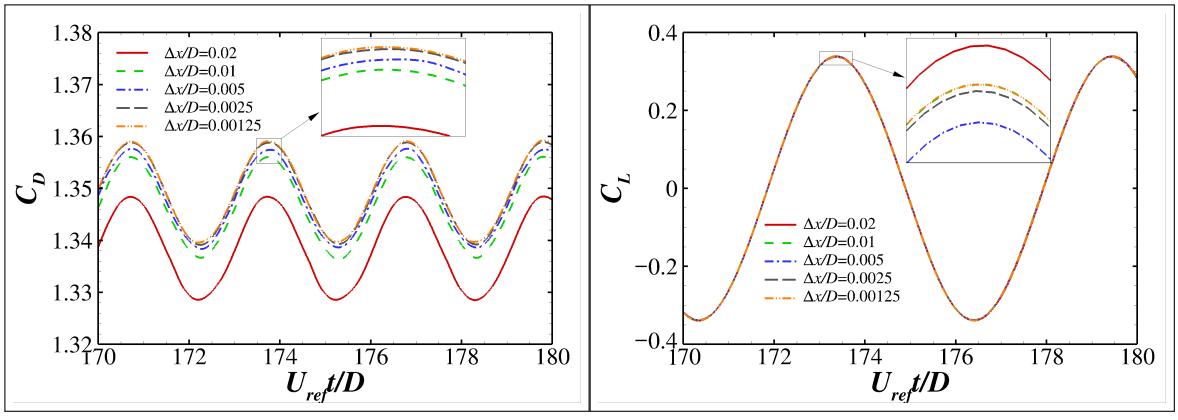


Figure 11. Time histories of the drag (**a**) and lift (**b**) coefficients of a static cylinder at $Re = 100$. Results are shifted within half a vortex shedding period to present in phase.

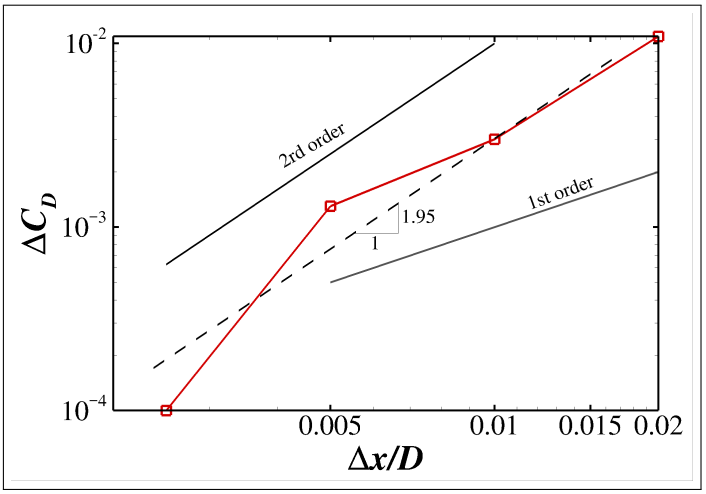


Figure 12. Convergence rate of drag coefficients with decreasing minimum grid spacing. ΔC_D is defined as $|\bar{C}_D - \bar{C}_{D,\Delta x/D=0.00125}|$. The convergence is different from the conventional grid convergence because decreasing Δx only causes local grid refinement in the vicinity of the boundary.

Table 1. Force coefficients of a static cylinder at $Re = 100$. $St = fD/U_{ref}$, $\bar{C}_D$ is the time-averaged drag coefficient, and $C_{D,a}$ and $C_{L,a}$ are the oscillating amplitudes of the drag and lift coefficients, respectively.

Result Source	$\Delta x/D$	St	$\bar{C}_D$	$C_{D,a}$	$C_{L,a}$
Present	0.02	0.165	1.3383	0.01000	0.3389
	0.01	0.165	1.3462	0.00989	0.3382
	0.005	0.165	1.3479	0.00966	0.3375
	0.0025	0.165	1.3491	0.00992	0.3381
	0.00125	0.165	1.3492	0.00993	0.3383
Williamson [41] (Exp.)	-	0.160	-	-	-
Linnick and Fasel [42]	0.01148	0.166	1.34	0.009	0.333
Le et al. [43]	0.00195	0.160	1.37	0.009	0.323
Berthelsen and Faltinsen [44]	0.00781	0.169	1.38	0.010	0.340

Table 2 shows the time consumption. The simulations are efficiently conducted; e.g., the simulation with $\Delta x/D = 0.01$ is finished in about half an hour on an ordinary laptop using one CPU. In particular, the solution-adaptive grid adjustments only account for a small percentage ranging from 0.51% to 0.67% of the total time consumption, indicating that the block boundary-confined solution-adaptive refinement strategy is quite efficient and almost independent of the applied minimum grid spacings.

Table 2. Wall time consumption in simulations of 2D flow over a static cylinder at $Re = 100$. t_w and t_g are the total time consumption and that caused by grid adaptations per dimensionless time unit ($U_{ref}t/D = 1$), respectively.

$\Delta x/D$	$t_g(s)$	$t_w(s)$	t_g/t_w
0.02	0.029	4.35	0.67%
0.01	0.056	10.93	0.51%
0.005	0.17	30.96	0.55%
0.0025	0.52	94.57	0.55%
0.00125	1.72	327.07	0.53%

6.2.2. A 2D Cylinder Oscillating in a Quiescent Flow

To validate and assess the simultaneous grid adaptability for unsteady flow purely induced by moving boundaries in a 2D context, a cylinder oscillating sinusoidally in a quiescent flow is simulated. Following Dütsch et al. [45], the setup with a maximum velocity ($U_{ref} = 2\pi f A$, with f and A being the flapping frequency and amplitude, respectively)-based Reynolds number (Re) of 100 and a Keulegan–Carpenter number ($KC = 2\pi A/D$) of five is considered. The oscillating frequency and amplitude are determined accordingly as $fD/U_{ref} = 0.2$ and $A/D = 0.7958$, respectively. At $t = 0$, the cylinder is in the middle position and moves to the left.

According to Section 6.2.1, the minimum grid spacing $\Delta x/D = 0.01$ together with $U_{ref}\Delta t/D = 0.001$ is associated with well-converged results and thus is used in the current simulation. The maximum grid spacing is $1.28D$, and eight grid blocks are used in total. The far-field boundaries are about $100D$ away from the cylinder, and the simulation is terminated at the end of the 30^{th} oscillating cycle.

Results are shown in Figures 13–15. As shown in Figure 13, the vorticity contours at three representative instants are smoothly resolved with high fidelity, and the dynamical grid refinements are properly distributed, i.e., conforming well to both the flow characteristics and the moving boundary. Meanwhile, the velocity profiles along four vertical lines at $t/T = 1/2$ shown in Figure 14 agree well with the experimental and numerical data reported in Ref. [45]. More details of the resultant drag coefficient (C_D) shown in Figure 15 also compare well with the data reported in Ref. [45]. In addition, as listed in Table 3, by using one CPU on an ordinary laptop, the simulation takes only 8.38 s per dimensionless time unit ($U_{ref}t/D = 1$) on average, while the dynamic grid adaptations account for 5.12% of that.

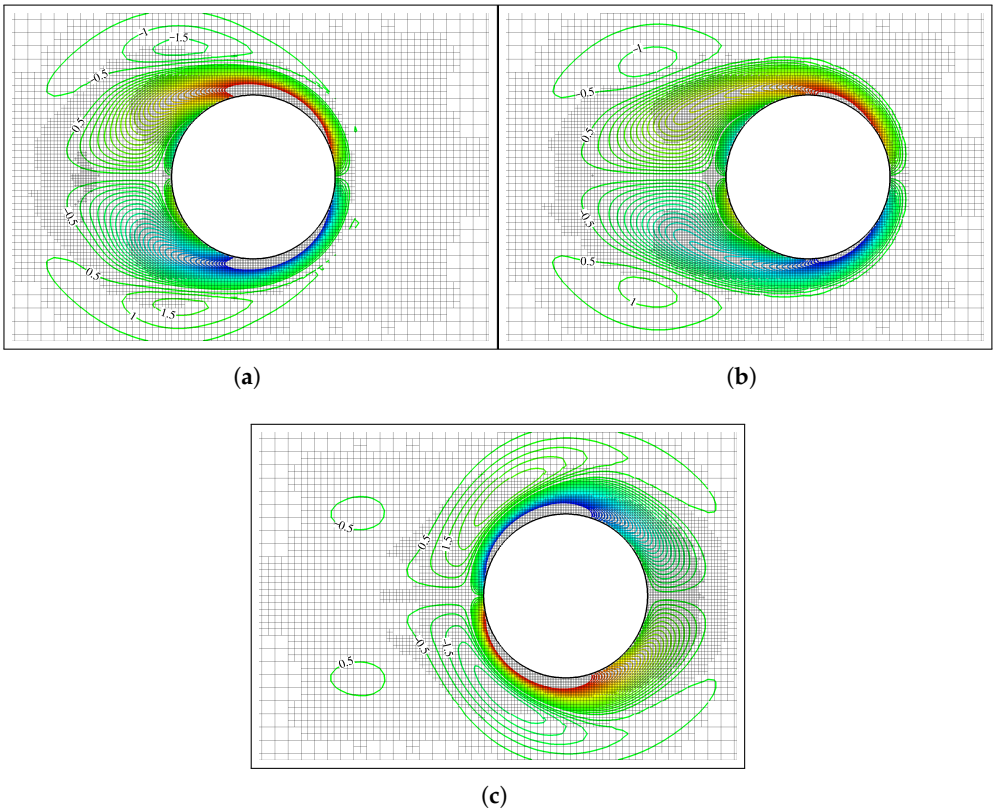
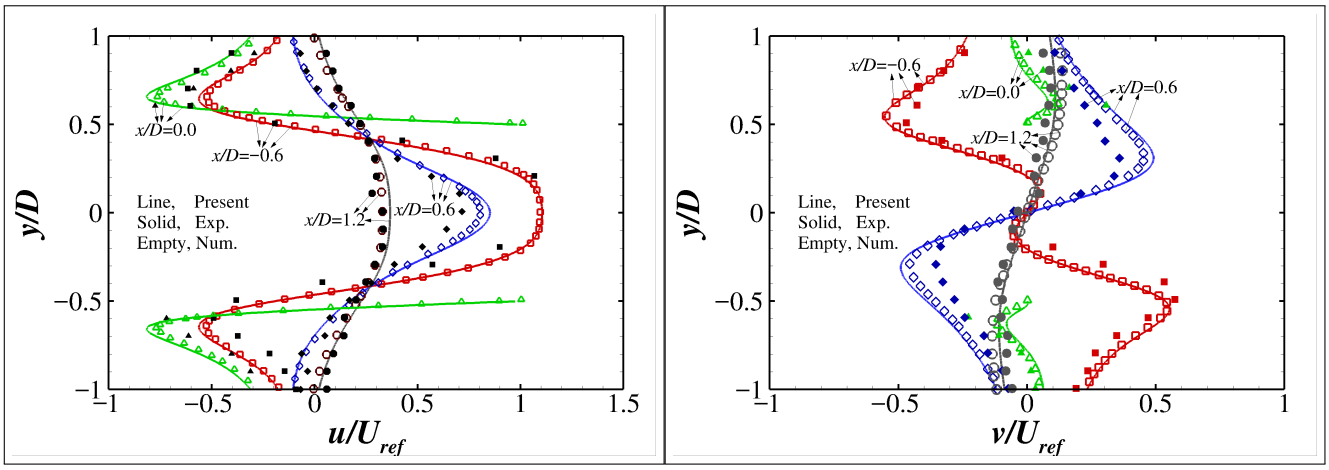


Figure 13. Vorticity contours (from −15 (blue) to 15 (red) U_{ref}/D) and the corresponding adaptive grid distributions of a 2D cylinder oscillating in a quiescent flow. (**a**) $t/T = 6/12$. (**b**) $t/T = 7/12$. (**c**) $t/T = 11/12$.



(**a**) (**b**)

Figure 14. Velocity profiles at $t/T = 1/2$ in the simulation of a 2D cylinder oscillating in a quiescent flow. The results reported in Ref. [45] are included for comparison. (**a**) Horizontal velocity u. (**b**) Vertical velocity v.

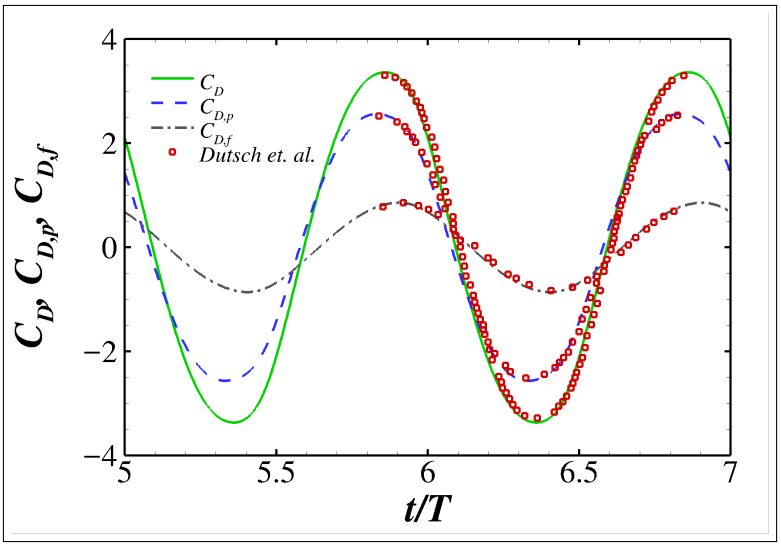


Figure 15. Time histories of the drag coefficient C_D as well as the friction drag coefficient $C_{D,f}$ and pressure drag coefficient $C_{D,p}$ of a 2D cylinder oscillating in a quiescent flow. The numerical results reported in Ref. [45] are included for comparison.

Table 3. Wall time consumption in simulations of 2D flow purely induced by an oscillating cylinder. t_w and t_g are the total time consumption and that caused by grid adaptations per dimensionless time unit ($U_{ref}t/D = 1$), respectively.

t_w(s)	t_g(s)	t_g/t_w
8.38	0.42	5.12%

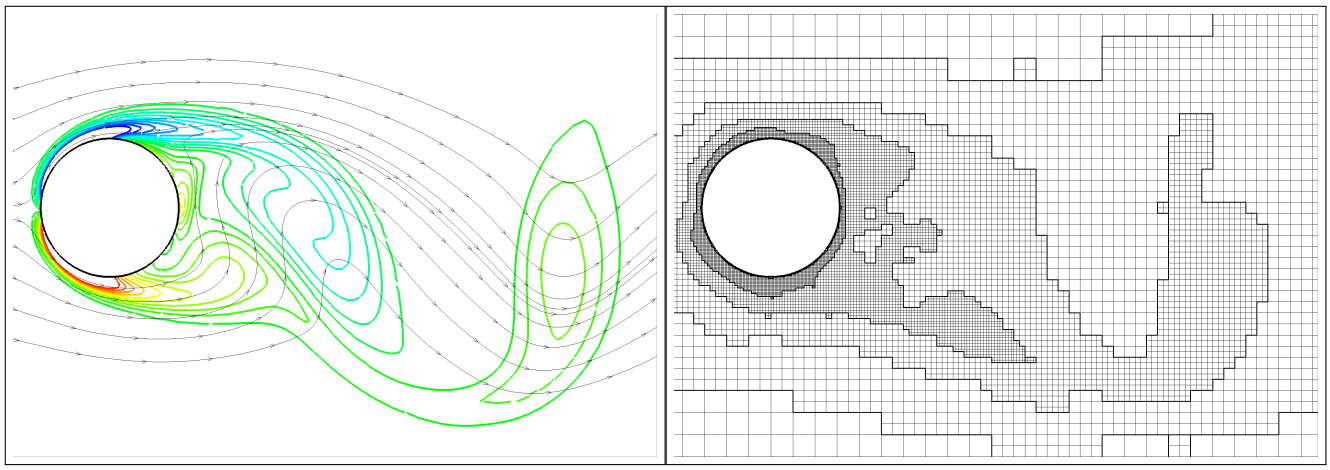
6.2.3. A 2D Cylinder Oscillating in a Uniform Flow

To validate and assess the simultaneous grid adaptability of the proposed method for unsteady flow induced by moving boundaries in an incoming flow, a cylinder oscillating sinusoidally perpendicular to a uniform free stream is simulated. Following Guilmineau and Queutey [46], the setup with $Re = 185$, $A/D = 0.2$, and the frequency ratio f/f_e (with f_e being the natural vortex shedding frequency) varying from 0.8 to 1.2 is considered. At

$t = 0$, the cylinder is in the middle position and moves upward, and thirty oscillation cycles are covered in each simulation.

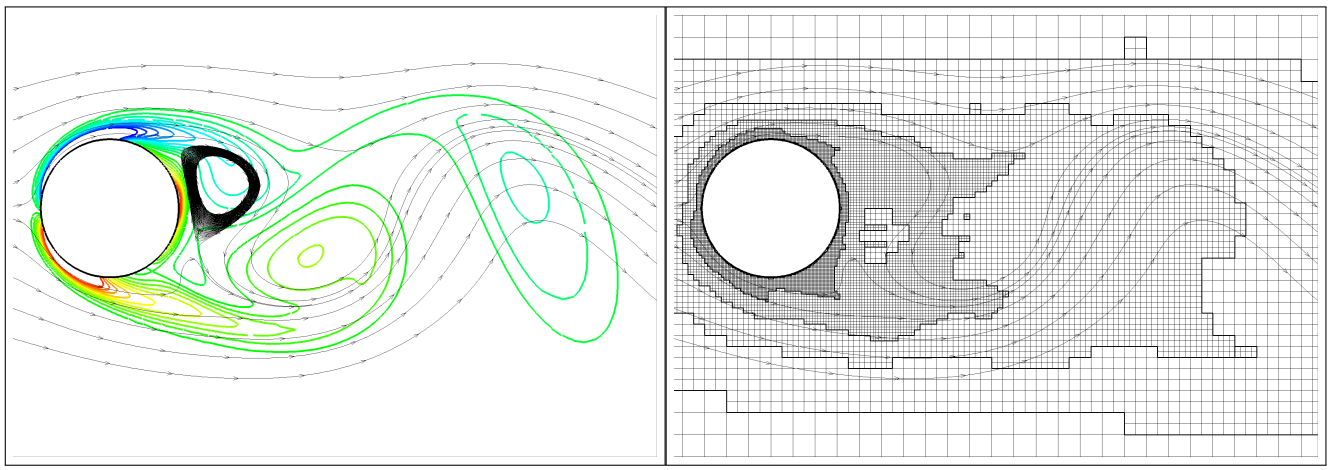
Still, the minimum grid spacing $\Delta x/D = 0.01$ together with $U_{ref}\Delta t/D = 0.001$, the maximum grid spacing $1.28D$, far-field boundaries about $100D$ away from the cylinder and eight grid blocks are adopted in the simulations. By conducting a simulation with $f/f_e = 0$ to $U_{ref}t/D = 180$, f_e is determined as $f_eD/U_{ref} = 0.192$, which is exactly the same as that reported in Ref. [47].

Representatively, Figures 16 and 17 present the vorticity contours and grid distributions at the extreme upper position during the 30^{th} oscillating cycle for $f/f_e = 1.0$ and 1.1, respectively. The vortices are clearly resolved at high fidelity, and the corresponding grid distributions demonstrate effective adaptability for the unsteady flow physics and moving boundaries simultaneously. In particular, the abrupt change in vorticity sign (from negative at $f/f_e = 1.0$ to positive at $f/f_e = 1.1$) in the near wake is well reproduced [46].



(**a**) (**b**)

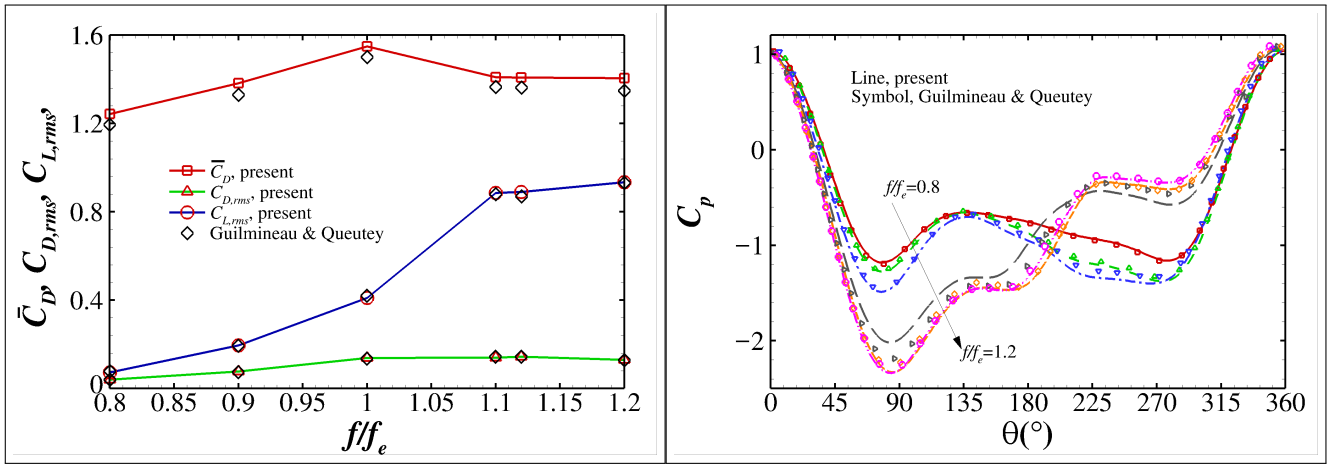
Figure 16. Vorticity contours (from -10 (blue) to 10 (red) U_{ref}/D) and streamlines (**a**) and the corresponding grid distribution (**b**) at the extreme upper position during the 30th oscillating cycle with $f/f_e = 1.0$.



(**a**) (**b**)

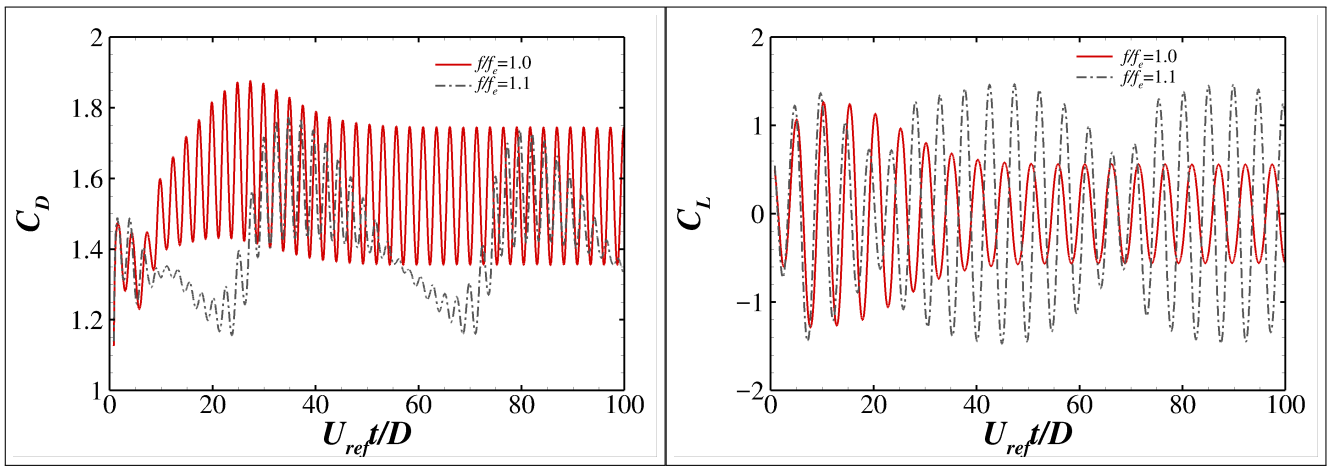
Figure 17. Vorticity contours (from $-10/D$ (blue) to 10 (red) U_{ref}/D) (**a**) and the corresponding grid distribution (**b**) at the extreme upper position during the 30th oscillating cycle with $f/f_e = 1.1$.

Moreover, the resulting drag and lift coefficients as well as the surface pressure coefficient C_p shown in Figure 18 agree well with those reported in Ref. [46]. The observable discrepancy in C_p for $f/f_e \geq 1.1$ can be attributed to the fact that the vortex shedding is no longer a classic single-frequency process, resulting in C_p as well as C_D and C_L at the same position varying from cycle to cycle (see Figure 19a,b for $f/f_e = 1.1$).



(**a**) (**b**)

Figure 18. (**a**) Force coefficients and (**b**) pressure coefficient at the extreme upper positions of a cylinder oscillating in a uniform flow with $f/f_e = 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.12, 1.2$. In (**a**), $\bar{C}_D$ is the time-averaged drag coefficient and $C_{D,rms}$ and $C_{L,rms}$ are the root mean square of the oscillating parts of the drag and lift coefficients, respectively. In (**b**), the lines and the symbols using a same color are associated with a same value of f/f_e.



(**a**) (**b**)

Figure 19. Time histories of (**a**) drag coefficients and (**b**) lift coefficients of a cylinder oscillating in a uniform flow with $f/f_e = 1.0$ and 1.1.

Table 4 presents the averaged time consumption. The simulations are conducted efficiently, similar to the above cases. Grid adaptations with a static boundary (i.e., $f/f_e = 0.0$) account for only 0.59% of the total time consumption, and the percentage with moving boundaries grows to about 3.7%.

Table 4. Wall time consumption in simulations of a 2D cylinder oscillating in a uniform flow. t_w and t_g are the total time consumption and that caused by grid adaptations per dimensionless time unit ($U_{ref}t/D = 1$), respectively.

f/f_e	$t_g(s)$	$t_w(s)$	t_g/t_w
0.0	0.068	11.49	0.59%
0.8	0.28	7.19	3.89%
0.9	0.30	8.08	3.71%
1.0	0.31	8.51	3.64%
1.1	0.32	8.63	3.71%
1.12	0.26	7.31	3.56%
1.2	0.24	6.93	3.46%

6.3. Two-Dimensional Flapping Foils

In order to validate and assess the proposed method in simulating flows induced by generally complex moving boundaries, flapping foils with two different kinds of kinematics, i.e., one generating propulsion and the other extracting power from surrounding flow, are simulated. The flapping motion is prescribed as a pitching motion ($\theta(t)$) leading a heaving motion ($h(t)$) by a phase of $\pi/2$, i.e.,

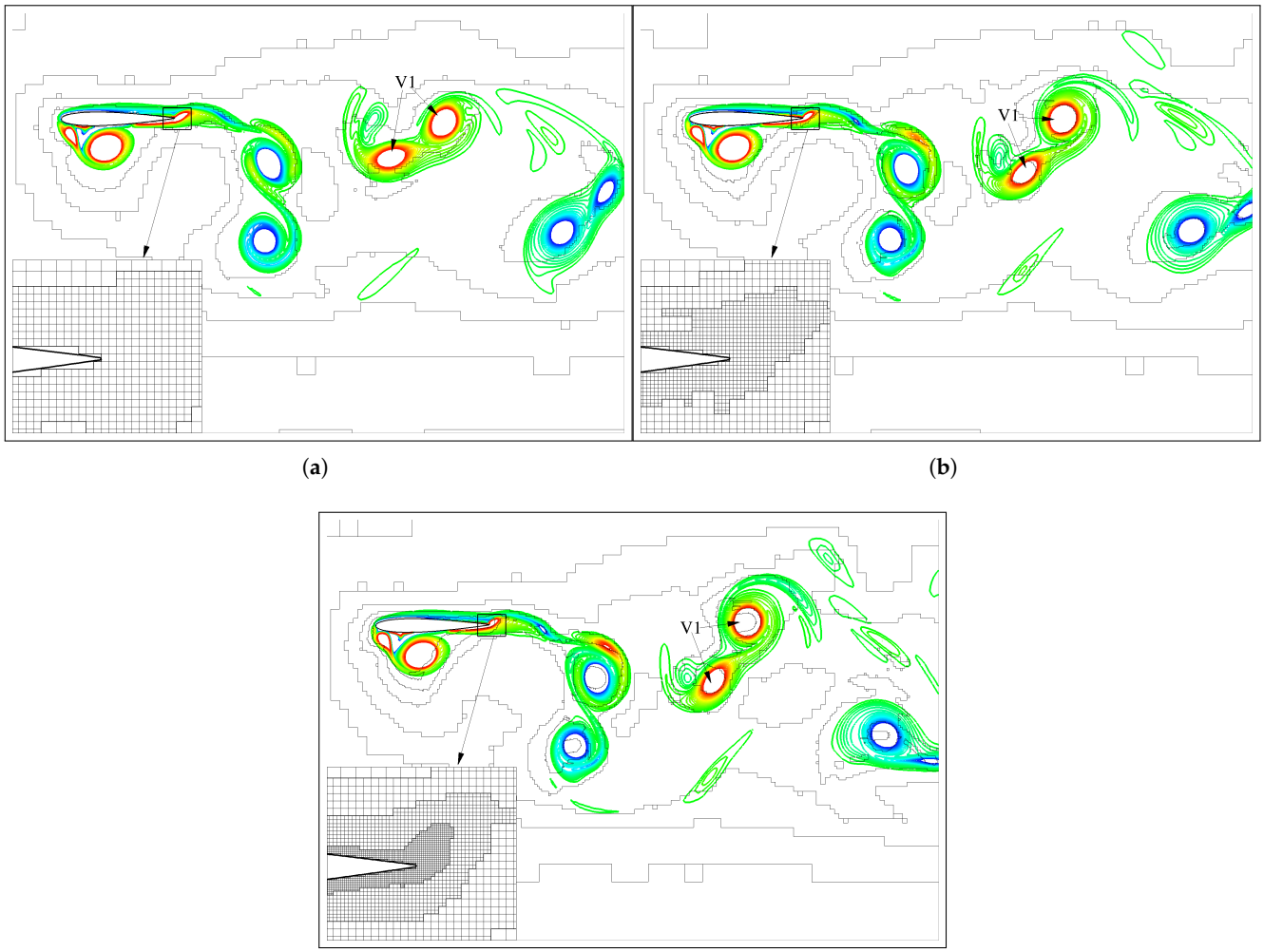
$$h(t) = h_0 \sin(2\pi f t), \theta(t) = \theta_0 \sin(2\pi f + \pi/2) \tag{20}$$

where f is the flapping frequency, c is the chord length, and h_0 and θ_0 are the heaving and pitching amplitudes, respectively. Four minimum grid spacings (i.e., $\Delta x/c = 0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125$) together with four corresponding time steps (i.e., $U_{ref}\Delta t/c = 0.005, 0.0025, 0.00125, 0.000625$) are considered in the simulations. The maximum grid spacing is fixed at $0.64c$, and the far-field boundaries are about $30c$ away from the boundaries. The number of grid blocks varies accordingly from 8 to 12.

6.3.1. Propulsive Flapping NACA0012 at $Re = 1000$

Following Tian et al. [48], a NACA0012 foil generating propulsion by performing sinusoidal heaving and pitching motions simultaneously in a uniform flow at $Re = 1000$ is simulated with $fc/U_{ref} = 0.5$, $h_0 = 0.5c$, and $\theta_0 = 10^\circ$.

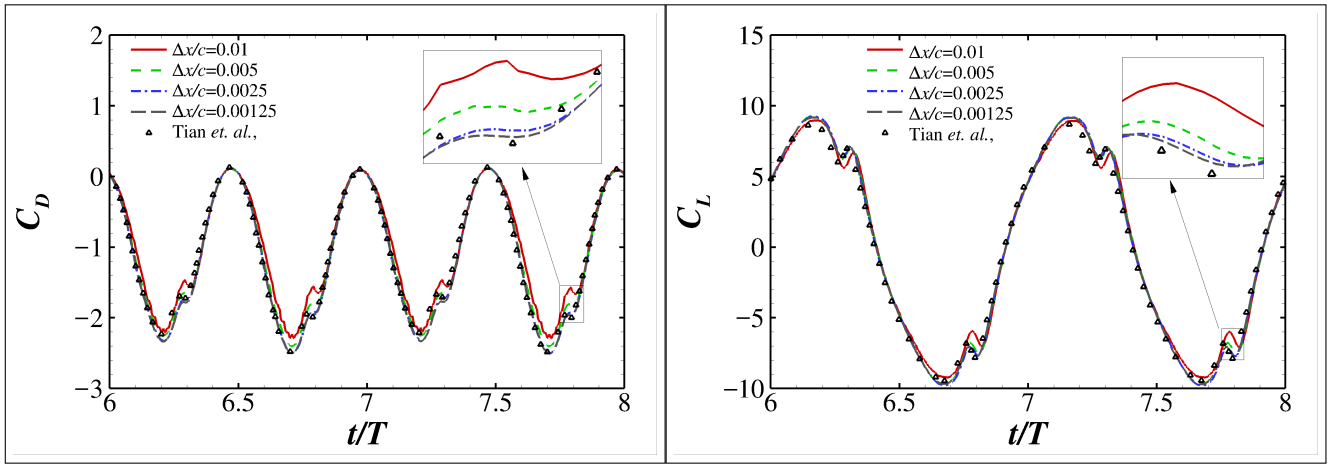
Representatively, Figure 20a–c display the vorticity contours at the extreme upper position for the first three minimum grid spacings. The unsteady flow physics are resolved at high fidelity, with the grid block shapes conforming to these vorticity concentrations and the flapping foil effectively. Noticeably, the refined finest grids are distributed not only along the boundary and but also at the cores of vorticity concentrations (e.g., the vortex V1) and can affect the vortex evolution observably. For example, the orientation of the vortex V1 shown in Figure 20a for $\Delta x/c = 0.01$ is obviously different from that shown in Figure 20b,c for $\Delta x/c = 0.005$ and 0.0025, respectively. Consistently, the resulting drag shown in Figure 21a is not smoothly resolved using $\Delta x/c = 0.01$ but then, together with the lift coefficients shown in Figure 21b, exhibits favorable asymptotic convergence with decreasing minimum grid spacing for $\Delta x/c \leq 0.005$. Moreover, the converged values indicate significant propulsion (negative C_D) generation and agree very well with the data reported in Ref. [48].



(**a**) (**b**)

(**c**)

Figure 20. Vorticity contours (from −20 (blue) to 20 (red) U_{ref}/c) and corresponding grid distributions indicated by the block boundaries at the extreme top position in the simulations of a propulsive flapping foil. (**a**) $\Delta x/c = 0.01$. (**b**) $\Delta x/c = 0.005$. (**c**) $\Delta x/c = 0.0025$.



(**a**) (**b**)

Figure 21. Time histories of the (**a**) drag coefficients and (**b**) lift coefficients of a propulsive flapping NACA0012 foil. The numerical data reported in Ref. [48] are included for comparison.

The averaged time consumption is listed in Table 5. The well-converged results with $\Delta x/c = 0.0025$ can be efficiently simulated at a cost of 24.93 min per flapping cycle using one CPU on an ordinary laptop. Similar to the oscillating cylinder cases in Section 6.2, the time consumption caused by the grid adaptations only accounts for a small fraction (ranging from 1.80% to 2.96%) of the total time consumption.

Table 5. Wall time consumption in simulations of a propulsive flapping NACA0012 foil per flapping cycle. t_w and t_g are the total time consumption and that caused by the dynamic grid adaptations, respectively.

$\Delta x/c$	t_g(min)	t_w(min)	t_g/t_w
0.01	0.094	5.25	1.80%
0.005	0.24	12.52	1.90%
0.0025	0.54	24.93	2.17%
0.00125	1.38	46.60	2.96%

6.3.2. Power Extracting Flapping NACA0015 at $Re = 1100$

Following Kinsey and Dumas [49], a sinusoidally flapping NACA0015 foil extracting power from a uniform free stream at $Re = 1100$ with large heaving and pitching amplitudes, i.e., $h_0/c = 1$, $\theta_0 = 76.3^\circ$ and $fc/U_{ref} = 0.14$, is simulated.

Results are shown in Figures 22 and 23. As shown in Figure 22a–c, the vortices are smoothly resolved, with the adaptive grids effectively refined. Similar to the above flapping NACA0012 foil cases, the refined minimum grids are able to improve the solution fidelity at vortex cores and can affect the vortex evolution observably. For example, due to a relatively coarse grid spacing, the leading edge vortex (LEV) shown in Figure 22 for $\Delta x/c = 0.01$ is observably less concentrated than those shown in Figure 22b,c for $\Delta x/c < 0.01$. The influence to some relatively weak vortices (e.g., V1 and V2 shown in Figure 22) is more apparent. Consistently, the resulting drag and power coefficients shown in Figure 23a,b are not smoothly solved using $\Delta x/D = 0.01$ but then converge favorably with decreasing minimum grid spacing for $\Delta x/c \leq 0.005$. Moreover, the converged values agree well with those reported in Ref. [49].

The averaged time consumption is shown in Table 6. Similar to the above propulsive flapping NACA0012 cases, the well-converged results with $\Delta x/c = 0.0025$ are efficiently simulated at a cost of 27.29 min per flapping cycle using one CPU on an ordinary laptop, and the time cost caused by the grid adaptations only accounts for a small fraction ranging from 2.63% to 3.32% of the total time consumption.

Table 6. Wall time consumption in simulations of an energy-harvesting flapping NACA0015 foil per flapping cycle. t_w and t_g are the total time consumption and that caused by the dynamic grid adaptations, respectively.

$\Delta x/c$	t_g(min)	t_w(min)	t_g/t_w
0.01	0.19	7.10	2.63%
0.005	0.35	12.75	2.72%
0.0025	0.82	27.29	2.99%
0.00125	2.32	69.67	3.32%

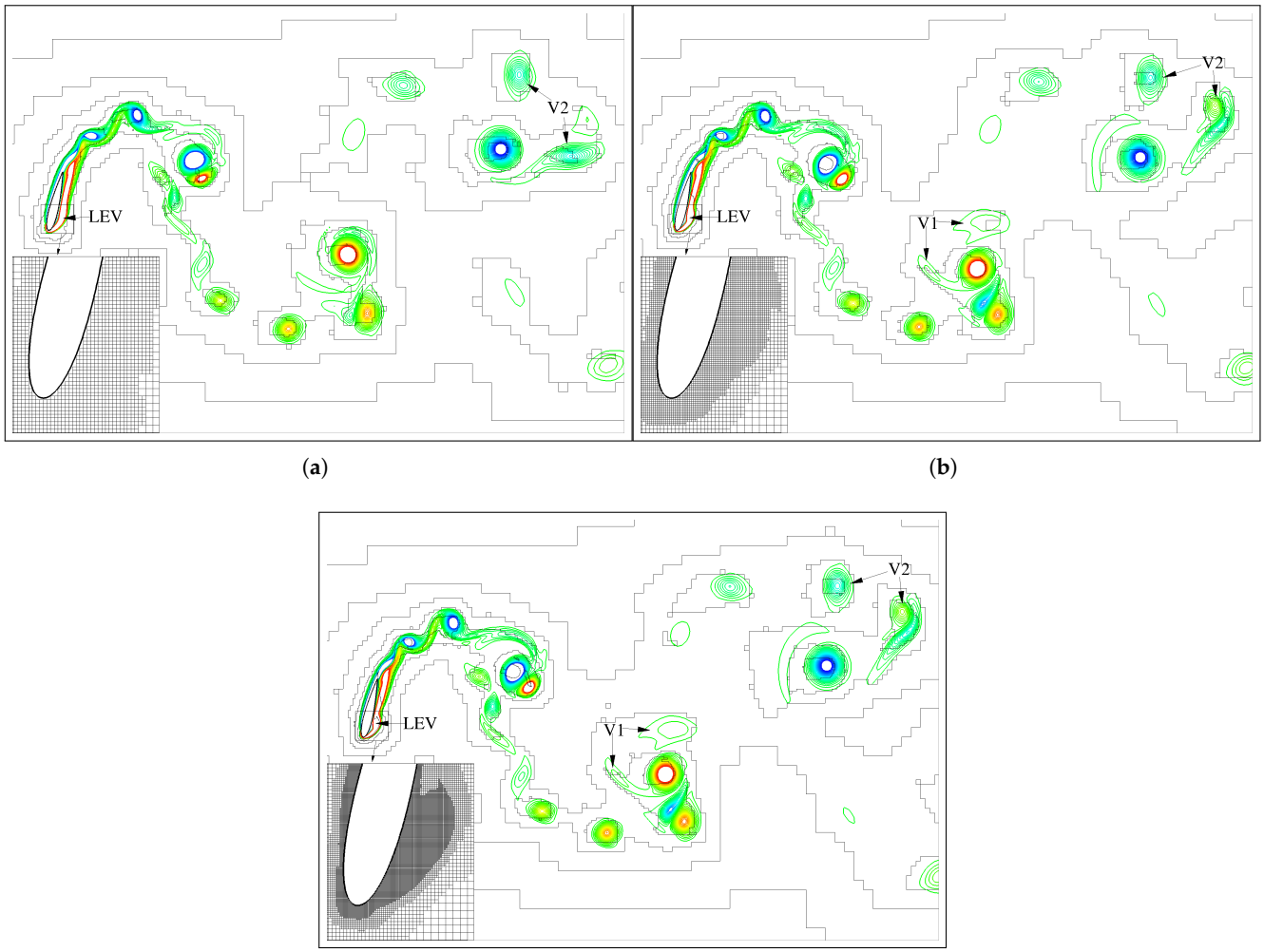


Figure 22. Vorticity contours (from −10 (blue) to 10 (red) U_{ref}/c) and grid distributions indicated by grid block boundaries at the middle position in the simulations of an energy-harvesting flapping foil for three minimum grid spacings. (**a**) $\Delta x/c = 0.01$. (**b**) $\Delta x/c = 0.005$. (**c**) $\Delta x/c = 0.0025$.

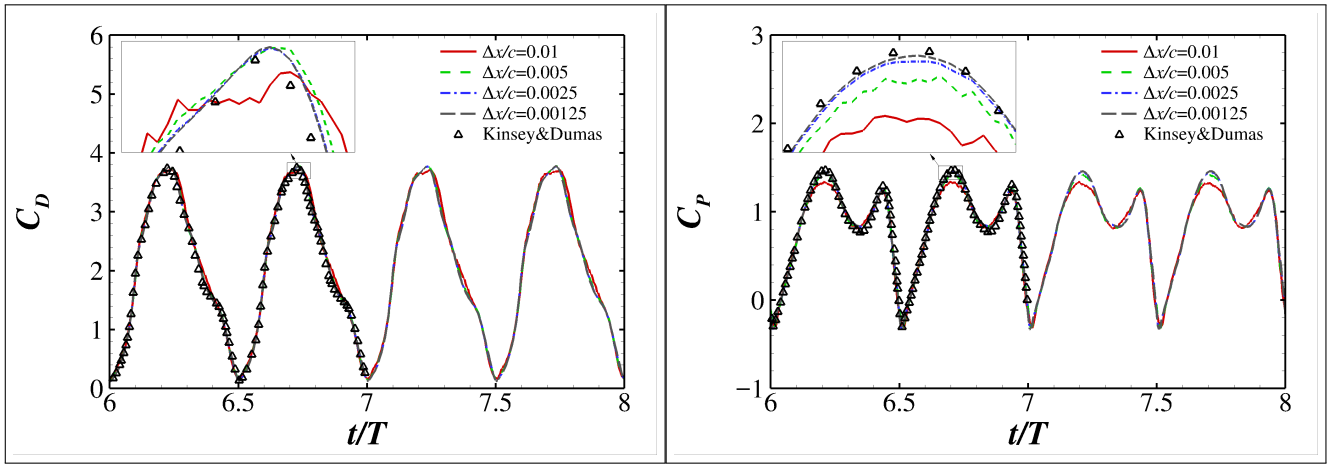


Figure 23. Time histories of (**a**) drag coefficients and (**b**) power coefficients of an energy-harvesting flapping NACA0015 foil. The numerical results reported in Ref. [49] are included for comparison.

6.4. Tandem Flapping Wings of a 3D Hovering Dragonfly

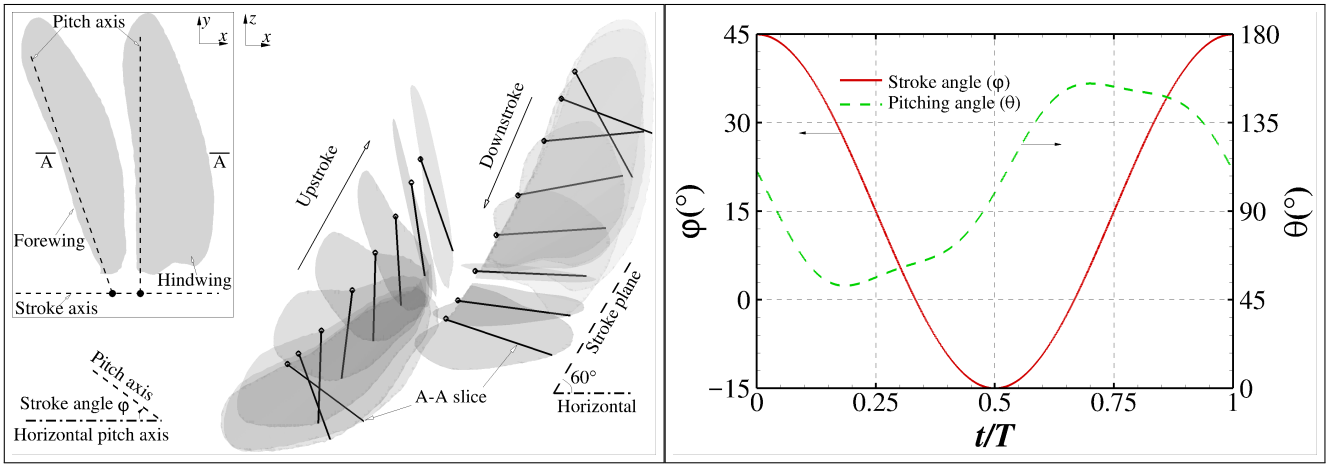
In order to validate and assess the simultaneous grid adaptability of the proposed method for multiscale flow induced by complex moving boundaries in a 3D context, two tandem dragonfly wings flapping in a hovering flight are simulated. The wing geometries [50] (see Figure 24a) and flapping kinematics [51,52] (see Figure 24b) measured from real dragonflies are adopted in the simulations. According to these natural measurements, the wings have spans of about 5 cm and mean chord lengths of about 1 cm and flap at a frequency of 36 Hz within a stroke plane at an angle of 60° to the horizontal plane (see Figure 24a). Moreover, the forewing and the hindwing flap with a phase difference of 180° [51]. As illustrated in Figure 24a,b, both stroke and pitching motions are performed, with kinematics determined as

$$\varphi(t) = 0.5(\varphi_{max} + \varphi_{min}) + 0.5(\varphi_{max} - \varphi_{min})\cos(2\pi f t) \tag{21}$$

and

$$\begin{aligned}\theta(t) =& 105 + 54\cos(2\pi f t + 1.55) \\ &+ 2\cos(4\pi f t + 1.54) + 7\cos(6\pi f t + 0.91),\end{aligned} \tag{22}$$

respectively. A vertical mirrored plane is applied to mimic the potential interaction between wings on different sides of a four-wing dragonfly. The Reynolds number based on the mean chord length ($c = 1$ cm) and the maximum tip velocity ($U_{ref} = 2\pi f \times 5$ cm = 11.31 m/s) is about 4000. Four flapping cycles of a single hindwing and two tandem wings are simulated using a minimum grid spacing of $\Delta x/c = 0.04$ and a corresponding time step of $U_{ref}\Delta t/c = 0.008$. The maximum grid spacing is $1.28c$, and six grid blocks are generated in total. The far-field boundaries are about $30c$ away from the wings. Since the Mach number is $Ma \approx 11.31/340 \approx 0.033 \ll 0.3$ and the ratio in Equation (18) is $5.3 \times 10^{-5} \ll 0.01$, both the weakly compressible flow assumption and the high time resolution assumption are well satisfied, allowing the proposed method to be used.



(**a**) (**b**)

Figure 24. (**a**) Wing geometries and (**b**) flapping kinematics. In (**a**), the wings conduct stroke motion around the stroke axis (aligned with the dragonfly body) and pitching motion around the pitch axis simultaneously. An up-stroking forewing and a down-stroking hindwing are presented, with the leading edge indicated by empty circles. The pitch angle θ is defined as the angle from the stroke plane to a wing plane.

The resulting lift coefficient of the hindwings shown in Figure 25 as a function of time compares well with the experimental data reported in Ref. [52]. Particularly, the maximum values of C_L around $t/T = 1/4$ for both a single hindwing and a hindwing in tandem with a forewingare accurately predicted by the simulations [52]. The most obvious discrepancy occurs during the hindwing supination in a downstroke, and it could be at least partially attributed to the fact that the wing shapes shown in Figure 24 are different from those used in Ref. [52].

The flow characteristics as well as the adaptive grid distributions are shown in Figure 26. As can be seen, due to the effective grid adaptability, the multiscale vortical structures induced by the flapping wings are resolved with high resolutions. In particular, the attached leading edge vortices (LEVs), which are responsible for the high values of maximum C_L around $t/T = 1/4$ shown in Figure 25, as well as their attenuation due to the fore–hindwing interaction, are clearly captured in the simulations.

The averaged time consumption is presented in Table 7. The data show that the proposed method is so efficient that the multiscale flow induced by one and two complex 3D flapping wings could be simulated using 2.5 and 3.63 h per cycle, respectively, using one CPU on an ordinary laptop. This computational time cost is about one order lower than that (55.68 and 67.2 CPU hours) reported in Ref. [7] using a purely geometry-adaptive Cartesian strategy (both the kinematic parameters and the minimum grid spacing are the same). In addition, the grid adaptations only cause a small fraction (2.83% and 3.39% for one and two wings, respectively) of the total time consumption. This is quantitatively consistent with the above 2D cases, indicating that the advantageous efficient grid adaptivity provided by the proposed method is robust and almost independent of the complexities of the simulated problems.

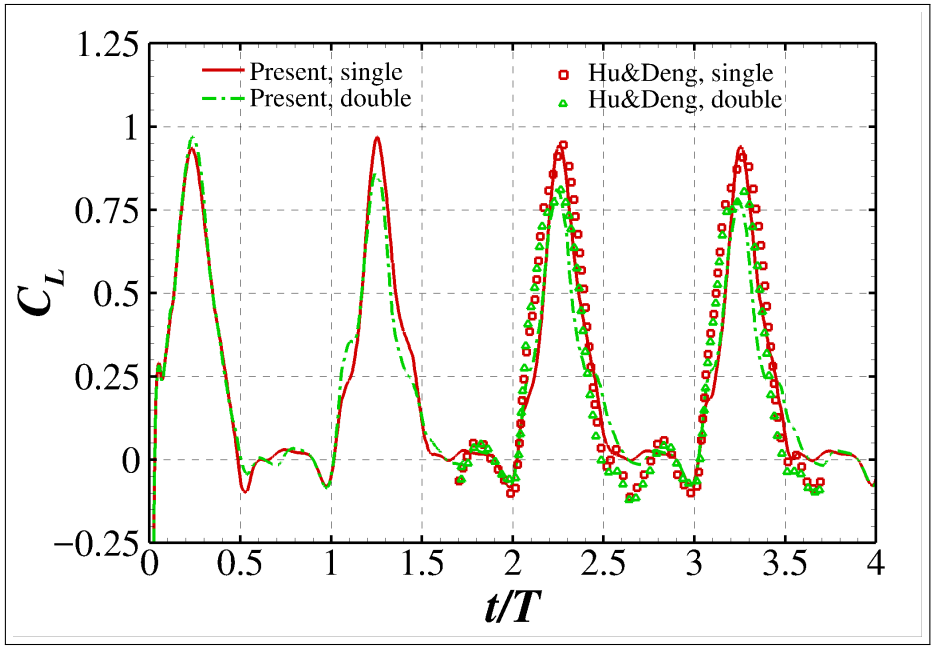
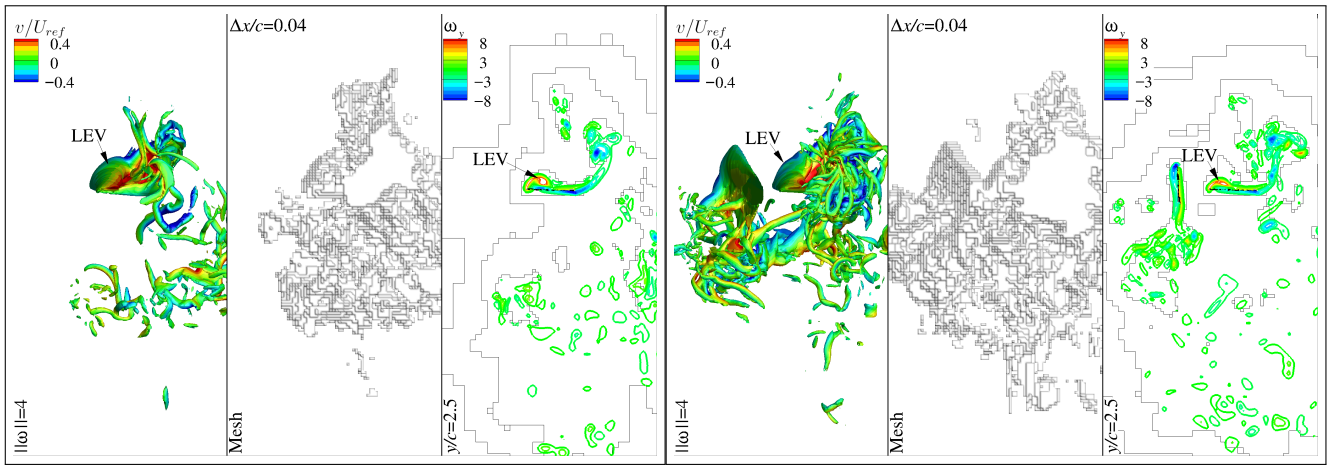


Figure 25. The lift coefficient ($C_L = L/(0.5\rho U_{ref}^2 S)$, with L being the z-component of the resultant force and S being the hindwing area). The experimental results reported in Ref. [52] are included for comparison.



(**a**) (**b**)

Figure 26. Vortical structures (indicated by iso-surfaces of the vorticity magnitude $||\omega||$), adaptive grid distributions, and lateral vortices in the middle-span plane (from left to right in each figure) around the middle of a downstroke of the hindwings. The magnitude ($||\boldsymbol{\omega}||$) and spanwise component (ω_y) of the vorticity are normalized by U_{ref}/c. v/U_{ref} is the normalized spanwise velocity. (**a**) Single hindwing, $t/T = 5/16$. (**b**) Two wings, $t/T = 5/16$.

Table 7. Wall time consumption in simulations of 3D flapping wings of a hovering dragonfly per flapping cycle. t_w and t_g are the total time consumption and that caused by the dynamic grid adaptations, respectively.

Time	$t_g(h)$	$t_w(h)$	t_g/t_w
Single hindwing	0.071	2.51	2.83%
Two wings	0.12	3.63	3.39%

7. Conclusions

In this paper, an effective and efficient adaptive Cartesian grid strategy, featuring simultaneous adaptability for flow solutions and moving boundaries, is proposed. The Cartesian grid system is based on a multi-block structure without grid overlapping between two adjacent blocks or ghost grids in non-fluid areas. The dynamic grid adaptability-related criteria calculations and basic grid operations (e.g., deleting redundant grid nodes and adding new grid nodes) are all restricted to the grid block boundaries. The distinguishing feature not only reduces the complexity of grid adaptation by one dimension, but also provides intrinsic compatibility with moving boundaries. Apart from that, within the weakly compressible flow regime, an improved hybrid IB method is proposed to provide efficient and robust flow information reconstruction for boundary grids (including fresh grids immediately following a moving boundary) by enforcing a physical gradient constraint according to the Navier–Stokes equation. Combined with the well-known recursively regularized lattice Boltzmann method, the proposed advantageous features are finally merged into a CFD solver.

Simulations reproducing various 2D unsteady flows, including those induced by static and oscillating cylinders as well as different kinds of flapping foils, are conducted to validate and assess the proposed method in detail. After that, a representative 3D multiscale flow induced by two tandem flapping wings is simulated for a preliminary validation of the proposed method in a 3D context. Results confirm that the proposed method is adequate to provide efficient simulations of unsteady flows with high fidelity, even if complex moving boundaries are involved. The 3D multiscale flow induced by two tandem flapping wings

of a hovering dragonfly is efficiently simulated using about 3.6 h per flapping cycle using one CPU on an ordinary laptop. The computational time cost is about one order lower than that of a reported Cartesian grid strategy. Meanwhile, the grid adaptive process for flow solutions is shown to account for a small fraction around 0.5% of the total CFD simulations, and the percentage increases to between 1.8% and 5.12% when moving boundaries are involved. In addition, in all the considered 2D flow simulations, the proposed method is able to provide clear asymptotic convergence with decreasing minimum grid spacings.

Conclusively, the proposed method is a pretty promising framework for getting rid of tedious mesh generation tasks and achieving favorable compromises between accuracy and cost for CFD simulations. In the future, more extensive tests on the potential effect of the dynamic grids in simulations of different flow solutions (e.g., acoustics and turbulence) will be conducted to extend the method for more general industrial applications.

Author Contributions: Conceptualization, L.X.; methodology, L.X.; software, L.X.; validation, L.X.; formal analysis, L.X.; investigation, L.X.; resources, Z.G.; data curation, Z.G.; writing—original draft preparation, Z.G.; writing—review and editing, L.X.; visualization, Z.G.; supervision, Y.G.; project administration, Y.G.; funding acquisition, N.Z. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was funded by the National Natural Science Foundation of China, grant number 12302379. Professor Xu also acknowledges the technical support from the Computing Center in Xi'an.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: The original contributions presented in this study are included in the article. Further inquiries can be directed to the corresponding author.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflicts of interest.

Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

CFD	Computational Fluid Dynamics
2D	Two-Dimensional
3D	Three-Dimensional
AMR	Adaptive Mesh Refinement
MRT	Multiple Relaxation Times
RR	Recursively Regularized
IB	Immersed Boundary

References

1. Aidun, C.K.; Clausen, J.R. Lattice-Boltzmann method for complex flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **2010**, *42*, 439–472. [CrossRef]
2. Zarghami, A.; Looije, N.; Van den Akker, H. Assessment of interaction potential in simulating nonisothermal multiphase systems by means of lattice Boltzmann modeling. *Phys. Rev. E* **2015**, *92*, 023307. [CrossRef] [PubMed]
3. Hosseini, S.; Karlin, I. Lattice Boltzmann for non-ideal fluids: Fundamentals and Practice. *Phys. Rep.* **2023**, *1030*, 1–137. [CrossRef]
4. Hosseini, S.A.; Boivin, P.; Thévenin, D.; Karlin, I. Lattice Boltzmann methods for combustion applications. *Prog. Energy Combust. Sci.* **2024**, *102*, 101140. [CrossRef]
5. Sugaya, K.; Imamura, T. Unsteady turbulent flow simulations on moving Cartesian grids using immersed boundary method and high-order scheme. *Comput. Fluids* **2021**, *231*, 105173. [CrossRef]
6. Wang, Y.; Wu, Y.; Zeng, Y.; Jiang, M.; Liu, Z. An immersed boundary lattice Boltzmann method on block-structured adaptive grids for the simulation of particle-laden flows on CPUs/GPUs. *Comput. Phys. Commun.* **2025**, *314*, 109674. [CrossRef]
7. Xu, L.; Tian, F.B.; Young, J.; Lai, J.C. A novel geometry-adaptive Cartesian grid based immersed boundary–lattice Boltzmann method for fluid–structure interactions at moderate and high Reynolds numbers. *J. Comput. Phys.* **2018**, *375*, 22–56. [CrossRef]

8. Cheng, Z.; Wachs, A. An immersed boundary/multi-relaxation time lattice Boltzmann method on adaptive octree grids for the particle-resolved simulation of particle-laden flows. *J. Comput. Phys.* **2022**, *471*, 111669. [CrossRef]
9. Slotnick, J.P.; Khodadoust, A.; Alonso, J.; Darmofal, D.; Gropp, W.; Lurie, E.; Mavriplis, D.J. *CFD Vision 2030 Study: A Path to Revolutionary Computational Aerosciences*; Technical Report NF1676L-18332; Boeing: Arlington, VA, USA; Stanford University, Massachusetts Institute of Technology, National Center for Supercomputing Applications: Stanford, CA, USA; Pratt & Whitney United Technologies Corp.: East Hartford, CT, USA; University of Wyoming, NTRS Research Center: Laramie, WY, USA; Langley Research Center (LaRC): Hampton, VA, USA, 2014.
10. Coirier, W.J.; Powell, K.G. Solution-adaptive Cartesian cell approach for viscous and inviscid flows. *Aiaa J.* **1996**, *34*, 938–945. [CrossRef]
11. English, R.E.; Qiu, L.; Yu, Y.; Fedkiw, R. An adaptive discretization of incompressible flow using a multitude of moving Cartesian grids. *J. Comput. Phys.* **2013**, *254*, 107–154. [CrossRef]
12. Zhang, X.J.; Zhu, Y.S.; Yan, K.; Zhang, Y.Y. New immersed boundary method on the adaptive Cartesian grid applied to the local discontinuous Galerkin method. *Chin. J. Mech. Eng.* **2018**, *31*, 22. [CrossRef]
13. Péron, S.; Benoit, C.; Renaud, T.; Mary, I. An immersed boundary method on Cartesian adaptive grids for the simulation of compressible flows around arbitrary geometries. *Eng. Comput.* **2021**, *37*, 2419–2437. [CrossRef]
14. Meng, S.; Zhou, D.; Yuan, X.; Li, X.; Chen, H.; Bi, L. Enhanced strategy for adaptive Cartesian grid generation with arbitrarily complex 3D geometry. *Adv. Eng. Softw.* **2022**, *174*, 103304. [CrossRef]
15. Qi, X.; Wang, Z.; Zhu, J.; Tian, L.; Zhao, N. High-order discontinuous Galerkin method with immersed boundary treatment for compressible flows on parallel adaptive Cartesian grids. *Phys. Fluids* **2024**, *36*, 116139. [CrossRef]
16. Filippova, O.; Hänel, D. Grid refinement for lattice-BGK models. *J. Comput. Phys.* **1998**, *147*, 219–228. [CrossRef]
17. Valero-Lara, P.; Jansson, J. A non-uniform staggered Cartesian grid approach for lattice-Boltzmann method. *Procedia Comput. Sci.* **2015**, *51*, 296–305. [CrossRef]
18. Luo, C.; Bi, L.; Meng, S.; Gao, H.; Yuan, X.; Tang, Z. A novel algorithm for fluid dynamics simulation with cell-adaptive Cartesian grids and immersed boundary method. *Phys. Fluids* **2025**, *37*, 046122. [CrossRef]
19. Lauricella, M.; Tiribocchi, A.; Succi, S.; Brandt, L.; Mukherjee, A.; La Rocca, M.; Montessori, A. Thread-safe multiphase lattice Boltzmann model for droplet and bubble dynamics at high density and viscosity contrasts. *Phys. Fluids* **2025**, *37*, 072111. [CrossRef]
20. Qi, X.; Yang, Y.; Tian, L.; Wang, Z.; Zhao, N. A parallel methodology of adaptive Cartesian grid for compressible flow simulations. *Adv. Aerodyn.* **2022**, *4*, 21. [CrossRef]
21. Johnson, A.; Tezduyar, T. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **1994**, *119*, 73–94. [CrossRef]
22. Bonfiglioli, A.; Paciorri, R.; Di Mascio, A. The role of mesh generation, adaptation, and refinement on the computation of flows featuring strong shocks. *Model. Simul. Eng.* **2012**, *2012*, 631276. [CrossRef]
23. Peskin, C.S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *J. Comput. Phys.* **1972**, *10*, 252–271. [CrossRef]
24. Coreixas, C.; Wissocq, G.; Puigt, G.; Boussuge, J.F.; Sagaut, P. Recursive regularization step for high-order lattice Boltzmann methods. *Phys. Rev. E* **2017**, *96*, 033306. [CrossRef]
25. Qian, Y.H.; D'Humières, D.; Lallemand, P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys. Lett. (EPL)* **1992**, *17*, 479–484. [CrossRef]
26. Lallemand, P.; Luo, L.S. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. *Phys. Rev. E* **2000**, *61*, 6546–6562. [CrossRef]
27. Xu, L.; Yu, X.; Regenauer-Lieb, K. An immersed boundary-lattice Boltzmann method for gaseous slip flow. *Phys. Fluids* **2020**, *32*, 012002. [CrossRef]
28. Bhatnagar, P.L.; Gross, E.P.; Krook, M. A model for collision processes in gases. I. Small mmplitude processes in charged and neutral one–component systems. *Phys. Rev.* **1954**, *94*, 511–525. [CrossRef]
29. d'Humières, D. Multiple–relaxation–time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Eng. Sci.* **2002**, *360*, 437–451. [CrossRef]
30. Malaspinas, O. Increasing stability and accuracy of the lattice Boltzmann scheme: Recursivity and regularization. *arXiv* **2015**. [CrossRef]
31. Mattila, K.K.; Philippi, P.C.; Hegele, L.A. High-order regularization in lattice-Boltzmann equations. *Phys. Fluids* **2017**, *29*, 046103. [CrossRef]
32. Jacob, J.; Malaspinas, O.; Sagaut, P. A new hybrid recursive regularised Bhatnagar–Gross–Krook collision model for lattice Boltzmann method-based large eddy simulation. *J. Turbul.* **2018**, *19*, 1051–1076. [CrossRef]
33. Feng, Y.; Boivin, P.; Jacob, J.; Sagaut, P. Hybrid recursive regularized thermal lattice Boltzmann model for high subsonic compressible flows. *J. Comput. Phys.* **2019**, *394*, 82–99. [CrossRef]

34. Sotiropoulos, F.; Yang, X. Immersed boundary methods for simulating fluid–structure interaction. *Prog. Aerosp. Sci.* **2014**, *65*, 1–21. [CrossRef]
35. Clarke, D.K.; Salas, M.D.; Hassan, H.A. Euler calculations for multielement airfoils using Cartesian grids. *AIAA J.* **1986**, *24*, 353–358. [CrossRef]
36. Meyer, M.; Devesa, A.; Hickel, S.; Hu, X.; Adams, N. A conservative immersed interface method for Large-Eddy Simulation of incompressible flows. *J. Comput. Phys.* **2010**, *229*, 6300–6317. [CrossRef]
37. Fadlun, E.; Verzicco, R.; Orlandi, P.; Mohd-Yusof, J. Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. *J. Comput. Phys.* **2000**, *161*, 35–60. [CrossRef]
38. Seo, J.H.; Mittal, R. A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations. *J. Comput. Phys.* **2011**, *230*, 7347–7363. [CrossRef]
39. Li, C.G.; Bale, R.; Wang, W.; Tsubokura, M. A sharp interface immersed boundary method for thin-walled geometries in viscous compressible flows. *Int. J. Mech. Sci.* **2023**, *253*, 108401. [CrossRef]
40. Capizzano, F.; Cinquegrana, D. Applying a Cartesian method to moving boundaries. *Comput. Fluids* **2023**, *263*, 105968. [CrossRef]
41. Williamson, C.H.K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **1989**, *206*, 579–627. [CrossRef]
42. Linnick, M.N.; Fasel, H.F. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *J. Comput. Phys.* **2005**, *204*, 157–192. [CrossRef]
43. Le, D.; Khoo, B.; Peraire, J. An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries. *J. Comput. Phys.* **2006**, *220*, 109–138. [CrossRef]
44. Berthelsen, P.A.; Faltinsen, O.M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *J. Comput. Phys.* **2008**, *227*, 4354–4397. [CrossRef]
45. Dütsch, H.; Durst, F.; Becker, S.; Lienhart, H. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan–Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.* **1998**, *360*, 249–271. [CrossRef]
46. Guilmineau, E.; Queutey, P. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder. *J. Fluids Struct.* **2002**, *16*, 773–794. [CrossRef]
47. Lu, X.Y.; Dalton, C. Calculation of the timing of vortex formation from an oscillating cylinder. *J. Fluids Struct.* **1996**, *10*, 527–541. [CrossRef]
48. Tian, F.B.; Wang, Y.; Young, J.; Lai, J.C.S. An FSI solution technique based on the DSD/SST method and its applications. *Math. Model. Methods Appl. Sci.* **2015**, *25*, 2257–2285. [CrossRef]
49. Kinsey, T.; Dumas, G. Parametric study of an oscillating airfoil in a power-extraction regime. *AIAA J.* **2008**, *46*, 1318–1330. [CrossRef]
50. Norberg, R. The pterostigma of insect wings an inertial regulator of wing pitch. *J. Comp. Physiol.* **1972**, *81*, 9–22. [CrossRef]
51. Norberg, R. Hovering flight of the dragonfly Aeschna Juncea L., kinematics and aerodynamics. In *Swimming and Flying in Nature*; Wu, T.Y.T., Brokaw, C.J., Brennen, C., Eds.; Springer: Boston, MA, USA, 1975; pp. 763–781.
52. Hu, Z.; Deng, X.Y. Aerodynamic interaction between forewing and hindwing of a hovering dragonfly. *Acta Mech. Sin.* **2014**, *30*, 787–799. [CrossRef]

Disclaimer/Publisher's Note: The statements, opinions and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of MDPI and/or the editor(s). MDPI and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions or products referred to in the content.

基于四边形网格的等角网与计算设计[1]

王慧，谭永祥

西安交通大学，西安 710049



图 1 基于离散等角网在同一自由曲面上由不同参数 t 构造得到的两种棋盘格图案：数值结果及实物模型。上排对应参数 t=0.412485，图案由黄色和绿色的相似平行四边形构成；下排对应参数 t=0.5，图案由相似菱形构成，其中一半菱形替换为其最小面积外接椭圆。所有构件均通过图示连接环相连。两种图案均保持基本构件的相似性，实物模型与数值结果吻合。

摘 要：本文提出一种基于四边形网格的离散等角网框架，通过在四边形网格各面构造内接平行四边形并形成棋盘格图案，分别控制这些平行四边形的角度、相似性或全等性，得到作用于对角网格或控制网格上的三类等角网：DI_{diag}-net、DIS_{diag}-net 和 DIC_{diag}-net。三类网格均具有简单、显式的几何表示，并适用于高效计算与数值优化。本文还通过壳体结构上的图案设计和交互式剪纸模型展示其计算设计能力，并利用相似构件完成实物模型制作。

关键词：等角网；棋盘格图案；四边形网格；可展曲面；共形映射；计算设计与制造；离散微分几何

1 研究背景与方法概述

具有恒定交角的网格曲线广泛应用于几何建模、图可视化、机械结构和建筑设计等领域[1, 2, 3]。相较于要求两族网格曲线处处正交的正交网，等角网仅要求两族多边线以相同但不必为 90º的夹角相交，从而在保持交角相同的同时提供更大的设计自由度。现有离散等角网表示与构造的研究仍较少，已有方法多直接通过夹角或顶点星关系刻画等角性，存在几何表征不够简洁、约束非线性较强及计算效率受限等问题。因此，如何利用简单、显式且易于优化的几何量表征并高效构造离散等角网，是本文核心问题。本文基于四边形网格提取的棋盘格图案(CBP)[4]及内接平行四边形的形状约束，研究三类离散等角网，结合光滑与离散微分几何分析其几何性质，并给出显式表示、计算构造、优化设计及数字化制造方法。

给定一个四边形面 $Q=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$，在其四条边上按照统一参数 t 放置滑动点：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_2\\ \mathbf{p}_3\\ \mathbf{p}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1-t & 0 & 0\\ 0 & 1-t & t & 0\\ 0 & 0 & t & 1-t\\ t & 0 & 0 & 1-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\\ \mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_4\end{bmatrix}, \qquad t\in[0,1]. \tag{1}$$

[1] Hui Wang and Yongxiang Tan, Quad-mesh based isogonal nets and computational design, conditionally accepted by *ACM Transactions on Graphics* (Proceedings of SIGGRAPH Asia 2026).

由此形成 t-平行四边形；当 t=0.5 时，该构造退化为经典的中点细分平行四边形[4,5]。其共轭 $\bar{t}$-平行四边形采用相反的比例次序 $(t,1-t,t,1-t)$。两类平行四边形的两组对边始终分别平行于原四边形的两条对角线，因此其内角与控制四边形两条对角线之间的夹角直接对应。

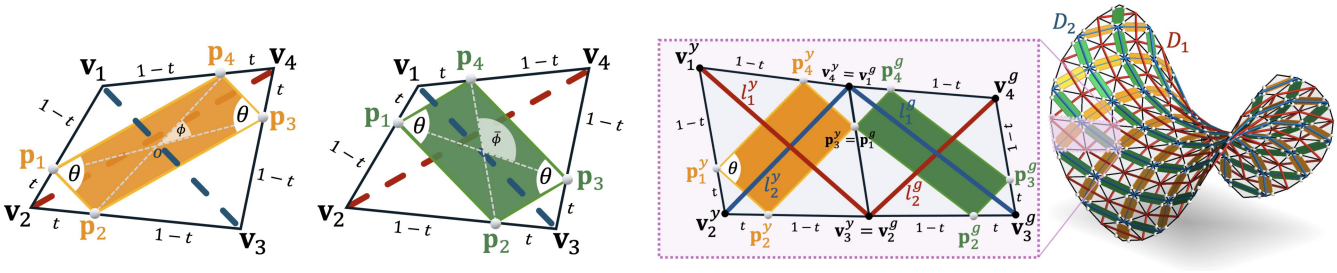


图 2　(a) t-平行四边形(黄色)和 $\bar{t}$-平行四边形(绿色)；　(b) 控制网(黑色)、对角网 D_1(红色)、对角网 D_2(蓝色)。

对于一个控制四边形网格，其两族对角线分别形成两族对角网格 D_1 和 D_2。在控制四边形网格的各个四边形面上按同一参数 t 构造 t-平行四边形和 $\bar{t}$-平行四边形后，形成一族可写为 $tD_1+(1-t)D_2$，$t\in[0,1]$ 且由$(t,\bar{t})$-平行四边形构成的 CBP。通过逐步加强这些平行四边形的局部几何条件，得到三类网格：DI_{diag}-net 的对角网为等角网；DIS_{diag}-net 的控制网为正交网、对角网为等角网；DIC_{diag}-net 对应离散可展曲面。

2 三类离散等角网的构造

2.1 DI_{diag}-net：具有相同对角线夹角的四边形网格

当四边形网格中所有的 t 和 $\bar{t}$-平行四边形具有相同内角 θ 时，控制四边形的两条对角线夹角恒定，其对角网格因而构成等角网[3,6]；本文将该类四边形网格定义为 DI_{diag}-net。其几何表示为

$$\frac{(\mathbf{v}_3^f-\mathbf{v}_1^f)\cdot(\mathbf{v}_4^f-\mathbf{v}_2^f)}{\|\mathbf{v}_3^f-\mathbf{v}_1^f\|\,\|\mathbf{v}_4^f-\mathbf{v}_2^f\|}=\cos\theta,\qquad \forall f. \tag{2}$$

固定该等角条件后，改变参数 t 可得到具有不同 t 和 $\bar{t}$-平行四边形形状的 CBP。

2.2 DIS_{diag}-net：具有相似 $(t,\bar{t})$-平行四边形的四边形网格

在 DI_{diag}-net 的相同内角条件基础上，进一步要求所有的 t-和 $\bar{t}$-平行四边形相似，得到 DIS_{diag}-net；这区别于 t=0.5 时同向相似的中点细分平行四边形[7]。理论分析与数值验证表明，此时控制网格为正交网，对角网格为等角网。设黄色和绿色两类交替平行四边形所在面的两条对角线长度分别为 l_1^y, l_2^y 和 l_1^g, l_2^g，则相似性由式(2)与下式共同刻画：

$$\frac{l_2^y}{l_1^y}=\frac{l_1^g}{l_2^g}, \tag{3}$$

该对角线长度比条件与 t 无关，因此改变参数 t 可得到不同相似形状的 t-和 $\bar{t}$-平行四边形的 CBP。

2.3 DIC_{diag}-net：具有全等 $(t,\bar{t})$-平行四边形的四边形网格

在 $\mathrm{DIS}_{\mathrm{diag}}$-net 的相似性条件基础上，进一步要求四边形网格中所有 t-和 $\bar{t}$-平行四边形保持全等，得到 $\mathrm{DIC}_{\mathrm{diag}}$-net。此时角度、形状比例及对应边长均一致，其局部条件可通过交替固定控制四边形的两条对角线长度及其点积表示：

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}_3^y - \mathbf{v}_1^y\| = c_1, & \|\mathbf{v}_4^y - \mathbf{v}_2^y\| = c_2, \\ \|\mathbf{v}_3^g - \mathbf{v}_1^g\| = c_2, & \|\mathbf{v}_4^g - \mathbf{v}_2^g\| = c_1, \\ (\mathbf{v}_3^f - \mathbf{v}_1^f)\cdot(\mathbf{v}_4^f - \mathbf{v}_2^f) = c_3, & \forall f, \\ c_3 = c_1 c_2 \cos\theta, & \forall f. \end{cases} \tag{4}$$

$\mathrm{DIC}_{\mathrm{diag}}$-net 在整个网格上保持对应平行四边形全等，对角网格满足离散切比雪夫条件，因而构成离散等角切比雪夫网。根据离散微分几何分析，该类网格对应离散可展曲面，并可进一步得到相应的平面展开。

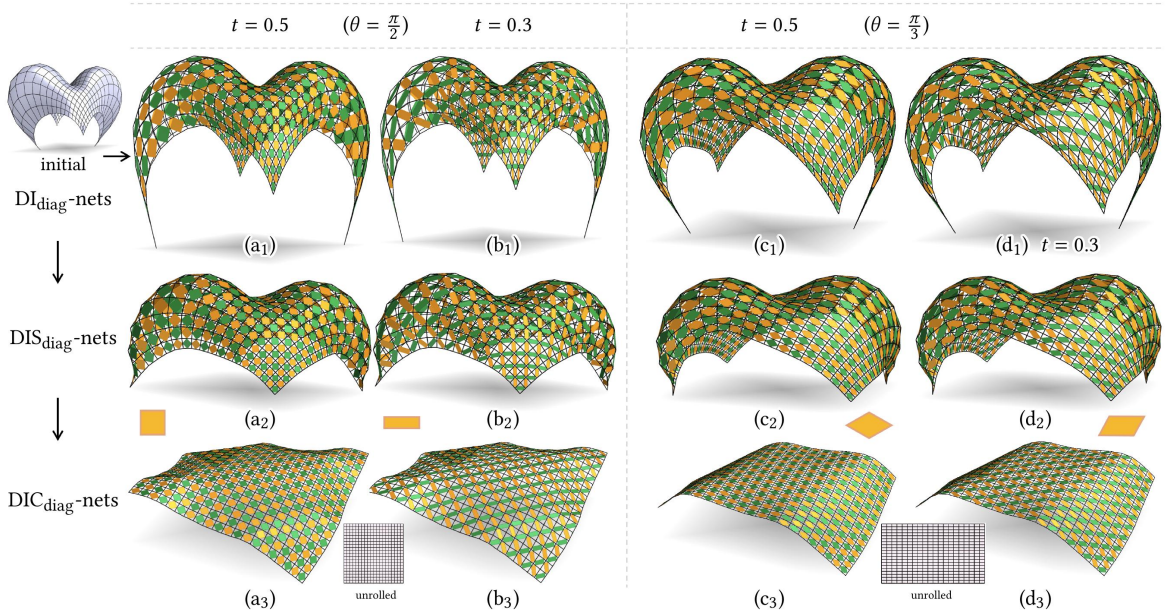


图 3 逐步优化得到的三类离散等角网及其 $(t,\bar{t})$-平行四边形。三行分别对应 $\mathrm{DI}_{\mathrm{diag}}$-net、$\mathrm{DIS}_{\mathrm{diag}}$-net 和 $\mathrm{DIC}_{\mathrm{diag}}$-net，各列展示不同参数 t 与目标角度 θ 下的构造结果；$\mathrm{DIC}_{\mathrm{diag}}$-net 同时给出可展曲面的相应平面展开。

3 几何约束与优化

由于三类网格的几何表示均为显式形式，且以顶点位置为核心变量时约束方程至多为二次形式，因此本文采用基于 *Gauss–Newton* 方法的 *Guided Projection* 算法[8]进行优化。对于输入的四边形网格，分别将 $\mathrm{DI}_{\mathrm{diag}}$-net、$\mathrm{DIS}_{\mathrm{diag}}$-net 和 $\mathrm{DIC}_{\mathrm{diag}}$-net 的几何条件写成对应能量项 E_{DI}、E_{DIS} 和 E_{DIC}，并与目标角度、光顺性、高斯像及具体设计中的附加约束组合求解。优化总目标为

$$E = E_{\square} + E_{*} + \omega_{\theta} E_{\theta} + \omega_{\mathrm{vf}} E_{\mathrm{Vfair}} + \omega_{\mathrm{nf}} E_{\mathrm{Nfair}}, \tag{5}$$

其中，$E_{\square}$根据目标网格类型分别表示 $\mathrm{DI}_{\mathrm{diag}}$-net、$\mathrm{DIS}_{\mathrm{diag}}$-net 或 $\mathrm{DIC}_{\mathrm{diag}}$-net 的核心几何能量；$E_{\theta}$为目标角度能量，$E_{Vfair}$ 和 E_{Nfair}分别为光顺能量与高斯像能量，E_{*}表示具体设计中的附加约束；ω_{θ}、ω_{vf} 和 ω_{nf} 为相应权重。

4 计算设计与实物模型

具有相似平行四边形几何特征的 DIS_{diag}-net 可用于诸多计算设计。如图 4 所示：(a) 相似平行四边形面板可承载同类雕刻图案，并在灯罩设计中形成规则阴影；(b-c) 对于含奇异点的四边形网格，相似平行四边形面板仍可在建筑曲面上形成规整纹理；(d-e) 相似平行四边形可以形成相似椭圆铺装，并用于自由网壳结构上的图案设计。进一步结合平面四边形或平面顶点星约束，可分别构造(f) 主曲率网壳结构与 (g) 极小网壳结构。具有全等平行四边形几何特征的 DIC_{diag}-net 则可用于(h) 剪纸模型的交互式编辑仿真模拟，数值结果与纸质模型保持良好一致。

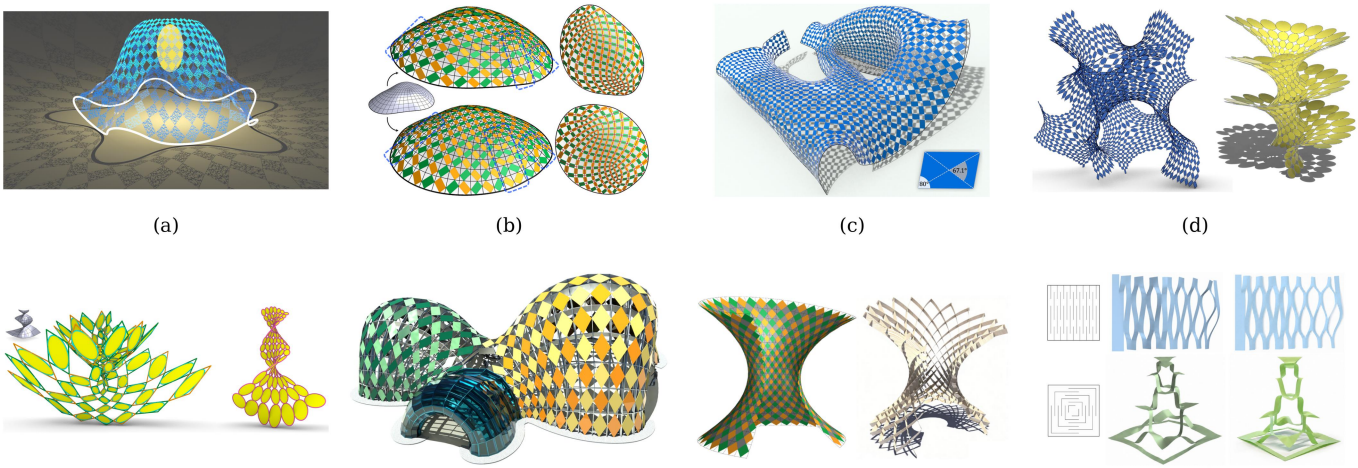


图 4 计算设计与实物模型。

参 考 文 献:

[1] David Bommes, Bruno Levy, Nico Pietroni, Enrico Puppo, Claudio Silva, Marco Tarini, and Denis Zorin. 2013. Quad-mesh generation and processing: A survey. In Computer Graphics Forum, Vol. 32. 51 – 76.

[2] Felix Dellinger, Xinye Li, and Hui Wang. 2023. Discrete Orthogonal Structures. Computers & Graphics 114 (2023), 126 – 137.

[3] Caigui Jiang, Cheng Wang, Eike Schling, and Helmut Pottmann. 2021. Computational design and optimization of quad meshes based on diagonal meshes. In Advances in Architectural Geometry. Presses des Ponts, 38 – 60.

[4] Caigui Jiang, Chi-Han Peng, Peter Wonka, and Helmut Pottmann. 2019. Checkerboard patterns with black rectangles. ACM Transactions on Graphics 38, 6 (2019), 171:1 – 13.

[5] Wikipedia. 1731. Varignon's theorem.

[6] Hui Wang and Helmut Pottmann. 2022. Characteristic parameterizations of surfaces with a constant ratio of principal curvatures. Computer-Aided Geometric Design 93 (2022).

[7] Hui Wang, Xinye Li, Zhi Li, and Cheng Wang. 2025. Discrete isogonal nets with similar parallelograms. Computer-Aided Design 247 (2025), 103937.

[8] Chengcheng Tang, Xiang Sun, Alexandra Gomes, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. 2014. Form-finding with Polyhedral Meshes Made Simple. ACM Transactions on Graphics 33, 4 (2014), 70:1 – 9.

基于改进栅格法和 Delaunay 的全四边形与六面体占优鲁棒网格划分引擎研发

池宝涛*，于先泽，杜　毅，韩同威，王朔卿

（1. 山东理工大学机械工程学院, 山东淄博 255000；

2. 山东省高性能精密制造与复合加工重点实验室, 山东淄博 255000；

3. 山东省风电装备测试评价与服役保障技术重点实验室, 山东淄博 255000）

摘　要：网格生成技术作为计算机辅助工程领域的核心内容，是高端制造业实现高精度仿真分析的关键支撑。然而，网格自动划分仍面临几何复杂性、拓扑不一致性等问题。为此，提出基于改进栅格法和 Delaunay 的边界保高质量全四边形与六面体占优鲁棒网格划分方法。该方法充分发挥栅格法和 Delaunay 网格划分方法的优点，在无需构建任何网格生成模板的情况下，即可对几何边界附近的核心网格实现边界拟合，有效解决了传统栅格法边界拟合的局限性；基于 Q/H-morph 算法能够实现几何边界附近三角形/四面体网格的转化，建立了基于零厚度层的网格优化方法，在保证原有生成的网格拓扑关系不变的情况下，在几何边界处构建多层全四边形或六面体网格，通过网格优化将低质量网格移至实体内部，最终实现几何内部为正交网格、边界保高质量的全四边形/六面体占优网格划分，为发展国产自主可控的工业 5aCAE-RealMesh 网格划分引擎提供坚实的理论基础和技术支撑。

关键词：改进栅格法，Delaunay 方法，零厚度层网格，全四边形网格，六面体占优网格

0　引　　言

网格划分作为连接 CAD 与 CAE 的核心桥梁，是高端制造业实现高精度仿真分析的关键支撑，对发展国产自主可控的工业 CAE 软件具有重要战略意义[1,2]。然而，网格自动划分仍面临几何复杂性、边界处理鲁棒性不足、全六面体网格划分理论有待完善等问题，网格划分占据了前处理 73%的时间，网格划分仍是整个数值模拟过程中的主要瓶颈[3]。在高性能数值仿真领域，四边形/六面体网格与三角形/四面体网格相比具有所需单元数量少、求解精度高、数值稳定性好等优点。因此，研究高效鲁棒的四边形与六面体网格划分方案对实现网格自动划分至关重要。

1　问题描述

在网格生成领域，传统栅格法在几何内部能够生成正交网格，但在几何边界附近存在扭曲或大角度的低质量网格单元。若采用四叉树/八叉树数据结构进行局部自适应细分会产生较多的悬挂节点，在处理网格协调性时需构建大量的网格模板[4]。采用栅格法进行网格划分的关键步骤是有效构建“锯齿状”核心网格，即从初始网格结构中剔除无效的网格构建“锯齿状”核心网格。如图 1 所示，传统栅格法“锯齿状”核心网格生成通常包括由外向内栅格法、由内向外栅格法、混合栅格法[5]。由外向内栅格法通过剔除完全处于模型外部的网格来生成核心网格，然后将外部网格节点由外向内拟合到几何曲面边界。由内向外栅格法通过剔除未完全处于实体模型内部的网格来生成核心网格，随后将内部网格节点由内向外拟合到几何边界。混合栅格法不同于以上两种，混合栅格法会根据网格单元在实体模型内部与外部的体积占比，保留与几何边界相交的部分网格，然后将网格的节点拟合到几何曲面的边界。

尽管传统栅格法已经取得重大研究进展，但对于复杂实体边界拟合仍是网格划分的主要瓶颈难题[6]。如图 2 所示，栅格法的边界拟合主要包括移点法、前沿推进法和边界投影法。移点法通过重新定位网格节点来实现边界拟合，生成的网格能够准确捕获几何边界特征，但该方法可能会使最初生成的网格质量下降。前沿推进法从边界向内扩展一层，进而生成四边形网格。虽然这种方法可以提高整体网格质量，但它需要大量求交判断，在前沿生成的网格质量较差。边界投影法通过在边界拟合过程中使用大量的网格生成模板来实现边界拟合，该方法能够生成高质量的网格，但网格生成模板数量难以估计。

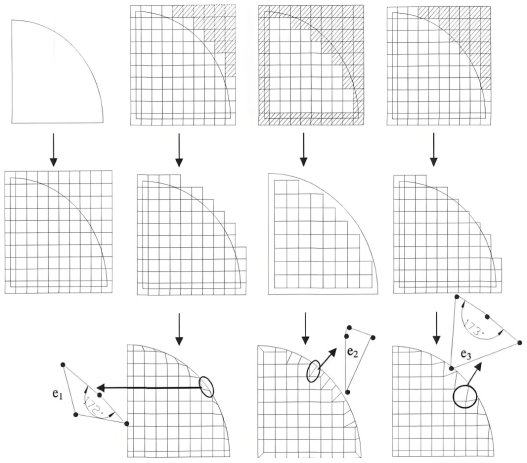


图 1 传统栅格法的“锯齿状”核心网格构建

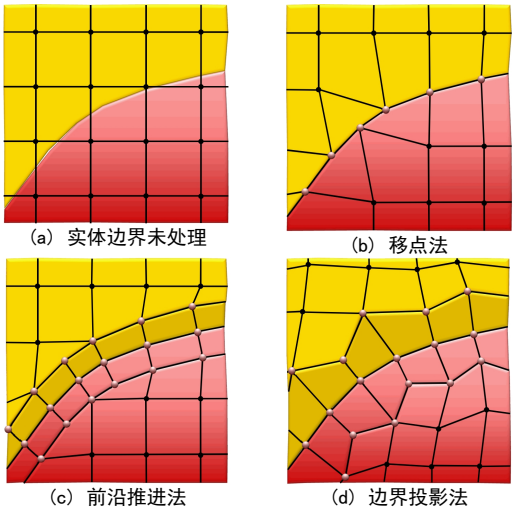
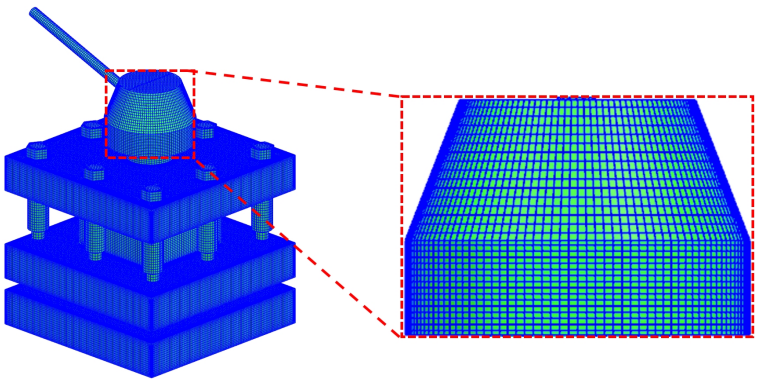
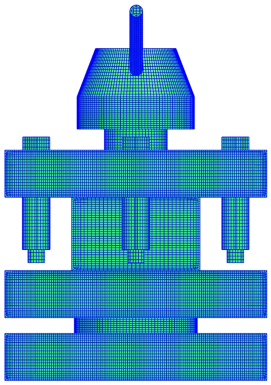


图 2 传统栅格法的实体边界处理方式

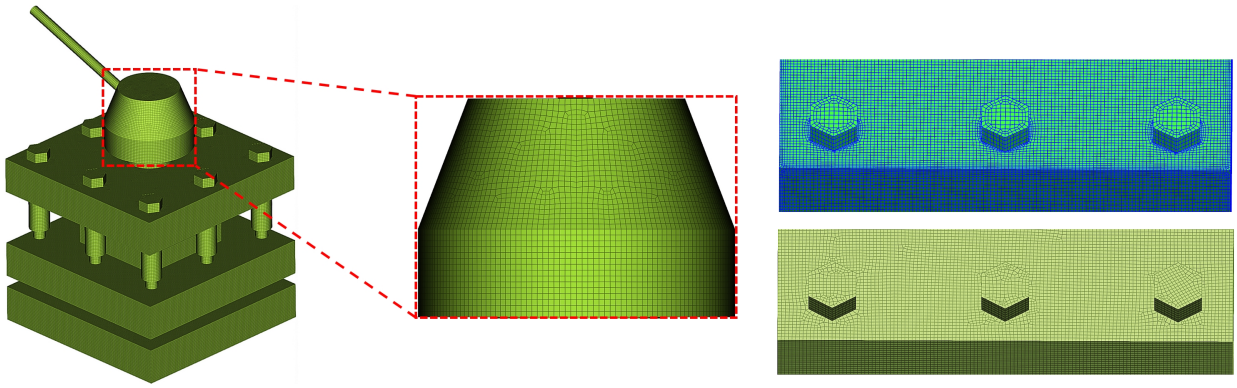
为此，本文提出基于改进栅格法和 Delaunay 的边界保高质量全四边形与六面体占优鲁棒网格划分方法（Grid-Delaunay 方法）[1]，旨在解决传统栅格法边界拟合的鲁棒性难题。该方法无需考虑任何网格生成模板即可实现高质量边界拟合，基于 Q/H-morph 算法能够实现几何边界附近三角形-四边形网格或四面体-六面体网格的转化，有效解决传统栅格法边界拟合的局限性并提升网格生成质量；建立了基于零厚度层的网格优化方法，在保证原有生成的网格拓扑关系不变的情况下，在几何边界处构建多层全四边形或六面体网格，通过网格优化将低质量网格移至实体内部，最终实现几何内部为正交网格、边界保高质量的全四边形/六面体占优网格划分。初步研究表明，网格生成质量优于 ANSA 主流商用网格划分软件（见图 3~图 4）。



(a) Grid-Delaunay 方法网格生成的局部放大图

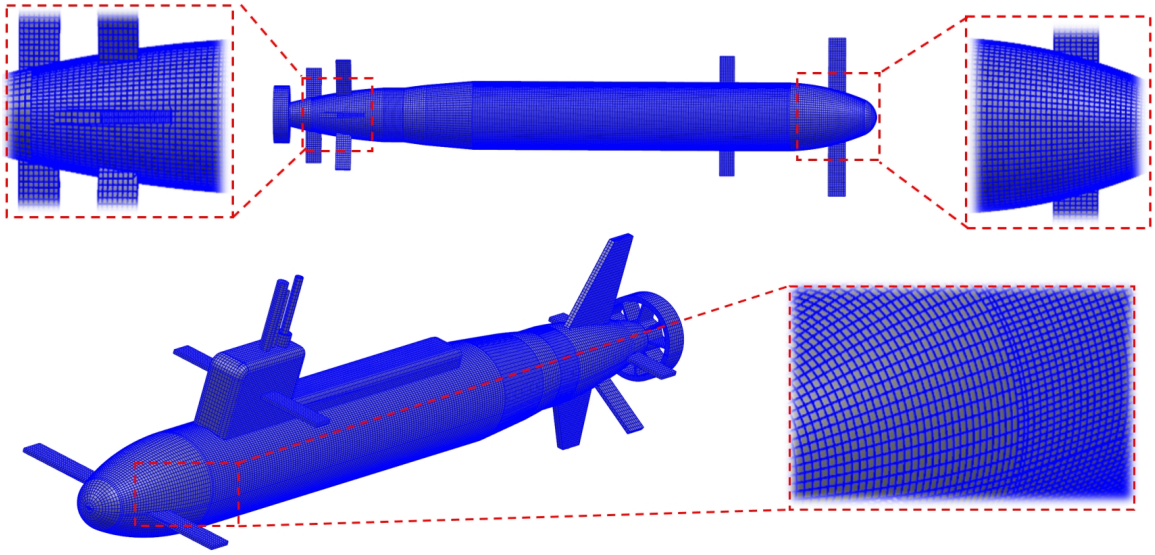


(b) 手动螺旋压紧夹具网格生成侧视图

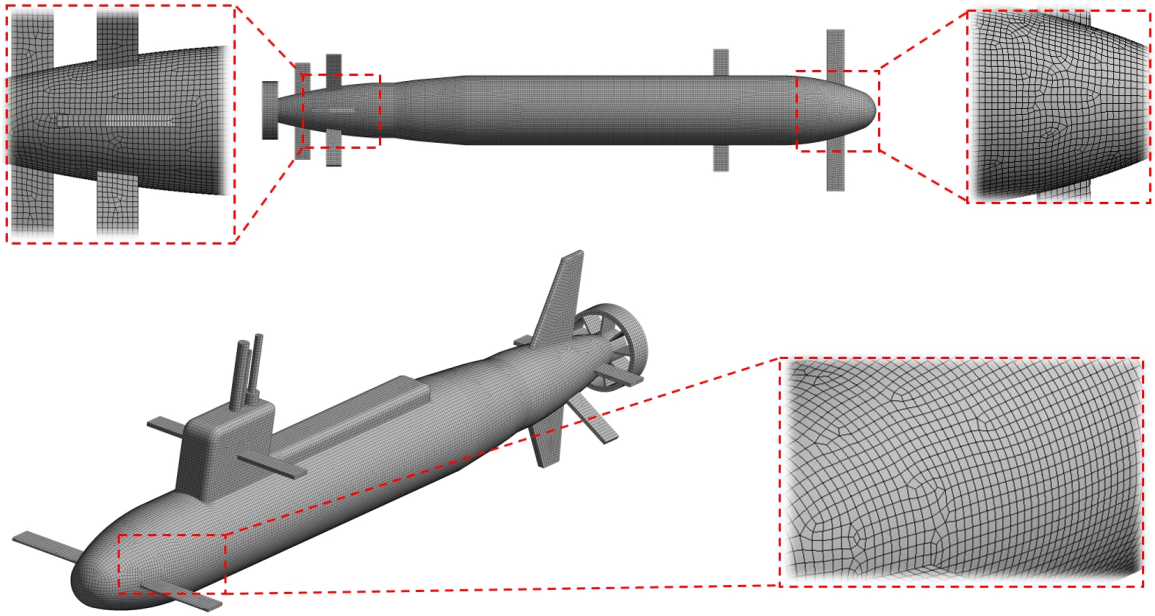


(b) 基于 ANSA 的 Free meshing 混合网格划分及局部放大图　　(d) 不同方法螺栓处网格生成对比

图 3 手动螺旋压紧夹具模型所提方法与商用软件的网格划分对比



(a) 基于 Grid-Delaunay 方法的全四边形网格划分及其局部放大图



(b) 基于 ANSA 的 Free meshing 混合网格划分及其局部放大图

图 4 潜艇模型所提方法与商用软件的网格划分对比

2 结　论

针对传统栅格法存在几何边界处理及边界网格质量差等难题,提出基于改进栅格法和 Delaunay 的边界保高质量全四边形与六面体占优鲁棒网格划分方法，该方法具有以下优点：

（1）提出基于改进栅格法和 Delaunay 的非结构网格划分方法，拟采用 Q/H-morph 方法对几何边界附近少量的三角形/四面体网格进行合并处理，无需构建任何网格生成模板进行边界处理，从而解决传统栅格法实体边界处理的鲁棒性难题。

（2）建立基于零厚度层网格的边界保高质量四边形/六面体网格划分方案，采用 Delaunay 和零厚度层进行边界处理及网格优化，将边界少量三角形/四面体网格移至实体内部，最终实现实体内部及几何边界均为高质量四边形/六面体的网格划分。

（3）算例表明，该方法能够解决传统栅格法边界处理的难题，且在边界处能够生成良好质量的四边形网格，最终实现几何内部为正交网格、边界保高质量的全四边形/六面体占优网格划分，为发展国产自主可控的网格划分引擎提供了有利条件。

参 考 文 献:

[1] Baotao Chi, Xianze Yu, Qianjian Guo, et al. An efficient and robust unstructured quad-dominated mesh generation method based on the grid-based and Delaunay techniques[J]. Engineering with Computers, 2025, 41: 3563-3585.

[2] Xiancheng Zhang, Jingquan Hao, Baotao Chi, et al. Implementation of the peridynamics-based finite element method for fracture analysis based on an efficient preprocessing scheme and automatic mesh generation techniques[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2026, 259: 104585.

[3] Baotao Chi, Zhichao Jia, Sizhe Niu, et al. An efficient unstructured quadrilateral-dominated surface mesh generation method for arbitrary geometry with tiny features or crack defects in DiBFM[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2024, 164: 105750.

[4] 王富顺, 池宝涛, 贾志超, 等. 一种适用于邻近特征的非结构体网格生成方法[J]. 机械工程学报, 2023, 59(24):118-130.

[5] 王吉康, 池宝涛, 王富顺, 等. 适用于邻近几何特征的非结构面网格生成方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2025, 37(7):1180-1191.

[6] 池宝涛, 张见明, 鞠传明. 基于 T-Spline 的全自动几何拓扑修复方法. 自动化学报, 2019, 45(8): 1511-1526.

基于图神经网络的边界层推进方向预测方法

王年华

（空天飞行空气动力科学与技术全国重点实验室，绵阳 621000)

摘　要：推进方向的准确计算是层推进法生成高质量边界层网格的关键环节，传统方法依赖迭代计算、多次光滑及人工规则，在复杂几何特征处存在效率低、鲁棒性不足的问题。本文提出一种基于图注意力网络（GAT）的边界层推进方向预测方法，将三角形面网格建模为面邻接图，设计包含节点坐标特征和 5 维边特征的图数据表示体系，通过 6 层多头自注意力 GAT 模型直接预测各网格节点的推进方向单位向量。构建了覆盖 NACA 4-digits 翼型（4180 个）和 UIUC 翼型数据库（3907 个）共 8087 个 2D 样本的数据集，采用角度相似性损失函数进行监督训练。实验结果表明，模型验证损失为 1.6×10^{-4}，测试损失为 1.9×10^{-4}，平均角度误差小于 1°，验证了该方法替代传统迭代方法预测推进方向的精度和可行性。

关键词：边界层网格，推进方向预测，图神经网络，图注意力网络，层推进法

0 引　言

层推进法（Advancing Layer Method, ALM）由于通用性强、能够控制边界层网格高度和增长速度，已被广泛应用于工程构型的边界层网格生成[1-2]。在层推进法中，推进方向的计算是核心环节。传统方法通过壁面相邻面的几何关系迭代计算各节点的推进方向，并进行多次拉普拉斯光滑以保证新创建的点能够被原始点周围的所有面“可见”[3-4]。在凸角处需采用多方向推进，在凹角处需缩放推进步长。这些基于专家经验和人工规则的处理方法存在规则不完备和失效的风险，且迭代计算和光滑过程耗费大量时间。

近年来，图神经网络（Graph Neural Network, GNN）有效解决了图形结构数据难以建模的问题，尤其适用于非结构化数据的处理[5]。三角形面网格的拓扑结构与图具有内在的相似性，网格节点和网格面可与图神经网络的节点和边建立一一映射关系。在几何特征识别领域，已有研究将 B-Rep 模型或多边形网格转化为图表示，利用 GNN 进行特征学习和分类，展示了 GNN 在几何建模中的应用潜力。

本文提出一种基于图注意力网络（GAT）的边界层推进方向预测方法，将面网格建模为图结构，设计面向边界层网格生成任务的节点特征和边特征体系，通过 GNN 直接从网格拓扑和几何信息中学习推进方向的隐式映射关系，替代传统的迭代计算和人工规则。

1 问题描述

本文将推进方向预测问题建模为图上的节点级回归任务：给定壁面三角形面网格的拓扑结构和几何信息，预测每个网格节点的推进方向单位向量。采用 GNN 模型自动从网格数据中学习几何特征与推进方向之间的映射关系，无需显式的迭代计算和人工规则。

按照基于三角形面网格转化为面邻接图的特征建模方法，将离散网格拓扑结构与图神经网络的数据表

示形式统一。具体包括：（1）面网格建模为图：将面网格节点和网格边与图神经网络的节点和边建立一一映射关系；（2）节点属性定义：在图节点中编码网格点空间坐标；（3）边属性定义：在图边中编码网格几何属性（边长）、拓扑属性（边方向）及局部曲率信息。

2D 翼型场景中，节点特征为 2 维坐标（x, y）。采用基于壁面包围盒的统一尺度归一化：

$$\mathbf{x}_i' = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\min}}{L_{\max}}, \quad L_{\max} = \max(x_{\max} - x_{\min}, y_{\max} - y_{\min})$$

标签为 2 维推进方向单位向量，从高质量边界层网格样本中提取壁面边界拓扑，通过相邻面几何关系推导节点推进方向，作为监督学习的真实标签。

针对 2D 翼型场景，设计 5 维边特征，包括：边绝对长度、相对边长（相对于全局平均边长）、边方向分量（2 维）、局部曲率（相邻边最大转向角）。

构建编码器-消息传递-解码器三段式图网络架构，如图 1 所示。

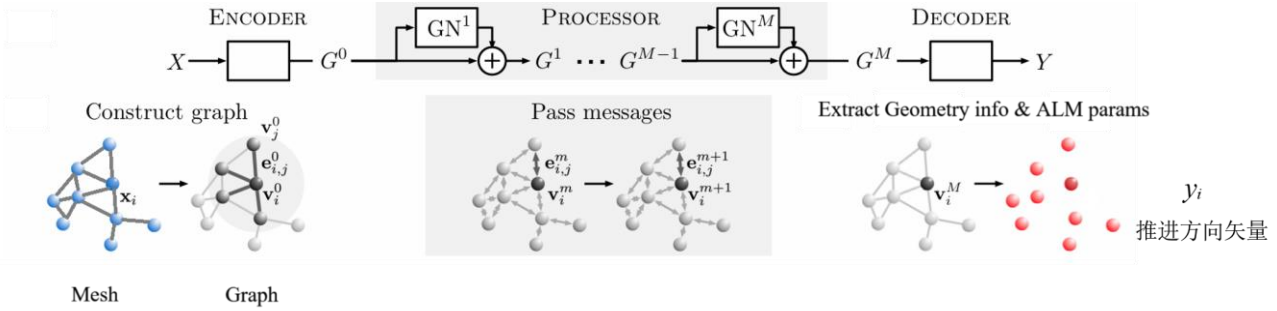


图 1 边界层推进方向预测图网络结构示意图

由于模型输出为方向向量，采用角度相似性损失直接优化预测向量与真实向量之间的夹角。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \arccos\left(\text{clamp}\left(\frac{\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{y}_i}{\|\hat{\mathbf{y}}_i\|\|\mathbf{y}_i\| + \epsilon}, -1, 1\right)\right)$$

训练优化器为 Adam，初始学习率 0.01，采用 StepLR 调度（每 500 步衰减为 0.95 倍）。Batch Size 为 32，最大训练轮数 20000，数据集按 7:1.5:1.5 划分为训练集/验证集/测试集。

本文构建了覆盖 2D 翼型场景的两大类数据集。

表 1 2D 翼型数据集

数据集	样本数	来源
NACA 4-digits	4180	程序化生成，覆盖不同弯度（0-9%）、最大弯度位置（10%-90%）和厚度（6%-18%）组合
UIUC Airfoil Database	3907	开源翼型数据库（1665 个.dat 文件，经闭合性校验和坐标范围筛选）
合计	**8087**	

针对复杂几何特征样本不均衡的问题，采用以下增强策略：（1）特殊几何特征样本生成：针对凹角、凸角、尖角等复杂几何区域，生成多种角度配置（30°、60°、90°、120°）的各向异性边界层网格样本；（2）几何变换增强：通过平移、旋转、缩放等变换提高模型的几何不变性；（3）数据清洗：剔除网格质量异常、

拓扑错误等无效样本。在数据增强后，总样本数达到 33148。

在样本数据集训练 20000 轮，训练损失和验证损失均达到收敛，如图 2 所示。验证损失达到 1.6×10^{-4}，在整个测试集上的平均测试损失仅为 1.9×10^{-4}，表明 GAT 网络预测精度高且未出现过拟合。

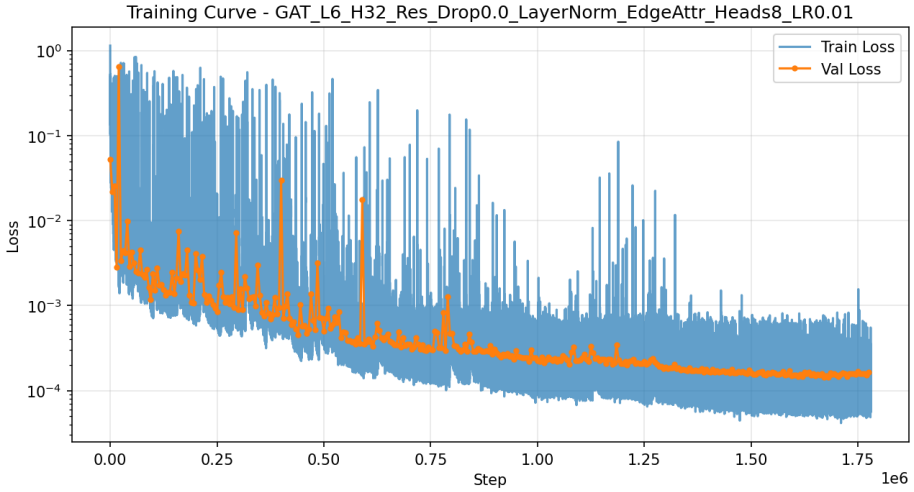
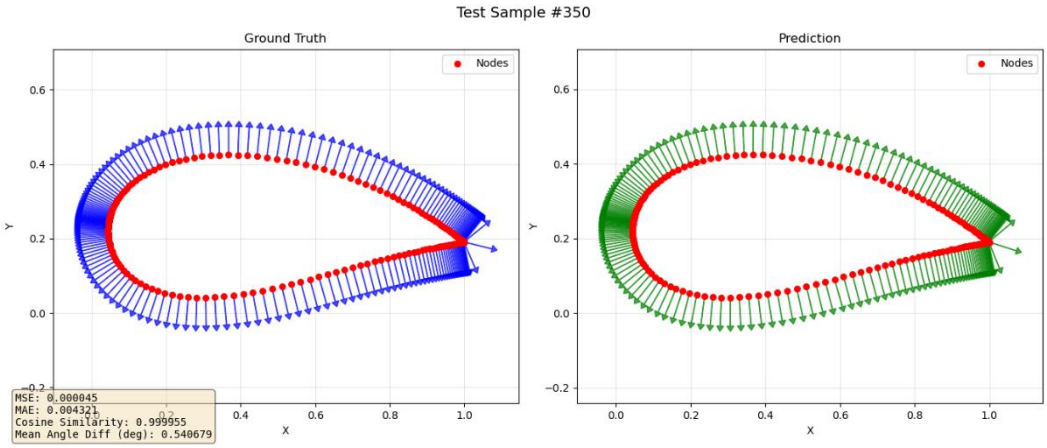
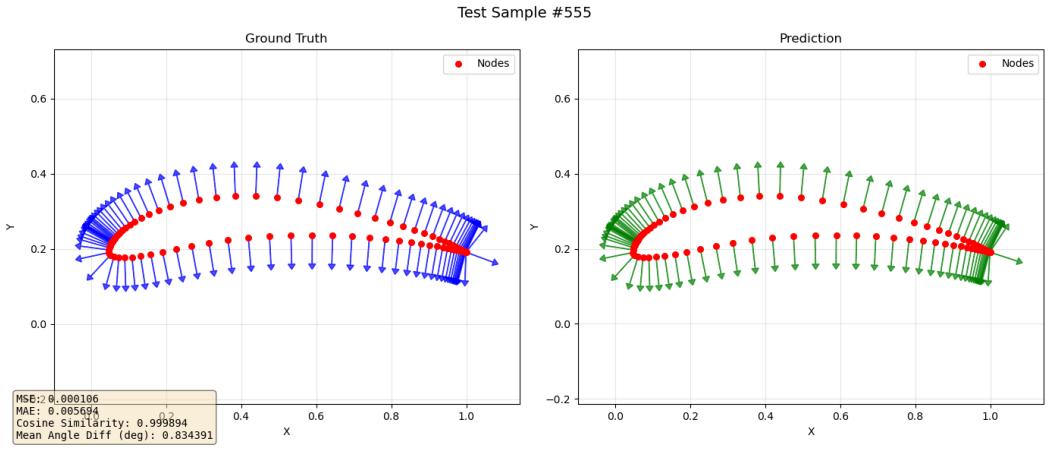


图 2 训练和验证损失收敛历程

在测试集上随机抽取样本进行测试，预测的推进方向与真实值差异极小，平均角度误差小于 1°。图 2 给出了 NACA 4-digits 翼型和 UIUC 翼型数据库的随机样本测试结果，可视化显示预测方向（红色箭头）与真实方向（蓝色箭头）高度一致，验证了方法的有效性。



（a）NACA 4digits 翼型随机样本测试结果



（b）UIUC Airfoil Database 翼型随机样本测试结果

图 1 随机样本测试结果

2 结　论

本文提出了一种基于图注意力网络的边界层推进方向预测方法。将三角形面网格建模为面邻接图，设计了包含 5 维边特征的图数据表示体系，构建了包含 8087 个 2D 翼型样本的数据集，采用 6 层 GAT 模型进行推进方向预测。实验结果表明，模型测试损失为 1.9×10^{-4}，平均角度误差小于 1°，验证了 GNN 替代传统迭代方法预测推进方向的精度和可行性。

未来工作包括：（1）将方法扩展到 3D 曲面场景，完成 Thingi10K 数据集的预处理，验证 14 维边特征体系的有效性；（2）开展 GAT 与 GCN 的对比消融实验，量化注意力机制和边特征对预测精度的贡献；（3）在推进方向预测基础上扩展推进步长和局部步长因子预测能力，发展完整的基于 GNN 的智能化边界层网格推进生成方法。

参 考 文 献:

[1] Pirzadeh S. Unstructured viscous grid generation by the advancing layers method[R]. AIAA-93-3453, 1993.

[2] Garimella R, Shephard M S. Boundary layer mesh generation for viscous flow simulations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 49(1-2): 193-218.

[3] 陈建军，曹建，徐彦，等. 适应复杂外形的三维粘性混合网格生成算法[J]. 计算力学学报, 2014, 31(3): 363-370.

[4] Ye H, Liu Y, Chen B, et al. Hybrid grid generation for viscous flow simulations in complex geometries[J]. Advances in Aerodynamics, 2020, 2: 1-18.

[5] Pfaff T, Fortunato M, Sanchez-Gonzalez A, et al. Learning mesh-based simulation with graph networks[C]//ICLR, 2020.

一种笛卡尔网格流场自适应过程的高效滤波优化方法

张禾佳[1]，范宁[2]，毕林[2]，马强[1]

(1. 四川大学数学学院, 成都， 610064;

2.中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 绵阳， 621000)

摘要：在计算流体力学中，笛卡尔网格因其生成自动化、易于实施自适应网格细化等优势，在复杂流动模拟中应用广泛。然而，在模拟复杂流场中的物体运动时，传统笛卡尔网格为捕捉流动特征，需在物体周围预设高阶块加密，可能导致网格过度细化、计算效率低下；若降低加密层级，则现有自适应判据易受数值噪声干扰，难以准确识别真实流动结构。本文基于图像处理中的导向滤波思想，设计了一种基于棋盘距离的滤波窗口选取算法，对笛卡尔网格流场自适应过程进行滤波优化，增强了模型对关键流动特征的识别能力。典型算例表明，该方法在显著降低加密层级的条件下仍能精确捕捉流动特征，为复杂流动问题提供高效解决方案。

关键词：笛卡尔网格; 自适应网格细化; 导向滤波.

中图分类号：O246　　**文献标志码：**A

An Efficient Filtering Optimization Method for Adaptive Cartesian Grids

Hejia Zhang[1],Ning Fan[2], Lin Bi[2], Qiang Ma[1]

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, 610064, China;

2. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang,621000, China)

Abstract: In computational fluid dynamics, Cartesian grids are widely used for simulating complex flows due to advantages s uch as automated generation and ease of implementing adaptive mesh refinement. However, when simulating moving objects in complex flow fields, traditional Cartesian grids require high-level block-based refinement around the object to capture flow features, which can lead to excessive grid resolution and reduced computational efficiency. Lowering the refinement level, on the other hand, makes existing adaptation criteria susceptible to numerical noise, hindering accurate identification of true flo w structures. Building on the idea of the guided filter from image processing, this work optimizes the AMR process approach by designing a chessboard-distance-based filter-window selection algorithm and filtering the adaptation criteria，thereby enh ancing the model's ability to identify key flow features. Representative test cases demonstrate that the proposed method can a ccurately capture flow structures even with significantly reduced refinement levels, offering an efficient solution for complex flow problems.

Keywords: Cartesian grid; Adaptive Mesh Refinement; Guided Filter

1. 引言

计算流体力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）作为一种强大的数值分析方法，已广泛应用于航空航天、汽车工程、生物医学等众多工程与科研领域。随着计算需求的日益复杂，对CFD的计算效率与模拟精度提出了更高要求。网格生成是CFD计算的基础，其质量直接影响计算的精度与效率。一般来说采用更细的网格可以得到更精确的结果，但同时也需要更多的计算资源。为了平衡计算精度与资源消耗之间的矛盾，自适应网格细化技术（Adaptive Mesh Refinement，AMR）应需而生。该技术的核心优势在于能够依据

收稿日期：

作者简介：张禾佳(2001-)，男，四川自贡人，硕士，主要从事计算流体力学研究. E-mail:2023222010054@stu.scu.edu.cn.

通讯作者：马强. E-mail : maqiang809@scu.edu.cn

流场特征动态优化网格分布：在流动结构复杂的区域自动实施网格加密以提高分辨率，而在变化平缓区域则维持较粗网格以节约计算成本。

与结构、非结构及重叠网格相比[2][3][4][5]，自适应笛卡尔网格具有生成自动化、易于实施 AMR 和网格质量高等优势[6]，可对任意复杂外型快速生成高质量正交网格。其基于单元的局部细化策略能在边界层、旋涡尾迹等关键区域有效捕捉流动特征，并控制网格规模。然而，在模拟物体复杂运动时，通常需预设高层级的块加密（block-based AMR），导致网格过度细化。理想的方案是尽量降低初始块加密层级，主要依赖流场自适应过程在求解过程中动态加密网格，但现有自适应判据在低块加密层级下难以准确识别流动特征。

为此，本文引入滤波技术以优化流场自适应过程，使其在低块加密层级条件下仍可精确捕捉关键流动结构。现有 CFD 中的滤波技术主要集中于求解器内部，其目的主要在于维持数值稳定性而非优化流场自适应过程。而传统信号滤波通常需通过快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)将时域信号转换至频域处理，计算量较大。相比之下，图像处理领域已发展出多种空域局部滤波算法，无需频域转换，仅依赖局部领域内的信息进行运算，效率更高。该类方法通过对窗口内的灰度值（黑白图像）或像素值（彩色图像）进行一系列数学运算实现去噪，但简单滤波器缺乏边缘保持能力，在视觉上表现为在过滤噪声的同时也会造成图像的模糊。为解决这一问题，C. Tomasi 等人提出双边滤波[9]，通过空间距离和灰度值双重加权实现边缘保护，但计算繁琐。在此基础上，K. He 等人进一步提出导向滤波（Guided Filter）[13]，引入引导图像动态识别边缘与噪声，实现了高效边缘保持滤波。将图像处理中的滤波技术，直接用于流场自适应判据的前处理，以抑制数值噪声、增强物理特征辨识的研究目前尚不多见。鉴于图像噪声与网格自适应误差在视觉上的相似性，二者在数学上也均表现为高频扰动。本文因此将局部滤波引入流场自适应过程。

本文针对现有笛卡尔网格流场自适应方法在模拟物体复杂运动情况下存在的不足，基于 K. He 等人提出的导向滤波思想，提出一种新的滤波窗口选取算法，通过对速度散度、旋度等自适应判据进行滤波优化，有效抑制了数值噪声，对笛卡尔网格流场自适应过程进行了优化，增强了对流动特征的识别能力。

本文的结构如下：第 2 节详细阐述了控制方程及其数值求解方法，并介绍了笛卡尔网格的生成、自适应策略，以及流场自适应过程中的滤波优化方法。第 3 节通过振荡圆柱绕流的经典算例对本文的方法进行了验证与讨论。第 4 节对本研究进行了总结。

2. 研究方法

2.1 控制方程

流场计算采用非定常可压缩雷诺平均纳维-斯托克斯(Reynolds Averaged Navier–Stokes, RANS)方程进行。二维微分守恒型的 RANS 方程表达式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial E_v}{\partial x}+\frac{\partial F_v}{\partial y} \tag{1}$$

其中 $U=\left[\rho,\rho u,\rho v,e\right]^T$，$\rho$ 表示流体密度，u,v 分别表示 x,y 方向的速度，e 表示单位体积总内能，p 为流体压力，E、F 为无粘流项：

$$\begin{aligned} E&=\left[\rho u,\rho u^2+p,\rho uv,u(e+p)\right]^T\\ F&=\left[\rho v,\rho uv,\rho v^2+p,v(e+p)\right]^T \end{aligned} \tag{2}$$

E_v、F_v 为粘性流项。采用有限差分法求解上述方程，采用三阶龙格库塔格式，在时间步上显式推进为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{(0)}=\boldsymbol{U}^n\\ \boldsymbol{U}^{(1)}=\boldsymbol{U}^{(0)}+\Delta t\cdot R\left(\boldsymbol{U}^{(0)}\right)\\ \boldsymbol{U}^{(2)}=\frac{3}{4}\boldsymbol{U}^{(0)}+\frac{1}{4}\boldsymbol{U}^{(1)}+\frac{1}{4}\Delta t\cdot R\left(\boldsymbol{U}^{(1)}\right)\\ \boldsymbol{U}^{(3)}=\frac{1}{3}\boldsymbol{U}^{(0)}+\frac{2}{3}\boldsymbol{U}^{(2)}+\frac{2}{3}\Delta t\cdot R\left(\boldsymbol{U}^{(2)}\right)\\ \boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{U}^{(3)} \end{cases} \tag{3}$$

设 $q=\left[\rho,u,v,p\right]^T$ 为原始变量，粘性项采用二阶中心差分，对流项采用 MUSCL3 阶格式:

$$\begin{aligned} q^L_{i+1/2}&=q_i+\frac{s_i}{4}\left[\left(1-ks_i\right)\delta_i^-+\left(1+ks_i\right)\delta_i^+\right]\\ q^R_{i+\frac{1}{2}}&=q_{i+1}-\frac{s_{i+1}}{4}\left[\left(1-ks_{i+1}\right)\delta_{i+1}^+\left(1+ks_{i+1}\right)\delta_{i+1}^-\right] \end{aligned} \tag{4}$$

取系数 $k=\frac{1}{3}$，其中：

$$\begin{aligned} &\delta_i^+=q_{i+1}-q_i,\delta_i^-=q_i-q_{i-1}\\ &s_i=\frac{2\delta_i^+\delta_i^-+\varepsilon}{\delta_i^{+2}+\delta_i^{-2}+\varepsilon},\epsilon=10^{-6} \end{aligned} \tag{5}$$

2.2 网格生成及自适应策略

动态自适应笛卡尔网格的生成与更新包含初始化和循环更新两个阶段：（1）定义计算域并生成背景网格，加载物体几何表面文件后执行基于物面外形的几何自适应加密以及在物体附近进行的初始块加密，并进行缓冲层添加与网格光顺处理。（2）初始化流场并求解当前时间步，根据此时的流场解进行网格自适应跟踪以及时更新几何自适应分布，继而执行流场解适应加密，自动提高物面附近强剪切层及流场关键位置的网格密度。

在网格自适应过程中，流场物理量的重新分配采用梯度加权法：当进行网格粗化时，新生成的粗网格单元物理量直接采用原四个子单元物理量的算术平均值。在网格加密时，则通过 L2 投影法[19]来精确计算新增网格单元的流场物理量分布:

$$U_{R_i} = U_C + a_i U_C^{(1)} + b_i U_C^{(2)} \tag{6}$$

其中：$U_C^{(1)} = \dfrac{\Delta x}{4}\dfrac{\partial U}{\partial x}\bigg|_C$ ，$U_C^{(2)} = \dfrac{\Delta y}{4}\dfrac{\partial U}{\partial y}\bigg|_C$ ，$a_i, b_i = \pm 1$

U_C 表示原有粗网格单元的物理量，U_{R_i} 表示新增细网格单元的物理量，这种基于 L2 投影法的细化策略能够确保流场信息在网格加密过程中保持物理一致性，从而提高数值模拟的精度和稳定性[19]。

流场自适应的核心目标是识别并加密如涡结构和激波等关键特征区域，从而提高数值解的准确性[1][7][8], 我们采用速度的散度和旋度作为流场自适应的综合判据, 表达式为：

$$\tau_{ci} = \left|\nabla \times \mathrm{V}\right| h_i^{\frac{r+1}{r}}, \tau_{di} = \left|\nabla \cdot \mathrm{V}\right| h_i^{\frac{r+1}{r}} \tag{7}$$

其中：$i = 1, \cdots, N$ ， N 是总网格数，h_i 是目标网格尺度。参数 r 用于调节判据收敛速率（通常在二维时取 2，三维时取 3），使得判据值随着网格的加密而逐渐趋于 0。 然后再计算所有网格处的判据值与 0 的标准偏差：

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \tau_{ci}^{\,2}}{N}}, \sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \tau_{di}^{\,2}}{N}} \tag{8}$$

当 $\tau_{ci} > R_1 \sigma_c$ 或 $\tau_{di} > R_2 \sigma_d$ 时加密该网格

当 $\tau_{ci} < C_1 \sigma_c$ 或 $\tau_{di} < C_2 \sigma_d$ 时粗化该网格

其中：C_1, C_2, R_1, R_2 是人为设定的参数，需要根据不同算例来设置，通常取 $C_1 = C_2 = 0.1, R_1 = R_2 = 1.0$ 。整体规律而言，参数数值越大，加密的阈值将提高、粗化阈值被降低，使得计算域内的总体网格数量较少；反之域内的总网格数量增多。

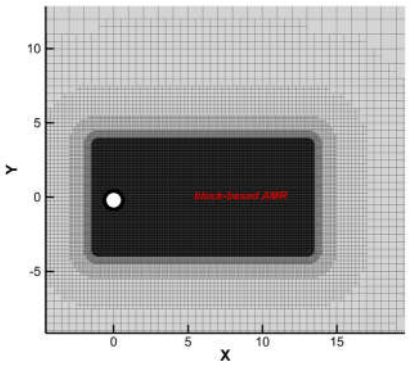


图 1.块加密示意图

Fig.1. Schematic of Block-Based AMR

当物体运动情况较为复杂时，通常还需将其附近区域内所有网格预先加密到较高层级（块加密）。然而，块加密层级过高会导致网格数量激增，造成计算资源浪费（如图 1 所示）；而若降低块加密层级，则可能难以准确识别需要加密的区域，特别是在流场特征变化剧烈的区域边缘会出现大量不规则分布的噪点，因此，本文考虑在流场自适应过程中引入滤波优化算法，以提升流场自适应加密的准确性。

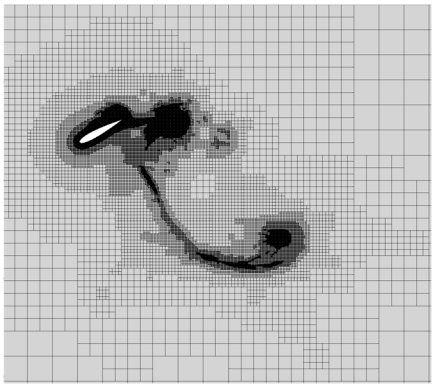


图 2. 判据噪声导致的网格加密错误

Fig. 2. Erroneous mesh refinement due to adaptive criterion noise

2.3 滤波优化方法

在流场自适应时，判据值高低直接决定网格疏密，判据值大的区域需加密，这与黑白图像中高灰度值对应高亮度区域的视觉规律高度相似。受此启发，我们考虑将图像去噪方法引入流场自适应过程中，旨在仅通过低层级块加密即可获得理想计算结果。局部滤波

是一种通过对局部窗口内的像素进行数学运算（如取中值或加权平均），以实现噪声去除或细节增强的图像处理技术。该类方法直接基于空间域计算，避免了频域变换的复杂操作，计算效率高、实现简单。将其嵌入流场自适应过程时，所增加的计算开销有限，不会对整体计算效率产生显著影响。

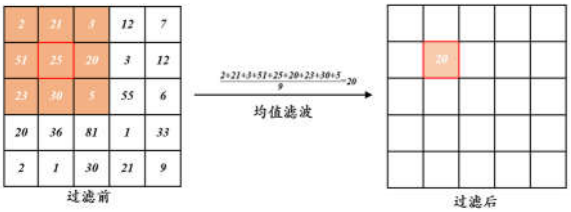


图 3 局部滤波示意图（以均值滤波为例）

Fig.3. Local Filter (Mean Filter Example).

简单局部滤波器（如中值、均值滤波）缺乏边缘保持能力，在过滤噪声的同时也会模糊特征边界。为解决这一问题，研究者提出高斯滤波，基于像素与中心点之间的欧氏距离进行高斯加权（距离越近权重越大），其二维权值函数定义为：

$$G_s(x,y)=\frac{1}{2\pi{\sigma_s}^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2{\sigma_s}^2}} \tag{9}$$

经过高斯滤波后，中心处像素点新的像素值为：

$$I(c)=\sum_{q\in\omega_c}I(q)\times G_s(q) \tag{10}$$

其中：ω_c 表示以 c 为中心的滤波窗口。

相较于简单局部滤波器，高斯滤波能够在过滤噪声的同时保持边缘特征。在高斯滤波的基础上，为了进一步强化边缘保持能力，C. Tomasi 等人又提出了双边滤波[9]。双边滤波的本质是在高斯权重的基础上引入了另一重权重因子：假设中心处的像素值为 I_c，目标像素点的像素值为 I_q，再基于像素值之间的差异计算出值域权重：

$$G_r=\frac{1}{2\pi{\sigma_r}^2}e^{-\frac{{I_c-I_q}^2}{2{\sigma_r}^2}} \tag{11}$$

最终，点 p 处的权重 $G(p)$ 由 G_s 与 G_r 相乘后归一化获得：

$$G(p)=\frac{G_s(p)G_r(p)}{\sum_{q\in\omega_c}G_s(q)G_r(q)} \tag{12}$$

这意味着：即使某像素在空间上距离中心很近，但若其像素值与中心差异显著，其权重仍会被有效降低。该机制使双边滤波能有效保护边缘，实现"过滤噪声的同时保留边缘"。然而，它需为每个像素动态计算双重权重并归一化，计算量巨大，难以直接应用于对计算效率要求极高的流场自适应过程当中。因此，学者又对双边滤波进行了多种改进[10][11][12]，旨在增强其边缘保持能力的同时大幅降低计算成本。K. He 等人提出的导向滤波[13]能在保持边缘的同时显著降低计算量，已成为目前最常用的图像去噪方法之一。其大致思路是：

1.对于待处理的输入图像 I，导向滤波要求提供一幅引导图像 G 用于指示边缘与结构信息。导向图可以是另外的图像但也可以直接用原来的图像 I

2.经过滤波后的输出图像记为 O,我们将输出图像看作是导向图的一个局部线性变换，因此有:

$$O_i=a_kG_i+b_k,\forall i\in\omega_k \tag{13}$$

其中：ω_k 表示以 k 为中心的滤波窗口 。原有的图像 I 也可以视作是滤波后的图像加上不需要的噪声 N 得到的，因此有：

$$O_i\approx I_i-N_i \tag{14}$$

3.求解出系数 a_k,b_k 使得 O 和 I 之间的差距尽可能小：这里用到了带有正则项的岭回归（linear ridge regression），通过引入正则化项 $\varepsilon{a_k}^2$ 防止其过度拟合输入信号中的噪声：

$$\min_{a_k,b_k}\sum_{i\in\omega_k}\left(\left(O_i-I_i\right)^2+\varepsilon{a_k}^2\right)=\min_{a_k,b_k}E(a_k,b_k) \tag{15}$$

其中：

$$E(a_k,b_k)=\sum_{i\in\omega_k}\left(\left(a_kG_i+b_k-I_i\right)^2+\varepsilon{a_k}^2\right) \tag{16}$$

通过极小化(16)式可以求出参数 a_k,b_k :分别对 a_k,b_k 求偏导，并令其等于 0：

$$\frac{\partial E}{\partial b_k}=\sum_{i\in\omega_k}\left(2\left(a_kG_i+b_k-I_i\right)\right)=0 \tag{17}$$

令 n 表示窗口内样本的总数：

$$a_k \sum_{i\in\omega_k} G_i + nb_k - \sum_{i\in\omega_k} I_i = 0 \tag{18}$$

令 $mean$ 表示窗口内样本的均值，因此：

$$a_k n \cdot mean(G_k) + nb_k - n \cdot mean(I_k) = 0 \tag{19}$$

所以：

$$b_k = mean(I_k) - a_k mean(G_k) \tag{20}$$

同理，对于 a_k 有：

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = \sum_{i\in\omega_k} \left(2\left(a_k G_i + b_k - I_i\right) G_i + 2\varepsilon a_k\right) = 0 \tag{21}$$

$$a_k \sum_{i\in\omega_k} G_i^2 + b_k \sum_{i\in\omega_k} G_i - \sum_{i\in\omega_k} I_i G_i + \varepsilon a_k n = 0 \tag{22}$$

代入(20)式可得：

$$a_k \sum_{i\in\omega_k} G_i^2 + \left(mean(I_k) - a_k mean(G_k)\right) \sum_{i\in\omega_k} G_i - \sum_{i\in\omega_k} I_i G_i + \varepsilon a_k n = 0 \tag{23}$$

化简得：

$$a_k \left(mean(G_k^2) - mean(G_k)^2 + \varepsilon\right) - mean(I_k G_k) + mean(I_k) mean(G_k) = 0 \tag{24}$$

令 cov, var 分别表示窗口内样本的协方差、方差，同时注意到：

$$mean(G_k^2) - mean(G_k)^2 = var(G_k) \tag{25}$$

而：

$$mean(I_k G_k) - mean(I_k) mean(G_k) = cov(G_k, I_k) \tag{26}$$

因此：

$$a_k \left(var(G_k) + \varepsilon\right) - cov(G_k, I_k) = 0 \tag{27}$$

所以：

$$a_k = \frac{cov(G_k, I_k)}{var(G_k) + \varepsilon} \tag{28}$$

$$b_k = mean(I_k) - a_k mean(G_k) \tag{29}$$

由于一个像素可能会被包含在多个窗口中，因此在实际中需要取在所有包含它的窗口中分别求得的系数的平均值。

5.最终，中心处新的像素值为：

$$O = a_k \cdot G + b_k \tag{30}$$

算法 1 给出了导向滤波的大致流程：

算法 1. 导向滤波（Guided Filter）

输入：待滤波输入图像I，引导图像G，正则化参数ϵ

输出：滤波结果O

1.计算引导图与输入图的均值与方差：

$\text{mean}_G = f_{\text{mean}}(\text{G}), \text{mean}_I = f_{\text{mean}}(I)$

$\text{corr}_G = f_{\text{mean}}(G \cdot G), \text{corr}_{GI} = f_{\text{mean}}(G \cdot I)$

$\text{var}_G = \text{corr}_G - \text{mean}_G \cdot \text{mean}_G$

$\text{cov}_{GI} = \text{corr}_{GI} - \text{mean}_G \cdot \text{mean}_I$

2.计算线性系数：

$a = \frac{\text{cov}_{GI}}{\text{var}_G + \epsilon}, b = \text{mean}_I - a \cdot \text{mean}_G$

3.聚合局部系数：

$\text{mean}_a = f_{\text{mean}}(a)$

$\text{mean}_b = f_{\text{mean}}(b)$

4.生成输出图像:

$O = \text{mean}_a \cdot G + \text{mean}_b$

/* f_{mean} 表示均值滤波 */

从导向滤波的原理可以看出：当引导图像在窗口内方差极小（平滑区域）时：$a_k \approx 0, b_k \approx 1$，于是：

$$O_k \approx mean(I_k) \tag{31}$$

这使得输出图像 O_k 近似于窗口内输入图像 I_k 的均值，实现了该区域的噪声过滤。当引导图像在窗口内方差较大（边缘处）时，正则项 ε 可忽略，此时有：

$$a_k \approx \frac{cov(G_k, I_k)}{var(G_k)} \tag{32}$$

这一机制有效地确保了边缘特征得以保留。

在对流场自适应过程的优化时，我们将自适应判据值类比成图像的像素值进行处理，但要将导向滤波应用于流场自适应过程还需要进行若干调整。首要问题在于几何结构：笛卡尔网格的邻近网格系统不同于图像像素的规则矩形分布，因此首先需设计一种新的滤波窗口选取算法。我们首先考虑根据网格之间的欧氏距离来构建滤波窗口。具体做法是：将以中心网格为中心、距离小于 r 倍该网格宽度（r 为窗口半径）的所有网格纳入窗口。

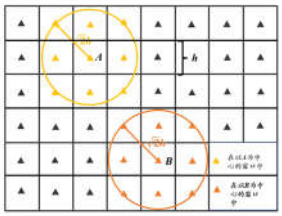


图 4. 根据欧氏距离选取滤波窗口示意图

Fig.4. Filter window selection based on Euclidean distance.

该方法虽简单直观，但存在明显不足：一是当滤波窗口半径较小时，若中心网格位于不同层级网格交界处（存在悬挂节点），会导致某一侧邻近网格无法被纳入窗口（如图5所示），造成样本分布不均，严重影响滤波效果。实际应用中选取的窗口半径较小（通常取值仅为1~3），使得该网格缺失问题频发。二是在每次选取窗口时都需要遍历所有网格并计算与其的距离，增加大量新的计算开销。

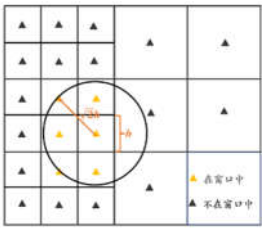


图 5. 欧氏距离选取滤波窗口会导致窗口内样本分布不均匀

Fig. 5. The use of Euclidean distance for filter window selection can result in a non-uniform distribution of internal samples.

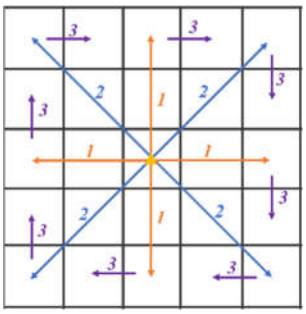


图 6.根据棋盘距离选取滤波窗口示意图

Fig.6. Filter Window Selection Using Chessboard Distance.

为了避免根据欧氏距离选取窗口存在的以上两点问题，我们转而采用一种类似棋盘距离的策略来构建滤波窗口。以窗口大小为 r 为例：令 x, y 分别表示在 x 和 y 方向上与中心处网格相隔的网格个数将所有坐标 (x, y) 满足：

$$\max\left\{|x|,|y|\right\} \le r \tag{33}$$

的所有网格都纳入滤波窗口当中，在具体实施时，其具体流程如下：首先，选取中心网格在上、下、左、右四个正方向上的各 r 个相邻网格；再沿四条对角线方向再各选取 r 个网格；若 $r \ge 2$，则再最终补充选取介于对角线方向与正方向之间的网格（如图6所示）。

此外，我们无法预知流场特征边缘分布且需严格控制计算开销。若对流场结果进行额外变换以生成引导图像将显著增加计算量。基于效率与可行性的考量，我们直接采用当前流场计算结果作为引导图像，此时有：

$$cov\left(G_k, I_k\right) = var\left(I_k\right) \tag{34}$$

因此：

$$a_k = \frac{var\left(I_k\right)}{var\left(G_k\right)+\varepsilon} \tag{35}$$

$$b_k = mean\left(I_k\right) - a_k mean\left(I_k\right) = \left(1-a_k\right) mean\left(I_k\right) \tag{36}$$

3. 数值实验

为了验证本文的笛卡尔网格流场自适应优化方法在模拟含运动物体的非定常流场中的有效性，我们对低马赫数来流流过振荡圆柱的经典算例进行模拟。设置壁面边界条件为绝热、不可穿透条件, 计算域大小约为[-20D, 60D]×[-30D, 30D] (D 为圆柱直径)，来流马赫数为 0.25，雷诺数为 185，入口条件设置为自由来流，出口以及顶部边界条件为外插。圆柱运动表示为单频振荡：

$$y_c\left(t\right) = A\sin\left(2\pi f_e t\right) \tag{37}$$

其中：t 为无量纲模拟时间，y_c 为圆柱中心位置，A 为振幅，f_e 为振荡频率。参照既有研究，设定 $A/D = 0.2$。为匹配现有经典实验与模拟结果，将静止圆柱自然脱落频率 f_0 取为 0.191。对振荡频率 f_e / f_0 = 1.1 的振荡圆柱问题进行了研究。网格首先根据圆柱体的几何形状进行自适应加密，以确保物体附近的网格精度，其中第一层网格的宽度为 D /125。计算过程中，无量纲时间步长设置为 $5\times e^{-5}$，总网格数每 20 步进行一次自适应加密或粗化，缓冲层数为 8 层，块加密区域大小设置为[-1: 13] × [-3.5: 3.5]，块加密层级设置为 3 层。滤波前的尾迹演化结果与对应的网格分布如图 7 所示。可以看出：因为块加密层级不足，

此时自适应判据极易受到数值噪声的干扰，导致大量区域被错误加密（图7中红色矩形区域），影响整体计算结果。因此，我们在每次流场自适应过程中都增加滤波优化。参考图像处理中的常用参数范围，设置滤波窗口半径为 2，正则化参数 ε 为 0.2，这一参数设置可以使得窗口能覆盖足够的邻点以进行有效滤波，同时也能避免因为窗口过大而过度平滑真实流动特征。得到的尾迹演化结果与对应的网格分布和升力（C_L）和阻力（C_D）系数分别如图 8 和图 9 所示，可以看出：滤波优化后数值噪声得到有效抑制，误加密区域大幅减少。传统方法需 6 层块加密（初始网格>13 万）才能达到类似效果，而本文方法仅需 3 层加密（初始网格 20530），计算 200 无量纲时间后网格量维持在 6-8 万，整体计算耗时相应显著降低，这表明本文的滤波优化方法能够极大地降低计算开销并提升整体的计算效率。同时，升阻力系数也验证了计算结果的可靠性。

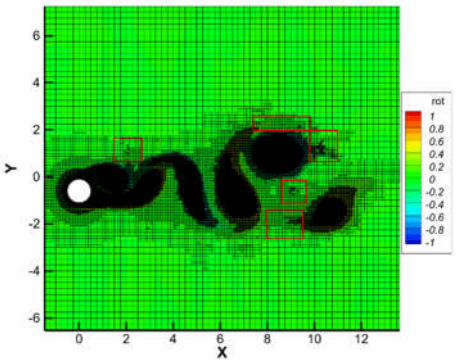


图 7. 尾迹演化结果与对应的网格分布（滤波前）

Fig. 7. Wake evolution results and mesh distribution (without filter)

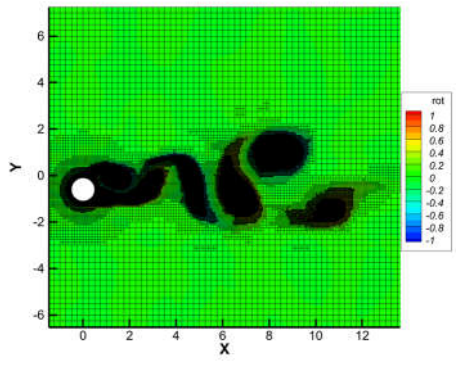


图 8. 尾迹演化结果与对应的网格分布（滤波后）

Fig. 8. Wake evolution results and mesh distribution (with filter)

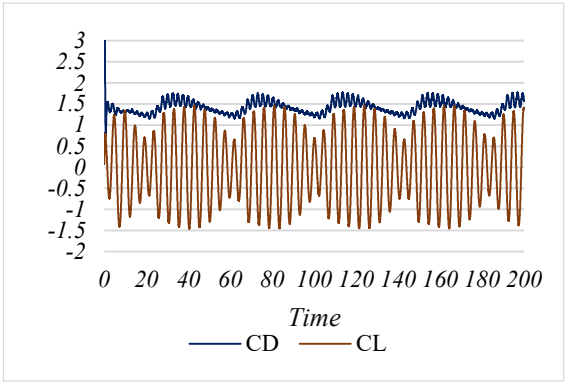


图 9. 升力阻力系数变化图示

Fig.9. Time history plots of lift and drag coefficients

4. 结论与展望

本文成功将导向滤波引入笛卡尔网格流场自适应过程中，有效提升了对含运动物体的非定常流动的模拟效率。该方法在保证关键流动结构分辨率的前提下，仅需在物体周围施加低层级块加密，显著降低了网格总量与计算开销，提升了整体的计算效率。通过振荡圆柱绕流的经典算例验证了该方法的可靠性。在后续研究中可进一步探索高性能滤波器，并将其应用于更复杂的运动场景以检验其普适性。

参考文献：

[1] De Zeeuw DL. A quadtree-based adaptively-refined cartesian-grid algorithm for solution of the euler equations [D]. Michigan: University of Michigan (United States), 1993.

[2] Singh K P , Baysal O .Three-dimensional unstructured method for flows past bodies in 6-DOF relative motion. Proceedings of 6th International Symposium on CFD, Vol. 3 [C]. Univ. of California, Davis, CA, 1995.

[3] Basting, Steffen , et al. "Extended ALE Method for fluid–structure interaction problems with large structural displacements." [J]. Journal of Computational Physics, 2016, 331:312-336.

[4] Li Y C, Dai Y T, Hu J L, Yang C. Numerical investigation on stall flutter of an airfoil with split drag rudder[J]. Journal of Fluids and Structures, 2022, 114: 103718.

[5] Li X F, Liu Y, Qian Z S. Applications of Overset Grid Technique to CFD Simulation of High Mach Number Multi-body Interaction/Separation Flow[J]. Procedia Engineering, 2015, 99: 458-476.

[6] Fan, N., Li, J., Gao, H., Duan, W., Yuan, X., & Bi, L. A high-fidelity simulation method for moving bodies in flow fields based on dynamic Cartesian grids [J]. Physics of Fluids, 2025,37(9).

[7] Hu Ou. Development of cartesian grid method for complex compressible flows and its ap-plications. [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautic, 2013. [胡偶. 可压缩复杂流动笛卡尔网格方法研究及应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2013.]

[8] Balasubramanian R, Newman JC. Comparison of adjoint-based and feature-based grid adaptation for functional outputs [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 53(10): 1541-1569.

[9] C. Tomasi & R. Manduchi. Bilateral Filtering for Gray and Color Images [J]. Proc. IEEE Intl Computer Vision Conf, 1998.

[10] M. Zhang & B. K. Gunturk. "Multiresolution Bilateral Filtering for Image Denoising," [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, vol. 17, no. 12, pp. 2324-2333.

[11] C. -A. Deledalle, L. Denis & F. Tupin. "Iterative Weighted Maximum Likelihood Denoising With Probabilistic Patch-Based Weights," [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, vol. 18, no. 12, pp. 2661-2672.

[12] M. Elad, "On the origin of the bilateral filter and ways to improve it," [J]. IEEE Transactions on Image Processing,2002, vol. 11, no. 10, pp. 1141-1151.

[13] K. He, J. Sun & X. Tang, "Guided Image Filtering," [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2013, vol. 35, no. 6, pp. 1397-1409.

[14] Yang X , Zhang X , Li Z ,et al. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations[J].Journal of Computational Physics, 2009, 228 (20):7821-7836.

[15] Schneiders L , Hartmann D , Meinke M ,et al. An accurate moving boundary formulation in cut-cell methods[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 235(Complete):786-809.

[16] Luo Canyan. Immersed boundary Cartesian grid numerical method and its application in high-speed train aerodynamics [D]. Changsha: Central South University, 2024. [罗灿炎. 浸入式笛卡尔网格数值方法及高速列车气动性能应用研究. [D]. 长沙: 中南大学, 2024.]

[17] Van Albada G D, Van Leer B, Roberts Jr W W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics[M]//Upwind and high-resolution schemes. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1997: 95-103.

[18] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. Journal of computational physics, 1981, 43(2): 357-372.

[19] Zhu H, Qiu J. An h-adaptive RKDG method with troubled-cell indicator for two-dimensional hyperbolic conservation laws[J]. Advances in Computational Mathematics, 2013, 39(3): 445-463.

基于特征图的B-Rep模型简化技术研究

邓龙威[1,2]，尹俊辉[1,2*]，王红旭[1,2]，韦清源[1,2]，胡玉禄[1,2]，李斌[1,2]

（1. 电子科技大学，电子科学与工程学院，成都　611731）；

（2. 电子科技大学，大型电磁工业软件教育部重点实验室，成都　611731）；

摘　要：在计算机辅助设计中，圆角特征广泛存在于B-Rep模型，通常用于消除锐边并改善产品外观；但在计算机辅助工程中，复杂圆角特征会引入非线性曲面，增加模型预处理和网格生成难度，进而增加仿真计算成本，并可能降低工程分析精度。为此，本文提出一种基于圆角特征网络的B-Rep模型简化方法，实现圆角特征的高精度识别和鲁棒抑制。该方法构建实体模型的面边图，以圆角特征内部边的圆角半径作为图边权重，结合圆角面的凹凸性和退化性，构建并分类等半径、非等半径及退化圆角特征网络；在抑制阶段，采用支撑面延伸求交和布尔运算依次处理各类网络，将边圆角面还原为边、点圆角面还原为顶点。该方法在自建模型上进行了验证。与HyperMesh相比，复杂手枪模型中本文方法在识别精度相当的情况下平均抑制率为79%，HyperMesh为59%；控制器模型中抑制率分别为100%和48.6%；钣金零件中分别为94%和67%。结果表明，该方法可用于CAE前处理中的工程模型简化。

关键词：圆角特征，圆角特征识别，圆角特征抑制，面边图，模型简化

0 引　言

圆角特征是在边界表示（boundary representation，B-Rep）模型的边或顶点处引入光滑过渡面，以替代锐边或尖角的几何特征[1]。圆角处理可降低应力集中，改善产品表面质量，并提高安全性、美观性和可制造性；但在计算机辅助工程（computer-aided engineering，CAE）中，复杂圆角特征会增加几何操作和网格划分难度。因此，需要识别并抑制圆角特征，以提高几何处理的鲁棒性并保证后续仿真分析顺利进行。

现有方法分别从B-Rep几何与拓扑推理、面边图、Euler算子和网格模型等角度开展圆角识别与抑制[2-8]，但复杂样条面、变半径圆角以及相互连接的圆角链仍会增加半径估计、网络分组和抑制难度。针对这些问题，本文将圆角面及其内部边的圆角半径写入面边图，结合半径、凹凸性和退化性构建三类圆角特征网络，再采用支撑面延伸求交和布尔运算逐步完成抑制。

1　圆角特征识别与网络构建

B-Rep用顶点、边、面及其连接关系描述实体拓扑，并以曲线和曲面给出精确几何。圆角面是滚球沿相交面滚动形成的光滑过渡面；替代原相交边的为边圆角面，连接多个边圆角面的为点圆角面。圆角面与非圆角相邻面之间满足G1连续的边称为弹簧边，相邻圆角面之间的光滑边称为圆角特征内部边，与圆角面相邻并参与恢复原几何的非圆角面称为支撑面。

解析圆角面的半径直接取其几何参数：圆柱面取圆柱半径，圆环面取次半径，球面取球半径。样条圆角面采用采样点主曲率估计半径：在参数域内取 $N=400$ 个点，分别对两组主曲率排序并剔除首尾各

25%的数据，再根据保留数据的均值和方差选取表征圆角方向的主曲率，其倒数作为带符号圆角半径。随后遍历B-Rep边集合并识别光滑边。一个面仅在自身为非平面光滑曲面、至少含1条光滑边、圆角半径位于用户给定区间$[r_{\min}, r_{\max}]$、相邻支撑面可延伸相交或相互平行时进入圆角面列表。对于缺少直接非圆角支撑面的点圆角候选，其几何类型应为圆环面、球面或样条曲面，并与不少于3个其他圆角面相邻；相邻圆角面及支撑面延伸后应汇交于同一顶点，且至少3条边界边均为光滑边。

设B-Rep面边图为无向图$G=(V,E)$，节点$v_i \in V$对应模型面，图边$e_{ij} \in E$对应两个相邻面共享的B-Rep边。先将所有节点和图边权重置为$c_{\max}$（取模型包围盒最长边），再将圆角面节点权重替换为其圆角半径，将有效圆角特征内部边权重替换为内部边半径；权重为$c_{\max}$的图元素在网络搜索中视为不连通。

等半径网络排除退化圆角面，仅保留半径在容差内相等的相邻圆角面及内部边；删除无效图元素后，每个连通分量构成一个等半径圆角特征网络。非等半径网络同样排除退化圆角面，但不要求相邻圆角面半径相同，内部边权重取两侧圆角面半径的平均值。每个退化圆角面单独形成一个退化网络，再依据凹凸性进入退化凹网络集合或退化凸网络集合。图1给出了等半径与非等半径网络的划分结果。

2 圆角特征网络抑制

对于等半径和非等半径圆角特征网络，先获取网络中所有圆角面的支撑面，删除圆角面，再延伸支撑面进行求交，以恢复被圆角面替代的边或顶点；若延伸求交成功且实体模型不存在间隙，则返回抑制后的模型，否则恢复原模型。退化圆角面的两个相对支撑面平行，不能通过简单延伸得到交线，因此在圆角面位置计算紧凑包围盒（通常为立方体）：对退化凹圆角特征网络执行布尔差运算，对退化凸圆角特征网络执行布尔并运算。

总体流程先构建等半径圆角特征网络集合，并按圆角半径升序逐个抑制；每次抑制成功后更新模型并重新构建网络。等半径网络处理完成后，以相同方式迭代处理非等半径网络，最后依次处理退化凹网络和退化凸网络。该处理顺序与圆角特征生成顺序的逆序一致。

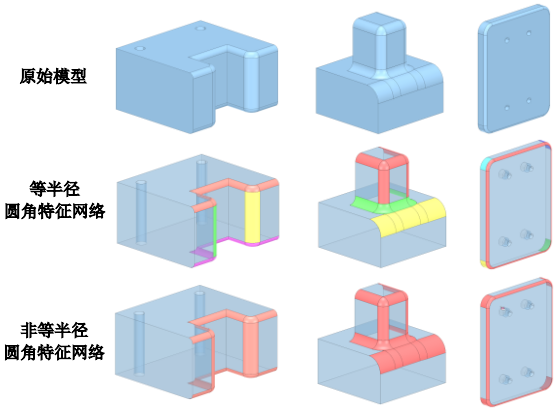


图 1 等半径与非等半径圆角特征网络的划分。不同颜色表示不同网络。

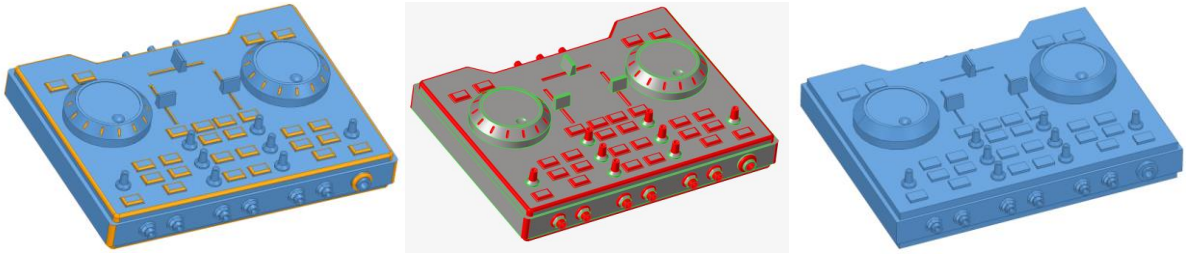
表 1 工程模型圆角特征的平均抑制率

模型	本文方法	HyperMesh
复杂手枪模型	79%	59%
控制器模型	100%	48.6%
钣金零件	94%	67%



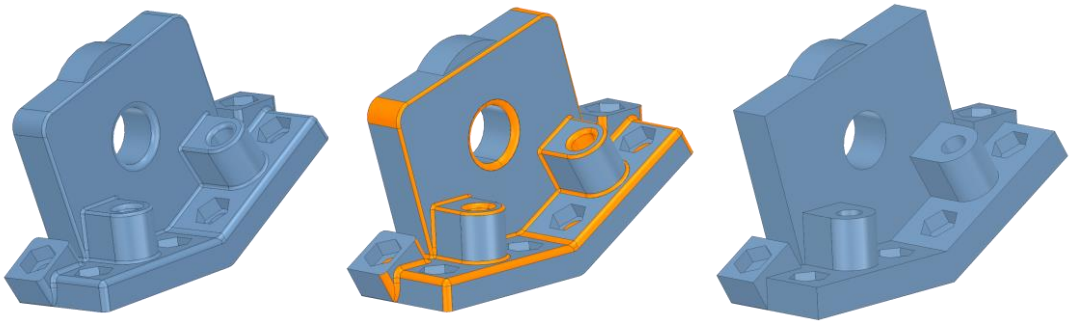
(a) 原始模型　(b) 圆角面识别结果　(c) 抑制后模型

图 2 复杂手枪模型的圆角特征识别与抑制结果。红色区域为本文方法识别的圆角面。



(a) 原始模型　(b) 圆角面识别结果　(c) 抑制后模型

图 3 控制器模型的圆角特征识别与抑制结果。红色区域为本文方法识别的圆角面。



(a) 原始模型　(b) 圆角面识别结果　(c) 抑制后模型

图 4 钣金零件的圆角特征识别与抑制结果。红色区域为本文方法识别的圆角面。

3 实验结果

算法采用C++语言在Visual Studio 2022中实现，并在复杂手枪模型、控制器模型和钣金零件上与HyperMesh进行对比。抑制率定义为 $R_S = (N_r - N_S) / N_r \times 100\%$，其中 N_r 为识别圆角面数，N_S 为抑制后残留圆角面数。表1汇总了英文源稿中的工程模型结果。

复杂手枪模型包含圆柱面、圆环面、球面和样条圆角面，并同时包含等半径、非等半径及退化圆角特征网络。图2给出了原始模型、本文方法的识别结果和抑制后模型。在半径区间0.001－1.3下，本文方法识别247个圆角面，抑制后残留50个，抑制率为80%；4组半径区间的平均抑制率为79%，HyperMesh为59%。

控制器模型包含多个功能区域和复杂局部圆角结构。图3给出了原始模型、本文方法的识别结果和抑制后模型。在半径区间0.1－5.0下，本文方法识别386个有效圆角面并全部抑制；HyperMesh识别579个面，其中包含圆柱连接件和按钮等误识别区域，抑制后仍残留232个圆角面。4组半径区间内，两种方法的平均抑制率分别为100%和48.6%。

钣金零件在图4，展示其原始模型、本文方法的识别结果和抑制后模型。本文方法未将圆柱孔误识别为圆角面，抑制率为94%，HyperMesh为67%；对于模型中半径变化剧烈且曲率密集的区域，本文方法仍有少量圆角未完全抑制，但简化结果保持拓扑和几何有效。

4 结　论

本文提出一种基于圆角特征网络的B-Rep模型简化方法。算法构建实体模型的面边图，以圆角特征内部边的圆角半径作为图边权重，结合凹凸性和退化性，将圆角特征划分为等半径、非等半径和退化三类网络；随后采用支撑面延伸求交和布尔运算依次抑制各类网络，将边圆角面还原为边、点圆角面还原为顶点，并保持简化模型的几何有效性和拓扑一致性。工程模型实验结果表明，所提方法能够准确识别并鲁棒抑制多种类型的圆角特征。

参 考 文 献:

[1] ZHU H, MENQ C H. B-Rep model simplification by automatic fillet/round suppressing for efficient automatic feature recognition[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(2):109-123.

[2] KÓS G, MARTIN R R, VÁRADY T. Methods to recover constant radius rolling ball blends in reverse engineering[J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(2):127-160.

[3] VENKATARAMAN S, SOHONI M, ELBER G. Blend recognition algorithm and applications[C]//Proceedings of the Sixth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications. 2001:99-108.

[4] CUI X, GAO S, ZHOU G. An efficient algorithm for recognizing and suppressing blend features[J]. Computer-Aided Design and Applications, 2004, 1(1-4):421-428.

[5] LAI J Y, WONG C, HUYNH T T, et al. Small blend suppression from B-Rep models in computer-aided engineering analysis[J]. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2016, 39(6):735-745.

[6] SLYADNEV S E, TURLAPOV V E. Simplification of CAD models by automatic recognition and suppression of blend chains[J]. Programming and Computer Software, 2020, 46(3):233-243.

[7] GAO S, ZHAO W, LIN H, et al. Feature suppression based CAD mesh model simplification[J]. Computer-Aided Design, 2010, 42(12):1178-1188.

[8] JIANG J E, WANG H, ZHAO M, et al. DeFillet: Detection and removal of fillet regions in polygonal CAD models[J]. ACM Transactions on Graphics, 2025, 44(4):1-19.

RESEARCH

A wavelet-attention physics-informed Fourier residual network for structured mesh generation

Junshen Chen[1,2], Hangrui Zhang[1,2], Xiaoqiang Teng[1,2], Haisheng Li[1,2*], Yilin Song[3], Xianbang Dai[4], Yingbin Zhang[4], Min Li[3] and Haoxuan Zhang[5]

*Correspondence: lihsh@th.btbu.edu.cn
[1]School of Computer and Artificial Intelligence, Beijing Technology and Business University, Beijing, China
[2]Beijing Key Laboratory of Business Data Security Protection and Intelligent Governance, Beijing, China
[3]China Ship Scientific Research Center, Jiangsu, China
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

The rise of physics-informed neural networks (PINNs) has driven intelligent innovation in structured mesh generation. However, MLP- or KAN-based models may have difficulty representing rapidly varying coordinate mappings and their derivatives under the considered training settings. In this paper, we propose a structured mesh generation method based on wavelet-attention physics-informed Fourier residual network, WPFNet. First, a wavelet-attention-based feature representation enhancing module is designed. By using a basis function prior, the network initially learns on a basis closer to the physical solution space. Next, a Fourier residual network is used to effectively extract the encoded features. Finally, a dynamic physics-informed loss function is proposed. The physics information term dynamically introduces multiple PDEs during the learning process, resulting in a reduction in the negative area elements while maintaining mesh quality. Experimental results show WPFNet outperforms state-of-the-art methods, yielding high-quality meshes without prepared data.

Keywords: Mesh generation; Physics-informed neural networks; Deep learning

0 Introduction

Mesh generation is critical in numerical simulation and CFD preprocessing [1–3], mapping the computational domain to the physical domain [4]. High-quality structured meshes improve accuracy and convergence, but manual operations and expert experience [5] cannot satisfy the large-scale data demand of deep learning [6]. Self-supervised, data-free PINNs, which embed PDE constraints into the loss function, are popular for solving PDEs [7–10] and have become an important solution for mesh generation. Since mesh generation essentially solves PDEs for domain mapping, PINN-based methods have drawn attention. MGNet [11] first applied self-supervised neural networks, and PINN-MG [12] further integrated Navier-Lamé and attention to generate high-quality meshes. Both methods use MLP architectures. The representation of coordinate derivatives depends on both the network architecture and the activation function; smooth activations alone do not establish accurate derivative approximation. KAN [13] places learnable activations on edges for stronger representation; Peng et al. [14] introduced KAN into mesh generation, and Zhang et al. [15] further combined it with Navier-Lamé constraints to optimize boundary representation.

Our work presents a structured mesh generation method based on three core components: a wavelet-attention feature module with basis-function priors and feature-wise fusion, a Fourier residual network that captures both global and local geometric

features, and a dynamic physical constraint loss that incorporates Laplace terms, progressively introduced Navier–Lamé terms, and Jacobian positivity constraints.

1 Method

WPFNet (Figure 1) learns the mapping $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ from the computational domain to the physical domain for structured mesh generation.

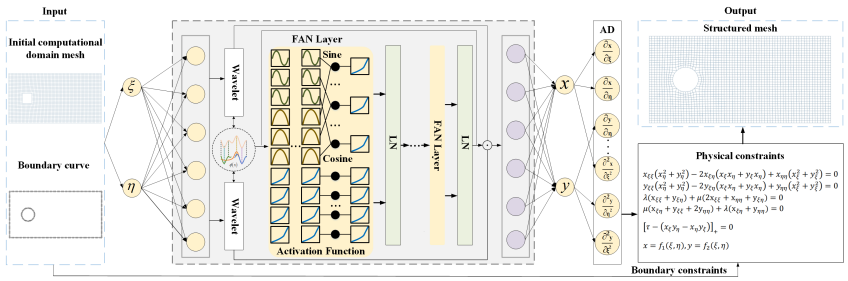


Figure 1 Schematic overview of WPFNet. Computational coordinates are encoded using learnable sinusoidal features and processed by Fourier residual blocks. The residual additions and feature-wise fusion are specified in Equation (5). Automatic differentiation supplies the coordinate derivatives required by the training residuals. AD denotes automatic differentiation, and LN denotes layer normalization.

1.1 Feature Representation Enhancing Module

We use a batch-wise row-vector convention. Let $Q \in \mathbb{R}^{N\times 2}$ contain the computational coordinates, and let $\widehat{P} \in \mathbb{R}^{N\times 2}$ contain the predicted physical coordinates. The input embedding and output projection are

$$\begin{aligned} H_0 &= QW_{\text{in}}^{\mathsf{T}} + b_{\text{in}}, \\ \widehat{P} &= Z^{(L)}W_{\text{out}}^{\mathsf{T}} + b_{\text{out}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Here, $W_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{D\times 2}$, $W_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{2\times D}$, and biases are broadcast across the batch dimension. Superscript T denotes matrix transposition, whereas (ℓ) denotes a layer index. The channel-wise sinusoidal activation is defined as

$$\phi(A) = w_1 \odot \sin(A) + w_2 \odot \cos(A). \tag{2}$$

We refer to ϕ as the Wavelet activation. The vectors $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^D$ are initialized to one and learned during training. The two encoders are defined by

$$\begin{aligned} U &= \phi(H_0W_U^{\mathsf{T}} + b_U), \\ V &= \phi(H_0W_V^{\mathsf{T}} + b_V). \end{aligned} \tag{3}$$

The encoders use separate affine transformations, with $W_U, W_V \in \mathbb{R}^{D\times D}$, and share the activation parameters w_1 and w_2. Both U and V have shape $N \times D$. They are computed once per forward pass and reused across all layers.

1.2 Fourier Residual Network

For a feature tensor $Z \in \mathbb{R}^{N\times D}$, the Fourier feature map of layer ℓ is defined as

$$\begin{aligned} P^{(\ell)}(Z) &= Z(W_p^{(\ell)})^{\mathsf{T}} + b_p^{(\ell)}, \\ T^{(\ell)}(Z) &= Z(W_g^{(\ell)})^{\mathsf{T}} + b_g^{(\ell)}, \\ F^{(\ell)}(Z) &= \mathrm{concat}\big[\cos(P^{(\ell)}(Z)),\, \sin(P^{(\ell)}(Z)), \\ &\qquad\qquad \mathrm{ELU}(T^{(\ell)}(Z))\big]. \end{aligned} \tag{4}$$

Concatenation is performed along the feature dimension, where $W_p^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{d_p\times D}$ and $W_g^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{d_g\times D}$. We set $d_p = \lfloor 0.4D \rfloor$ and $d_g = D - 2d_p$, so that $F^{(\ell)}(Z)$ has the same shape as Z. The implemented residual block returns $Z + \mathrm{LN}^{(\ell)}(F^{(\ell)}(Z))$. An additional addition of the incoming state is performed before feature fusion. Starting from $Z^{(0)} = U$, the resulting update is

$$\begin{aligned} H^{(\ell)} &= \mathrm{LN}^{(\ell)}\left(F^{(\ell)}(Z^{(\ell-1)})\right), \\ G^{(\ell)} &= 2Z^{(\ell-1)} + H^{(\ell)}, \\ Z^{(\ell)} &= (\mathbf{1} - G^{(\ell)}) \odot U \\ &\quad + G^{(\ell)} \odot (V + \mathbf{1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Here, $\ell = 1, \ldots, L$, and $\mathrm{LN}^{(\ell)}$ denotes layer normalization over the feature dimension. The coefficient 2 accounts for the two residual additions. $H^{(\ell)}$ denotes only the normalized feature branch, $G^{(\ell)}$ is the fusion coefficient tensor, and $Z^{(\ell)}$ is the updated state. All three tensors have shape $N \times D$. The symbol $\odot$ denotes element-wise multiplication, and $\mathbf{1}$ is an all-ones tensor of matching shape. The fusion coefficients are not restricted to $[0, 1]$. In the implementation, $D = 16$, $L = 6$, $d_p = 6$, and $d_g = 4$. The final state $Z^{(L)}$ is projected to physical coordinates using Equation (1).

1.3 Dynamic Physical Constraint Loss

We design a loss with three physics terms that are introduced progressively. The geometric Laplace residual is intended to promote smooth coordinate mappings and regular mesh-node distributions:

$$\begin{aligned} &x_{\xi\xi}(x_\eta^2 + y_\eta^2) - 2x_{\xi\eta}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + x_{\eta\eta}(x_\xi^2 + y_\xi^2) = 0, \\ &y_{\xi\xi}(x_\eta^2 + y_\eta^2) - 2y_{\xi\eta}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + y_{\eta\eta}(x_\xi^2 + y_\xi^2) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

The Navier–Lamé equation is introduced in the last 40 % of training for shape and angle optimisation:

$$\begin{aligned} &\lambda(x_{\xi\xi} + y_{\xi\eta}) + \mu(2x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} + y_{\xi\eta}) = 0, \\ &\mu(x_{\xi\eta} + y_{\xi\xi} + 2y_{\eta\eta}) + \lambda(x_{\xi\eta} + y_{\eta\eta}) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

An additional Jacobian penalty is used to discourage small or negative Jacobian determinants at sampled interior points:

$$w_J(s)\big[\tau - (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)\big]_+ = 0, \qquad [\,\cdot\,]_+ = \max(0, \cdot) \tag{8}$$

The full PDE loss combines the three terms with time-dependent weights $\alpha(s)$ and $w_J(s)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{pde}} = \frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1} w_j \Bigg[&\Big\| \alpha(s)\Big[\lambda\big(x_{\xi\xi}+y_{\xi\eta}\big)+\mu\big(2x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta}+y_{\eta\xi}\big)\Big] \\ &\quad + (1-\alpha(s))\Big[x_{\xi\xi}(x_{\eta\eta}+y_{\eta\eta}) - 2x_{\xi\eta}(x_\xi x_\eta + y_\xi x_\eta) + x_{\eta\eta}(x_{\xi\xi}+y_{\xi\xi})\Big]\Big\|^2 \\ &+ \Big\| \alpha(s)\Big[\lambda\big(x_{\xi\eta}+y_{\eta\eta}\big)+\mu\big(x_{\xi\eta}+y_{\xi\xi}+2y_{\eta\eta}\big)\Big] \\ &\quad + (1-\alpha(s))\Big[y_{\xi\xi}(x_{\eta\eta}+y_{\eta\eta}) - 2y_{\xi\eta}(x_\xi x_\eta + y_\xi x_\eta) + y_{\eta\eta}(x_{\xi\xi}+y_{\xi\xi})\Big]\Big\|^2 \\ &+ \Big\| w_J(s)\big[\tau - (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)\big]_+ \Big\|^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{9}$$

The weights are defined piecewise:

$$\alpha(s) = \begin{cases} 0, & 0 \le s \le s_1, \\ \varepsilon\,\dfrac{s-s_1}{s_2-s_1}, & s_1 < s < s_2, \\ \varepsilon, & s \ge s_2, \end{cases} \qquad w_J(s) = \begin{cases} 0, & s < 0.7, \\ \omega_J, & s \ge 0.7. \end{cases} \tag{10}$$

Boundary conditions are enforced by

$$\mathcal{L}_{\text{bc}} = \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2} w_k\Big(\|x - f_1(\xi,\eta)\|^2 + \|y - f_2(\xi,\eta)\|^2\Big) \tag{11}$$

The total loss is $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{pde}} + \mathcal{L}_{\text{bc}}$.

2 Conclusions

We present WPFNet for self-supervised structured mesh generation without requiring a precomputed labeled mesh dataset. The method combines learnable sinusoidal features, a Fourier residual network, and scheduled physics-informed training. The reported experiments show competitive performance across the tested geometries, with improvements in selected mesh-quality and validity metrics. Further controlled ablation studies are needed to quantify the individual contributions of the proposed components.

Appendix

Acknowledgements
This work is supported by National Science and Technology Major Project (2025ZD1600600).

Author details
[1]School of Computer and Artificial Intelligence, Beijing Technology and Business University, Beijing, China. [2]Beijing Key Laboratory of Business Data Security Protection and Intelligent Governance, Beijing, China. [3]China Ship Scientific Research Center, Jiangsu, China. [4]China State Shipbuilding Corporation limited 11th Research Institute, Shanghai, China. [5]School of Software, Beihang University, Beijing, China.

References

1. Timothy J Baker, "Mesh generation: Art or science?," *Progress in aerospace sciences*, vol. 41, no. 1, pp. 29–63, 2005.
2. Andrew W Cary, John Chawner, Earl P Duque, William Gropp, William L Kleb, Raymond M Kolonay, Eric Nielsen, and Brian Smith, "Cfd vision 2030 road map: Progress and perspectives," in *AIAA aviation 2021 forum*, 2021, p. 2726.
3. Xinhai Chen, Zhichao Wang, Liang Deng, Junjun Yan, Chunye Gong, Bo Yang, Qinglin Wang, Qingyang Zhang, Lihua Yang, Yufei Pang, et al., "Towards a new paradigm in intelligence-driven computational fluid dynamics simulations," *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 2407005, 2024.
4. Per-Olof Persson and Gilbert Strang, "A simple mesh generator in matlab," *SIAM review*, vol. 46, no. 2, pp. 329–345, 2004.
5. Fengshun Lu, Long Qi, Xiong Jiang, Gang Liu, Yang Liu, Bo Chen, Yufei Pang, and Xingzhi Hu, "Nnw-gridstar: interactive structured mesh generation software for aircrafts," *Advances in Engineering Software*, vol. 145, pp. 102803, 2020.
6. Na Lei, Zezeng Li, Zebin Xu, Ying Li, and Xianfeng Gu, "What's the situation with intelligent mesh generation: A survey and perspectives," *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 30, no. 8, pp. 4997–5017, 2023.
7. Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George E Karniadakis, "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations," *Journal of Computational physics*, vol. 378, pp. 686–707, 2019.
8. Maziar Raissi, Alireza Yazdani, and George Em Karniadakis, "Hidden fluid mechanics: Learning velocity and pressure fields from flow visualizations," *Science*, vol. 367, no. 6481, pp. 1026–1030, 2020.
9. Lu Lu, Xuhui Meng, Zhiping Mao, and George Em Karniadakis, "Deepxde: A deep learning library for solving differential equations," *SIAM review*, vol. 63, no. 1, pp. 208–228, 2021.
10. George Em Karniadakis, Ioannis G Kevrekidis, Lu Lu, Paris Perdikaris, Sifan Wang, and Liu Yang, "Physics-informed machine learning," *Nature Reviews Physics*, vol. 3, no. 6, pp. 422–440, 2021.
11. Xinhai Chen, Tiejun Li, Qian Wan, Xiaoyu He, Chunye Gong, Yufei Pang, and Jie Liu, "Mgnet: a novel differential mesh generation method based on unsupervised neural networks," *Engineering with Computers*, vol. 38, no. 5, pp. 4409–4421, 2022.
12. Min Wang, Haisheng Li, Haoxuan Zhang, Xiaoqun Wu, and Nan Li, "Pinn-mg: A physics-informed neural network for mesh generation," *arXiv preprint arXiv:2503.00814*, 2025.
13. Ziming Liu, Yixuan Wang, Sachin Vaidya, Fabian Ruehle, James Halverson, Marin Soljačić, Thomas Y Hou, and Max Tegmark, "Kan: Kolmogorov-arnold networks," *arXiv preprint arXiv:2404.19756*, 2024.
14. Jiaming Peng, Xinhai Chen, Qingyang Zhang, Liang Deng, Liming Shen, and Jie Liu, "A data-free kolmogorov–arnold network-based method for structured mesh generation," *Physics of Fluids*, vol. 36, no. 11, 2024.
15. Haoxuan Zhang, Min Wang, Haisheng Li, and Nan Li, "Meshkinn: A self-supervised mesh generation model based on kolmogorov–arnold-informed neural network," *Expert Systems with Applications*, vol. 275, pp. 126959, 2025.
16. Yihong Dong, Ge Li, Yongding Tao, Xue Jiang, Kechi Zhang, Jia Li, Jinliang Deng, Jing Su, Jun Zhang, and Jingjing Xu, "Fan: Fourier analysis networks," *arXiv preprint arXiv:2410.02675*, 2024.
17. Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun, "Deep residual learning for image recognition," in *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2016, pp. 770–778.
18. Haoxuan Zhang, Haisheng Li, and Nan Li, "Meshlink: a surface structured mesh generation framework to facilitate automated data linkage," *Advances in Engineering Software*, vol. 194, pp. 103661, 2024.

融合局部邻域特征与全局注意力的自适应网格生成方法

申莹莹[1]，张浩轩[2]，吴晓群[1,*]，滕晓强[1]，李海生[1]

（1. 北京工商大学计算机与人工智能学院，北京

2. 北京航空航天大学软件学院，北京）

摘　要：自适应网格生成通过调整不同区域的网格尺寸，在计算成本与离散精度之间取得平衡。现有尺寸场预测方法多采用图消息传递网络，从当前节点的有限邻域提取几何特征。随着迭代过程中网格不断加密，相同网络层数所覆盖的实际空间范围逐渐减小，因而难以同时利用孔洞两侧、细长区域两端以及相距较远边界的几何信息。针对这一问题，本文提出一种融合局部邻域特征与全局注意力的自适应网格生成方法。该方法首先在当前网格上通过消息传递网络提取节点邻域特征，同时在固定的初始粗网格上利用 Transformer 计算不同粗节点之间的关系；随后将粗网格特征映射至当前网格，并通过门控残差结构与局部特征融合，预测各节点的残差尺寸。训练阶段采用专家网格投影得到监督尺寸，并将模型生成的中间网格加入回放缓冲区；推理阶段重复执行尺寸预测、连续插值和网格重构，直至得到目标网格。由于自注意力仅作用于节点数固定且较少的粗网格，该方法能够引入整体几何信息，同时避免在高分辨率网格上直接计算全节点自注意力所产生的较高开销。

关键词：自适应网格生成；图消息传递；Transformer；尺寸场预测；计算流体力学

0　引　　言

有限元和计算流体力学以离散网格承载几何、边界条件与数值未知量，网格分辨率直接影响离散误差、求解稳定性及计算开销[1-3]。传统自适应方法通常依赖先验误差估计、经验细化准则或人工设置尺寸场；当几何、载荷和物理条件变化时，往往需要重新设计局部加密策略[4][5]。数据驱动方法则通过学习局部尺寸、误差指示量或网格调整策略[6][7]，为复杂条件下的自动网格生成提供了新的实现路径[8-10]。

自适应网格生成分解为可学习的尺寸场预测和非参数网格重构两个环节[11]。模型从均匀粗网格出发，在每一步根据当前中间网格预测顶点尺寸，经分片线性插值后驱动网格生成器产生下一中间网格；训练时把专家网格的单元尺度投影至模型生成网格，并利用模型自身轨迹构建回放数据，从而减小训练与推理阶段的分布差异。然而，层级图中的信息通过相邻节点逐层交换信息[12]。对于多孔结构、细长区域或多个相互分离的关键区域，两个空间位置之间往往相隔较多图边，有限层网络难以在一次预测中同时利用这些区域的信息。增加消息传递层数虽然可以扩大覆盖范围，但会增加计算量，并可能减弱节点特征之间的差异[13-15]。基于此，本文在初始粗层级上引入全局 Transformer，并与当前网格 MPN 进行跨尺度融合，共同用于节点尺寸预测。

1　方　　法

1.1　总体架构

本文方法的总体流程如图 1 所示。对于第 t 步中间网格M^t，局部分支在图$G^t = (V^t, E^t)$上聚合相邻节

点和边的信息，以描述节点附近的几何形态与网格尺度。全局分支使用固定的初始粗网格 G^0：先将当前网格特征汇总到对应的粗节点，再通过 Transformer 计算各粗节点之间的关联，使相距较远区域的几何信息可以参与当前节点的尺寸估计。两类特征映射到同一当前节点后进行融合，由解码器输出该节点的残差尺寸。离散的节点尺寸经分片线性插值形成连续尺寸场，并由网格生成器产生下一中间网格M^{t+1}。上述过程循环执行，直至相邻两轮尺寸场的相对变化量小于阈值ε，或迭代次数达到上限$T_{\max}$随后输出当前自适应网格。

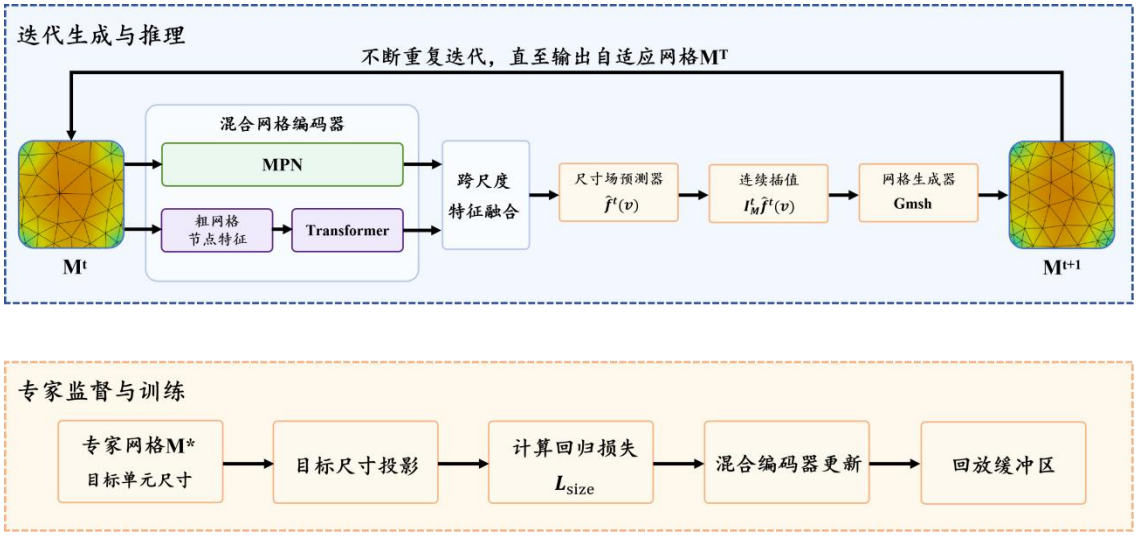


图 1　协同自适应网格生成总体架构

1.2　局部编码与迭代尺寸场预测

由中间网格节点、边及任务条件共同构成输入。节点特征可包含当前离散尺寸、节点度数、边界或过程条件，边特征描述相对位移、长度及局部邻接关系；所有连续特征按回放数据的运行统计量进行标准化。MPN 在当前网格上更新边与节点隐变量：

$$h_e^{l+1} = h_e^l + \psi_e^l(h_v^l, h_u^l, h_e^l), \qquad h_v^{l+1} = h_v^l + \psi_v^l(h_v^l, \Sigma_{e=(v,u)} h_e^{l+1})$$

其中，ψ_e^l和ψ_v^l均由多层感知机实现，边信息采用与排列顺序无关的求和方式进行聚合。该分支直接依据网格连接关系传递信息，主要描述相邻单元的尺寸变化、边界附近的几何差异以及局部尺度的过渡情况。尺寸预测仍采用顶点参数化。设b_v^t为由当前邻接单元平均边长加权得到的基准尺寸，解码器只学习相对该基准的残差x_v^t，并通过 Softplus 保证输出为正：

$$\hat{f}^t(v) = softplus(x_v^t + softplus^{-1}(b_v^t))$$

离散预测经当前网格的节点基函数插值得到连续场$I_M^t(\hat{f}^t)$，随后由网格生成器完成一次重构：

$$\mathrm{M}^{t+1} = \mathrm{gmsh}(\Omega, \mathrm{c_t I_M^t}(\hat{\mathrm{f}}^t)), \quad t = 0, \ldots, T-1$$

推理阶段采用预设最大迭代次数作为终止条件。对于每个样本，从均匀粗网格开始依次执行尺寸预测、连续尺寸场插值和网格重构；当迭代次数达到$T_{\max}$时停止更新，并将$M^{T_{\max}}$作为最终输出。$T_{\max}$根据验证集上网格分辨率误差与生成时间的变化确定。

1.3 粗网格全局特征提取与尺度映射

粗网格特征提取与融合过程首先通过最近节点映射$\pi(v) = argmin_{u\in V^0}||p(v) - p(u)||_2$，将当前网格节点的局部特征汇总到相应的初始粗网格节点。每个粗节点的输入由汇总后的局部特征、任务条件 P 和迭代步编码e_t组成。随后，Transformer 在全部粗节点之间计算自注意力。得到粗网格特征后，利用映射π为每个当前节点找到对应的粗节点，并将二者的特征进行门控残差融合。门值g_v由当前节点的局部特征、对应粗节点的特征和迭代步编码共同计算，用于调节整体几何信息在各节点预测中的权重。融合过程表示为：

$$g_v = \sigma(\mathrm{MLP}([h_{local}^{t}(v); h_{global}^{t}(\pi(v)); e_t])),$$

$$z_v^t = h_{local}^{t}(v) + g_v \odot W_g h_{global}^{t}(\pi(v))$$

其中，z_v^t为输入残差尺寸解码器的节点特征。最近节点映射只需为每个当前节点查询一个粗节点，计算和存储开销较小。进一步的实现采用交叉注意力，使当前节点根据相关性从多个粗节点中选择信息；本文首先采用最近节点映射与门控融合，以便明确评估粗网格整体信息对尺寸预测的影响。

1.4 模型训练

对于回放缓冲区中的中间网格M^t，在专家网格M^*上查询各当前节点所在单元的平均边长，并将其作为监督尺寸y_v^t。局部消息传递网络、粗网格 Transformer、门控融合模块和尺寸解码器采用同一损失函数联合训练。考虑到较小尺寸的绝对误差通常较小，本文在 Softplus 逆变换后的数值空间计算均方误差：

$$L_{size} = (1/|V^t|)\Sigma_v(x_v^t + \mathrm{softplus}^{-1}(b_v^t) - \mathrm{softplus}^{-1}(y_v^t))^2$$

每个训练周期后，按照网格细化阶段从回放缓冲区采样中间网格。模型预测节点尺寸并生成下一中间网格，再通过专家网格投影获得监督尺寸，最后将新样本写入缓冲区。这样，训练数据不仅包含初始粗网格，还包含模型在迭代生成过程中实际产生的不同分辨率网格，从而减小训练样本与推理输入之间的差异。训练阶段仅采用L_{size}，不额外引入粗细一致性损失，以便单独考察网络结构变化带来的影响。

若在全部当前节点上执行标准自注意力，其计算复杂度为$O(|V^t|^2 d)$，会随网格节点数增加而快速增长。本文仅在固定粗网格V^0上计算自注意力，主要计算开销约为$O(|E^t|d + |V^0|^2 d + |V^t|d)$，且$|V^0|$远小于$|V^t|$。因此，当前网格部分仍主要采用与边数近似线性相关的消息传递计算，而较高开销的节点两两关联仅发生在规模较小的粗网格上。

2 结　论

本文针对局部消息传递难以充分利用远距离信息的问题，提出了一种融合局部邻域特征与粗层级全局信息的自适应网格生成方法。该方法将当前网格上的局部几何编码与固定初始粗网格上的全局特征信息相结合，通过跨尺度特征融合实现节点尺寸预测，并以迭代方式完成连续尺寸场更新与网格重构。与仅依赖局部消息传递的方法相比，所提框架为协调不同区域的网格分辨率提供了更直接的信息交互机制。

总之，本文将局部几何感知、粗层级全局建模和迭代网格更新统一到同一学习框架中，为复杂几何条件下的自适应网格生成提供了新的实现思路。后续工作将重点评估各组成模块对网格质量、计算时间与显存开销的影响，并进一步研究其在三维复杂几何和多种物理问题中的适用性。

基金项目：

参 考 文 献：

[1] BRENNER S C, SCOTT L R. The mathematical theory of finite element methods[M]. 3rd ed. New York: Springer, 2008.

[2] HUANG W, RUSSELL R D. Adaptive moving mesh methods[M]. New York: Springer, 2011.

[3] FIDKOWSKI K J, DARMOFAL D L. Review of output-based error estimation and mesh adaptation in computational fluid dynamics[J]. AIAA Journal, 2011, 49(4): 673-694.

[4] FIDKOWSKI K J, CHEN G. Metric-based, goal-oriented mesh adaptation using machine learning[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 426: 109957.

[5] OJHA V, CHEN G, FIDKOWSKI K J. Initial mesh generation for solution-adaptive methods using machine learning[C]//AIAA SCITECH 2022 Forum. 2022: 1244.

[6] YANG J, DZANIC T, PETERSEN B, et al. Reinforcement learning for adaptive mesh refinement[C]//Proceedings of the 26th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. 2023: 5997-6014.

[7] FOUCART C, CHAROUS A, LERMUSIAUX P F J. Deep reinforcement learning for adaptive mesh refinement[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 491: 112381.

[8] ZHANG Z, JIMACK P K, WANG H. MeshingNet3D: Efficient generation of adapted tetrahedral meshes for computational mechanics[J]. Advances in Engineering Software, 2021, 157-158: 103021.

[9] KHAN A, YAMADA M, CHIKANE A, et al. GraphMesh: Geometrically generalized mesh refinement using GNNs[C]//Computational Science—ICCS 2024. Cham: Springer, 2024: 120-134.

[10] FREYMUTH N, DAHLINGER P, WÜRTH T, et al. Swarm reinforcement learning for adaptive mesh refinement[C]//Advances in Neural Information Processing Systems. 2023, 36.

[11] FREYMUTH N, WÜRTH T, SCHREIBER N, et al. AMBER: Adaptive mesh generation by iterative mesh resolution prediction[C]//39th Conference on Neural Information Processing Systems. 2025.

[12] GILMER J, SCHOENHOLZ S S, RILEY P F, et al. Neural message passing for quantum chemistry[C]//Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning. 2017: 1263-1272.

[13] Han K, Xiao A, Wu E, et al. Transformer in transformer[J]. Advances in neural information processing systems, 2021, 34: 15908-15919.

[14] OONO K, SUZUKI T. Graph neural networks exponentially lose expressive power for node classification[C]//International Conference on Learning Representations. 2020.

[15] RAMPÁŠEK L, GALKIN M, DWIVEDI V P, et al. Recipe for a general, powerful, scalable graph transformer[C]//Advances in Neural Information Processing Systems. 2022, 35: 14501-14515.

基于切割单元的并行笛卡尔网格生成方法

葛子恒[1]，李昊宸[2]，肖周芳[2]

（1 苏州舜云工程软件有限公司，苏州 215131）

（2 杭州电子科技大学 计算机学院，杭州 310018）

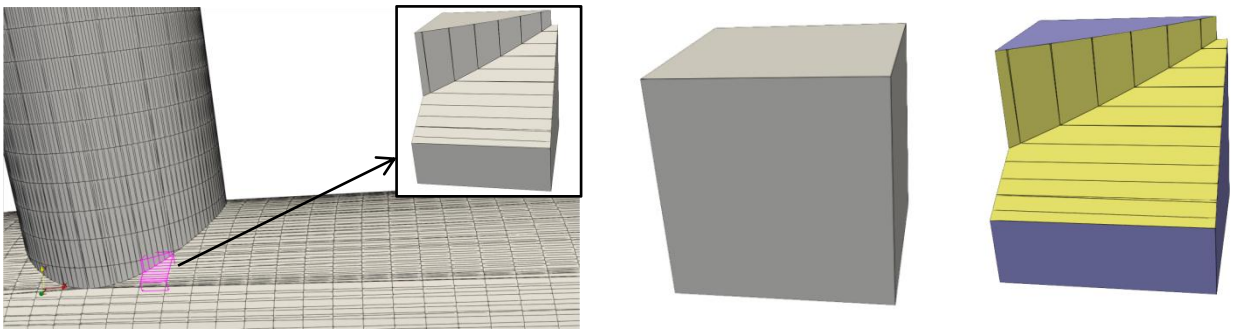
摘　要：笛卡尔网格相比于结构化、非结构网格而言，具有自动化程度高、几何适应性强等优点。其主要难点在于生成保持几何形状的、高质量的边界单元。本文介绍的是国产 CFD 软件 shonFlow 的笛卡尔网格生成器。该网格生成器以水密、无自相交的三角网格作为几何输入，经过简单的参数设置后，即可全自动地生成体网格。其采用的是切割单元（cut-cell）笛卡尔网格方法：首先基于自适应八叉树构建背景网格，再通过边界三角形切割六面体得到任意多面体切割单元，然后通过广度优先搜索获取内部六面体单元。为改善有限体积法求解的稳定性，将体积小于阈值的单元与邻居单元合并。通过对算法的各步骤的设计，使其能够在 CPU 和 GPU 上高效地并行。经过大量算例验证，shonFlow 生成的网格可以满足多种工程应用要求，并且 GPU 上的并行效率可达单线程 CPU 的 30 倍以上。

关键词：网格生成，笛卡尔网格，网格自适应加密，切割单元 cut-cell

0 引　言

在计算流体动力学（CFD）及相关数值模拟领域中，网格生成是连接几何建模与数值求解的关键环节，其质量和效率直接影响模拟精度、计算稳定性以及工程应用周期。相比结构化网格和非结构网格，笛卡尔网格具有数据结构规则、自动化程度高、易于局部自适应加密和并行计算等优点，因此在复杂外形快速网格生成和大规模数值模拟中具有重要应用价值。

早期笛卡尔网格通常采用“台阶型”边界近似方法，即首先生成规则背景网格，再根据单元与几何模型之间的位置关系删除外部单元。该类方法实现简单且鲁棒性较好，但无法精确刻画几何边界，需要在求解时使用浸入边界法对边界单元引入体积源项[1-2]。为改善边界表达精度，常见方法主要包括边界投影法和切割单元法。边界投影法[3-5]通过将靠近几何边界的网格顶点投影到曲面上构造局部贴体单元，或使用过渡单元连接边界贴体单元与内部笛卡尔单元。边界投影法往往可以得到高质量的贴体单元，但在复杂几何、小间隙和多部件构型中容易出现单元畸变或拓扑失败。切割单元法[6-8]则直接利用几何边界裁剪背景六面体单元，在保持内部笛卡尔网格规则性的同时生成贴合边界的任意多面体单元，更适合高自动化的复杂几何网格生成。切割单元法的一个挑战是切割产生的小体积单元会给有限体积法求解带来不稳定性，可以通过与邻居单元的合并来解决这一问题[9]。



(a) 切割单元是贴合几何边界的任意多面体单元　　(b) 左：背景单元，右：构成切割单元的边界面（黄色）与侧切面（蓝色）

图 1 切割单元笛卡尔网格示意图

对于以三角面片表示几何边界的情形，切割单元通常由三角面片被背景单元裁剪形成的边界面、背景六面体侧面被几何边界切割形成的侧切面，以及未被切割的完整面共同组成。因此，切割单元构建的核心问题在于：如何稳定生成切割点、切割边和切割面，并进一步保证由这些局部几何元素封闭形成的

多面体单元具有正确拓扑关系。已有方法中，Aftosmis[6]等基于多边形裁剪构建切割单元，并应用于 Cart3D 等软件；Park[7]等提出了一种 GPU 并行构建切割单元的方法：先计算每个切割平面上的截面曲线，再构建八叉树，最后裁剪切割单元；Tao[8]等进一步通过位编码记录切割点拓扑信息，提高了切割单元的水密性和复杂情形下的适用性。然而，现有方法在自适应八叉树背景网格、多层级邻接关系、复杂侧切面构建以及 GPU 并行实现方面仍面临一定挑战。

基于上述问题，本文提出一种支持自适应八叉树背景网格的并行切割单元笛卡尔网格生成方法，并将其应用于国产 CFD 软件 shonFlow 的网格生成器中。该方法以水密、无自相交的三角表面网格为输入，通过统一的切割点拓扑表示、边界面与侧切面构建、切割单元封闭和小体积单元合并等步骤，自动生成拓扑水密的笛卡尔体网格。同时，本文对主要计算流程进行了面向 CPU 和 GPU 的并行化设计，使其能够满足复杂工程几何的大规模快速网格生成需求。

1 算法介绍

为清晰地描述本文并行切割单元笛卡尔网格的生成流程，算法 1 给出了整体网格生成框架。该方法以输入的三角网格和设定参数为基础，首先根据三角形网格的几何特征和局部加密准则生成自适应八叉树背景网格；随后在叶子单元中构造切割出的边界面，并对重复切割点进行合并，以保证后续拓扑连接的一致性。在此基础上，算法进一步生成未被切割的完整面，分别构造被曲面切割的切割单元（cut-cells）和未被切割的完整单元（full cells），最终组装得到完整的笛卡尔切割体网格。

算法 1 并行切割单元笛卡尔网格的生成

Input: Triangular surface mesh S, Cartesian mesh domain Ω, refinement criteria η

Output: Cartesian cut-cell volume mesh M

Variable: Adaptive octree O, leaf cell set L, boundary face set F_b, cut-point set P_c, cell face set F_c, cut-cell set C_{cut}, full-cell set C_{full}

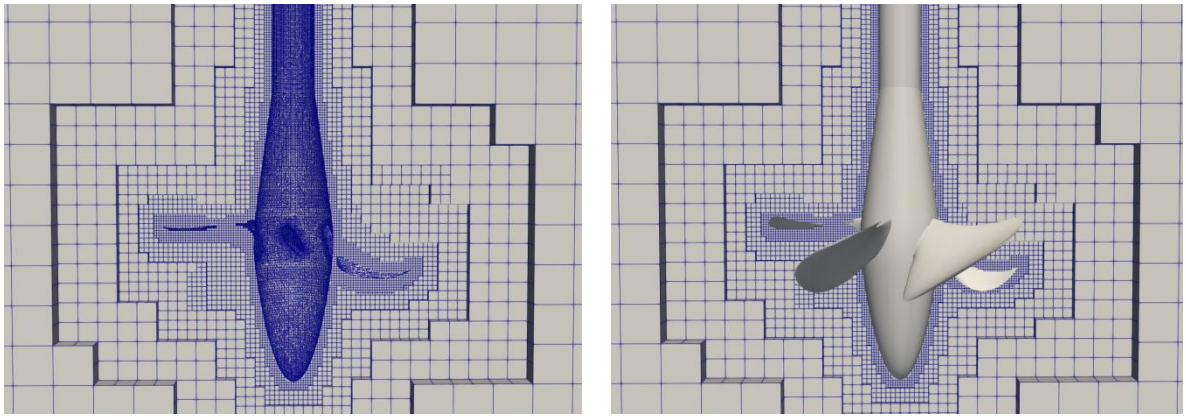
1: $O, L \leftarrow$ GenerateAdaptiveOctree(Ω, S, η)
2: $F_b \leftarrow$ GeneratePatchFaces(L, S)
3: $P_c \leftarrow$ MergeDuplicateCutPoints(F_b)
4: $F_c \leftarrow$ GenerateCellFaces(L, P_c)
5: $C_{cut} \leftarrow$ ConstructCutCells(F_b,F_c)
6: $F_c \leftarrow$ MatchSharedCellFaces(F_c)
7: $C_{full} \leftarrow$ ConstructFullCells(L, F_c)
8: $M \leftarrow$ AssembleVolumeMesh($P_c, F_b, F_c, C_{cut}, C_{full}$)
9: $M \leftarrow$ ComputeGeometricProperties(M)
10: $M \leftarrow$ MergeSmallCells(M)
11: return M

算法 1 简述了笛卡尔切割体网格生成的总体流程，主要由背景网格生成、边界切割信息构造、体单元重建以及网格有效性处理四个阶段组成。首先，算法以三角形网格S、笛卡尔网格区域Ω以及局部加密准则η为输入，并生成自适应八叉树O与有效叶子单元集合L（见第 1 行）。其中，O用于描述背景网格的层级划分结构，决定不同区域的局部分辨率；L则表示后续参与网格生成的叶子单元，是构造切割单元和完整单元的基础。在获得叶子单元L后，算法进一步判断三角形网格S与笛卡尔单元之间的空间相交关系，并在被三角面片切割的单元内生成边界面，记为F_b（见第 2 行）。与此同时，边界面上的交点被收集为切割点集合P_c，并对其中拓扑等价的重复点进行合并（见第 3 行）。随后，算法基于叶子单元L和去重后的切割点集合P_c构造侧切面F_c（见第 4 行）。对于被三角网格切割的笛卡尔单元，算法将边界面F_b与相应的侧切面F_c组合起来，并且自动补全未被切割的完整面，重建拓扑水密的切割体单元集合C_{cut}（见第 5 行）。在切割单元构造完成后，算法对相邻单元之间共享面进行匹配，即对F_c中可能重复生成的共享侧切面建立对应关系（见第 6 行）。对于未被三角形网格切割的背景单元，算法使用广度优先搜索构

造完整单元集合C_{full}（见第 7 行）。最后，算法将切割点P_c、边界面片F_b、背景单元面F_c、切割体单元C_{cut}和完整体单元C_{full}统一组装成最终的笛卡尔网格M（见第 8 行）。随后，计算所有面和单元的几何属性（见第 9 行），然后将小体积单元与其邻居单元合并（见第 10 行）。经过上述处理后，得到的网格M在拓扑上保持水密，在单元面匹配关系上保持一致，并包含面面积和法向量、单元体积和中心等可用于后续数值计算的几何信息。

2 实验结果

本文方法基于 C++与 CUDA 实现，所有实验均在同一台 PC 上进行（CPU：Intel Core i9-10900K 单线程，内存：32GB DDR4，显卡：NVIDIA GeForce RTX 3080 Ti，操作系统：Windows 26200.8875）。样例模型用于验证本文方法的有效性,图 1 展示了本实验其中一个模型 PPTC 生成的笛卡尔网格以及输入的三角形网格和最终生成结果对比。



(a) PPTC 的笛卡尔网格　　(b) PPTC 的三角形网格和笛卡尔网格对比

图 1 PPTC 模型示意图

表 1 展示了本文方法在 6 个不同模型上的测试结果。在多种不同的案例下，本文方法的 CPU 和 GPU 端生成的笛卡尔网格完全一致，并且均能够通过拓扑及水密性检查。在两种设备上，CPU 端每秒最多生成约 17 万个笛卡尔网格，GPU 端每秒最多生成约 673 万个笛卡尔网格，加速比最高可达 48.792，平均加速比为 31.98。以上结果表明，本文提出的方法在复杂网格情况下具备良好的鲁棒性和高效性。

表 1 不同模型的网格生成与时间性能统计

案例名称	设备	生成用时(s)	总单元数量	每秒生成单元数量（个/s）	三角形网格数量	八叉树叶节点数量	切割单元数量	加速比
cutBox	CPU	4.51	790460	175268.293	2906	1152257	180378	18.56
cutBox	GPU	0.243	790460	3252921.811	2906	1152257	180378	
PPTC	CPU	101	13949120	138110.099	104548	25058818	743618	48.792
PPTC	GPU	2.07	13949120	6738705.314	104548	25058818	743618	
mixer	CPU	67.6	8044431	119000.459	35334	28199340	1673993	40
mixer	GPU	1.69	8044431	4760018.343	35334	28199340	1673993	
ahmedBody	CPU	4.51	589213	130645.898	19930	2293621	25102	16.107
ahmedBody	GPU	0.28	589213	2104332.143	19930	2293621	25102	
milkBox	CPU	44.4	5174765	116548.761	4306	24706333	1165729	38.609
milkBox	GPU	1.15	5174765	4499795.652	4306	24706333	1165729	
F11	CPU	23.7	2455154	103592.996	101858	17825193	160649	29.811
F11	GPU	0.795	2455154	3088244.025	101858	17825193	160649	

参 考 文 献:

[1] Charles S Peskin, Flow patterns around heart valves: A numerical method, Journal of Computational Physics. Volume 10, Issue 2, 1972, Pages 252-271, ISSN 0021-9991, https://doi.org/10.1016/0021-9991(72)90065-4.

[2] Yu-Heng Tseng, Joel H. Ferziger, A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry, Journal of Computational Physics, Volume 192, Issue 2, 2003, Pages 593-623, ISSN 0021-9991, https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.024.

[3] 肖涵山, 陈作斌, 刘刚, & 江雄. (2003). 基于 Euler 方程的三维自适应笛卡尔网格应用研究. 空气动力学学报, 21(2), 202-210.

[4] 肖涵山, 刘刚, 陈作斌, & 程克明. (2006). 基于 STL 文件的笛卡尔网格生成方法研究. 空气动力学学报, 24(1), 120-124.

[5] Park, S., Jeong, B., Lee, J.G. and Shin, H. (2013), Hybrid grid generation for viscous flow analysis. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 71: 891-909. https://doi.org/10.1002/fld.3691

[6] Aftosmis M J, Berger M J, Melton J E. Robust and efficient Cartesian mesh generation for component-based geometry[J]. AIAA Journal, 1998, 36(6): 952-960.

[7] Park, S. and Shin, H. (2012), Efficient generation of adaptive Cartesian mesh for computational fluid dynamics using GPU. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 70: 1393-1404. https://doi.org/10.1002/fld.2750

[8] TAO M, BATTY C, FIUME E, et al. Mandoline: robust cut-cell generation for arbitrary triangle meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(6): 179. DOI: 10.1145/3355089.3356543.（SIGGRAPH Asia 2019 Technical Papers）

[9] T. Ye, R. Mittal, H.S. Udaykumar, W. Shyy, An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries, Journal of Computational Physics, Volume 156, Issue 2, 1999, Pages 209-240, ISSN 0021-9991, https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6356.

面向全六面体网格生成的拓扑感知强化学习 CAD 分解

彭嘉明，陈新海*，刘杰

（国防科技大学计算机学院、前沿装备数字化软件实验室、并行与分布处理全国重点实验室，长沙 410073）

摘　要：复杂 CAD 模型中的正交、相交及环状特征常具有不一致的扫掠方向，使模型难以直接生成全六面体网格。现有场方法流程复杂且鲁棒性有限，已有强化学习分解方法又主要依赖表面或平面切分，难以处理内部特征冲突。为此，提出面向全六面体网格生成的深度强化学习框架 DecompRL。该方法以边界表示模型的全局拓扑结构和局部几何属性为状态，构造平面、对称、O-grid、特征间隙和旋转五类拓扑感知候选分割，并通过有效性掩码筛除不可执行动作；同时，将几何质量与六面体网格可生成性反馈共同引入奖励函数，利用面向多子块转移的树形价值聚合学习分解策略。基于 ABC、Fusion360、NIST 和 DeepCAD 数据集的实验表明，DecompRL 在四个基准中的三个取得最高网格生成成功率，在 Fusion360 上达到 59.6%，并保持较高的缩放雅可比质量。与 LMFF 场方法相比，其中位加速比为 41.8 倍，P90 加速比为 103.4 倍。结果表明，该方法能够提高复杂 CAD 模型分解的鲁棒性、网格质量和计算效率。

关键词：CAD 模型分解，深度强化学习，全六面体网格生成，拓扑感知分割

0 引　言

高质量全六面体网格在计算流体力学、结构分析和多物理场仿真中具有数值精度高、单元组织规则及计算效率高等优势[1-2]。然而，复杂 CAD 模型往往同时包含孔、槽、分支、环形结构和不同方向的扫掠特征。相互作用的特征会产生彼此冲突的局部块结构，使模型无法作为单一体直接进行全六面体网格划分，因此通常需要先将其分解为若干拓扑简单、可扫掠或可映射的子块。

传统人工分块依赖专家经验，耗时且难以复用。基于框架场的方法可提高自动化程度，但场构造、奇异性处理、参数化和整数约束等阶段相互耦合，任一环节失败都可能导致最终网格无效[3]。近年来，强化学习被用于将 CAD 分解建模为序列决策问题，但现有方法的动作空间多局限于表面或简单平面切分，对正交分支、内部间隙和环状特征等失配结构的表达能力不足[4]。

针对上述问题，本文提出 DecompRL。其核心思想是直接围绕六面体网格可生成性学习分解策略：利用 B-Rep 保存的面、边属性及邻接关系描述模型状态，生成具有明确几何含义的内部切分候选，并在训练中同时考虑分块几何质量和后续网格生成结果。

1 问题描述

DecompRL 将分解过程表示为不断扩展的树形决策过程。每一步从待处理前沿中选取活动实体，生成候选分割集合，对候选进行编码和几何有效性检查，再由策略网络选择一个有效动作执行。切分产生

的多个子实体重新进入前沿，直至所有子块满足终止条件、不存在有效动作或达到最大步数。

状态编码器基于预训练 B-Rep 网络提取全局拓扑和局部几何特征[5]。候选动作编码与实体状态共同输入策略网络，并通过二值掩码排除不能稳定产生多个有效实体的操作。动作空间包含五类切分：平面切分处理规则平面特征；对称切分利用模型对称关系建立一致块结构；O-grid 切分处理孔洞和圆柱特征；特征间隙切分分离距离较近且方向冲突的特征；旋转切分处理环状或旋转扫掠结构。

奖励函数综合考虑切分后的面内角、二面角、极端几何、内部环路数量以及六面体网格可生成性。前四项鼓励规则、稳定且便于后续网格划分的子块，网格可生成性项则直接反馈分解是否真正支持全六面体网格。对于一个动作产生多个子块的情况，采用树形 Bellman 目标聚合各子分支价值，使策略关注整棵分解树而非单一局部切分。

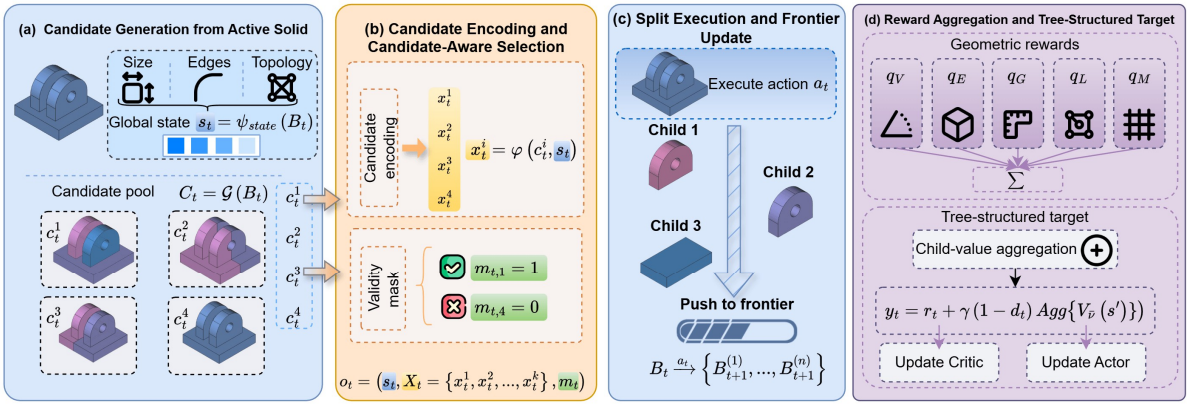


图 1 DecompRL 总体流程

2 结　论

实验在 ABC、Fusion360、NIST 和 DeepCAD 四个公开 CAD 数据集上进行，每个数据集选取 200 个模型，并与 PPO、DDPG、TD3 及 Zhang 等人的强化学习分解方法比较。所有学习方法采用统一的几何后端、候选执行接口、有效性检查和六面体网格成功判据。评价指标包括网格生成成功率、缩放雅可比大于 0.8 的单元比例及最小缩放雅可比。

表 1 显示，DecompRL 在 ABC、Fusion360 和 NIST 上均取得最高成功率，在 Fusion360 上较次优方法提高 12.6 个百分点；在 DeepCAD 上也保持与最优结果接近的性能。其高质量单元比例在 ABC 上达到 91.6%，说明成功率提升没有以明显降低网格质量为代价。消融实验进一步表明，移除高级动作空间、候选感知策略或树形价值聚合都会显著降低成功率；去除网格可生成性奖励后，成功率和网格质量同时下降。

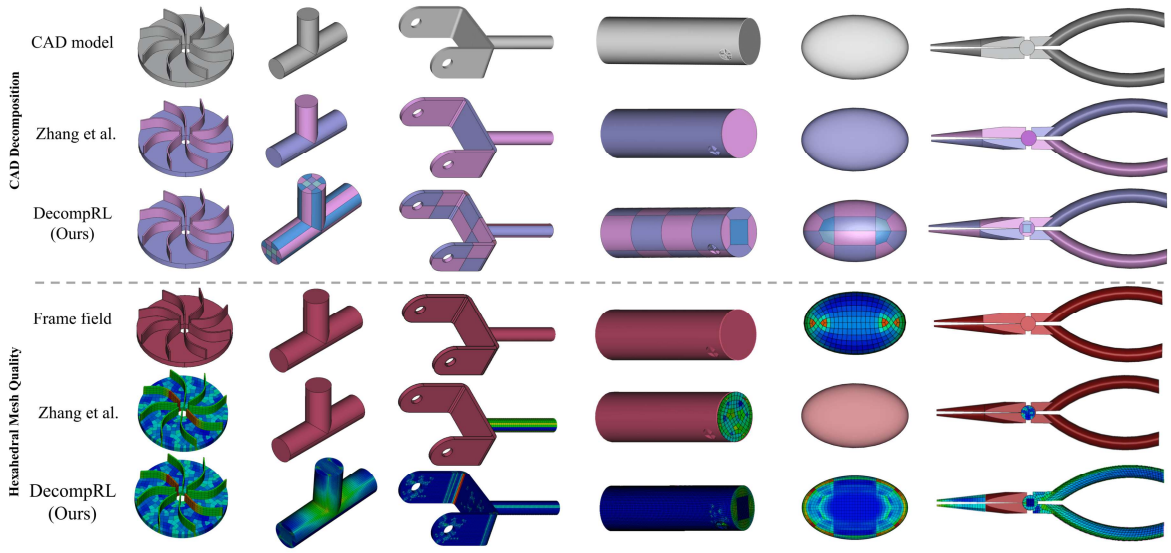


图 2 六类代表性 CAD 模型的分解与全六面体网格结果对比

图 2 给出了六类复杂模型的定性结果。对于 T 形分支，方法能够分离正交圆柱分支并引入 O-grid；对于带孔圆柱和椭球结构，能够形成与曲面特征匹配的内部块结构；对于钳形模型，能够先分离手柄区域再处理剩余实体。效率实验中，DecompRL 的运行时间主要集中在 10 秒量级，而 LMFF 多集中在 100～1000 秒量级，中位加速比为 41.8 倍，P90 加速比达到 103.4 倍。

3 结　论

本文提出面向全六面体网格生成的拓扑感知强化学习 CAD 分解方法 DecompRL。该方法通过五类具有几何和拓扑含义的候选动作扩展分解能力，以候选有效性掩码保证动作可执行性，并将几何质量、网格可生成性和多子块价值聚合引入策略学习。跨四个公开数据集的实验表明，该方法能够提高复杂 CAD 模型的端到端六面体网格生成成功率，同时保持较高网格质量并显著降低运行时间。未来将进一步扩展动作原语，并提高深层分解树上的训练效率和收敛稳定性。

参 考 文 献:

[1] PIETRONI N, CAMPEN M, SHEFFER A, et al. Hex-mesh generation and processing: A survey[J]. ACM Transactions on Graphics, 2022, 42(2): 1-44.

[2] SHEPHERD J F, JOHNSON C R. Hexahedral mesh generation constraints[J]. Engineering with Computers, 2008, 24(3): 195-213.

[3] LIU H, BOMMES D. Locally meshable frame fields[J]. ACM Transactions on Graphics, 2023, 42(4): 112:1-112:15.

[4] ZHANG S, GUAN Z, WANG X, et al. Reinforcement learning based automatic block decomposition of solid models for hexahedral meshing[J]. Computer-Aided Design, 2025, 182: 103850.

[5] LAMBOURNE J G, WILLIS K D D, JAYARAMAN P K, et al. BRepNet: A topological message passing system for solid models[C]//Proceedings of CVPR. 2021: 12773-12782.

面向复杂曲面的多约束尺寸自适应四边形占优网格生成方法

邱靖颖，齐　龙，朱心海，唐名，刘　杨*，庞宇飞

中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，四川绵阳 621000

摘　要：针对有限元仿真工程应用中的复杂外形的几何模型，本文结合四边形和三角形网格的优势，提出了一种由标架场和尺寸场引导的多约束尺寸自适应的四边形占优网格自动生成方法，用于自动地生成满足工程应用需求的四边形占优网格。首先通过求解多约束的全局尺寸场，结合曲率自适应、全局尺寸限制及指定区域约束，生成光滑过渡的尺寸分布；随后，提出基于尺寸场的分区清理策略，去除冗余特征并优化特征线点数分布；最后，利用标架场引导网格推进方向、尺寸场控制网格单元尺寸，结合二分图标记策略，将全局网格生成问题转化为局部拓扑优化问题，高效地生成具有合理尺寸过渡的各向同性四边形占优网格。实验表明，该方法在复杂几何上生成的网格四边形占比超过 90%，且质量指标优于主流商用软件。

关键词：网格生成，尺寸自适应，尺寸场，标架场，四边形占优，有限元

0　引言

四边形网格生成是计算力学和计算机辅助工程中的核心预处理技术。与三角形网格相比，四边形网格因其规则的拓扑结构、较高的数值精度和优异的计算效率，被广泛应用于结构分析、流体力学和等几何分析等领域。然而，对于复杂曲面，纯结构化四边形网格的完全自动生成仍然面临很大的鲁棒性限制，尤其是具有多尺度特征和碎片化几何分区的模型。三角形网格具有高度的自动化能力和较强的几何适应性，但在高曲率区域为保证精度需要极高的单元密度，导致计算资源开销急剧增加，并且在梯度主导的物理场计算中在数值精度方面存在固有局限性。因此，平衡规则性和适应性的四边形占优网格生成技术已成为工程仿真领域的重要研究方向。

现有的四边形网格生成方法主要分为三类：前进前沿法、区域分解法和标架场引导法。前进前沿法从模型边界逐步生成内部单元，具有良好的边界对齐性和较高的单元质量，已被集成到 Cubit、Gambit 和 Ansys 等商用软件中。然而，其生成质量高度依赖于尺寸场，严重的尺寸过渡容易产生高阶奇点和低质量单元。区域分解法基于分治思想将复杂模型划分为多个适合四边形网格生成的子区域，但难以控制奇点位置，且在边界量化阶段求解整数规划在分区数量较多时消耗大量计算时间。近年来，标架场被广泛引入分区和网格生成过程中，能够有效表达特征约束和网格方向，结合流线追踪和多边形模板技术可生成高质量四边形网格，但在复杂特征下的数值精度和鲁棒性仍有待提高。

针对工程应用中复杂曲面模型的多尺度特征、广泛存在的碎片化分区以及多样化尺寸约束等痛点，本文提出了一种多约束尺寸自适应的四边形占优网格生成方法，通过多约束光滑尺寸场求解、碎片化特征自动清理、标架场引导网格生成的完整流程，实现复杂曲面高质量四边形占优网格的自动生成。

1 问题陈述

目前主流的四面体占优网格生成方法和商用工具仍存在诸多局限性，难以高效适应实际工程中复杂曲面模型的网格生成需求。

在商用工具层面，ANSA 和 HyperMesh 等主流网格生成软件在高曲率区域和尺寸过渡场景中容易出现单元质量下降和边界对齐性差的问题。大多数工具不具备自动处理碎片化表面分区的能力。原始 CAD 模型产生的碎片化几何特征会直接导致最终网格中出现狭长和畸变单元，需要工程师手动合并分区，大大增加了大规模复杂模型前处理的人工成本和时间成本。

在学术方法层面，前进前沿法的网格质量高度依赖尺寸场，相邻单元之间的巨大尺寸差异容易产生高阶奇点。区域分解法需要求解整数规划来完成边界量化，当分区数量较大时，量化时间占相当比例。碎片化分区也会严重破坏分区的拓扑合理性。虽然标架场引导法能够提高网格方向的规则性，但在多重尺寸约束和碎片化特征的复杂场景下，其鲁棒性和生成质量仍有待提高。总体而言，大多数现有方法无法同时兼顾尺寸适应性、特征保留能力和自动化程度，难以完全满足工程仿真高效高质量网格生成的需求。

为解决上述问题，本文构建了一个完整的自动四边形占优网格生成流程，包括三项核心技术创新：

- 多约束全局光滑尺寸场求解框架：集成曲率自适应、全局尺寸限制、指定分区尺寸和光滑过渡四种约束类型，通过优先队列完成约束光滑调整，然后求解拉普拉斯线性方程组，获得全局光滑的各向同性尺寸场，确保不同约束区域之间实现平缓的尺寸过渡。
- 尺寸场驱动的碎片化特征清理策略：通过距离和角度的双重准则识别冗余特征点，贪婪移除短线特征上的冲突点并合并碎片化分区。同时，根据尺寸场重新分配特征线顶点，更新背景网格以匹配带有目标尺寸的边界约束。

- 结合二分图标记的双场耦合前进前沿网格生成方案：从边界特征点出发，沿标架方向前进前沿生成顶点，结合自适应碰撞检测系数确保边界处的单元质量。通过拓扑优化构建近似直角三角形网格，最终通过二分图标记合并获得四边形占优网格。整个过程支持分区间并行执行，每种拓扑操作严格保证网格的有效性。

所提方法的整体工作流程如图 1 所示。

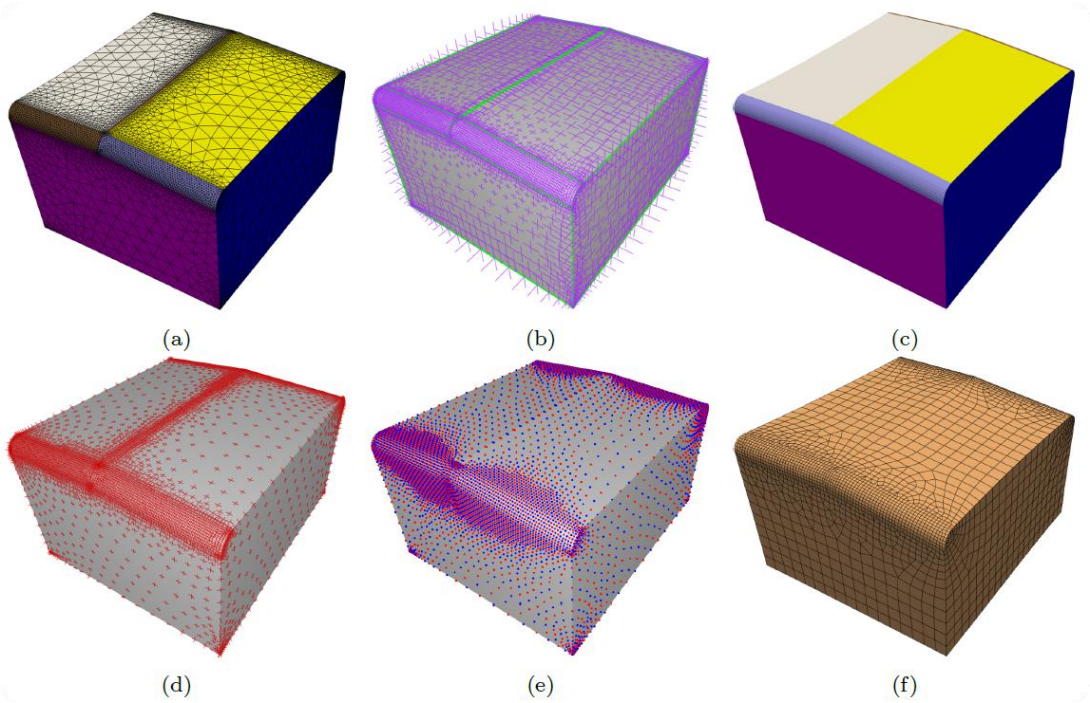


图 1 MSQ-meshing 方法的整体工作流程。（a）输入带有几何分区信息的背景三角形网格；（b）求解多约束各向同性尺寸场；（c）清理碎片化特征；（d）求解标架场；（e）生成带有二分标记的顶点；（f）生成最终四边形占优网格。

2 结论

本文提出了 MSQ-meshing，一种面向复杂曲面的多约束尺寸自适应四边形占优网格生成方法。通过多约束光滑尺寸场、碎片化特征自动清理、标架场引导网格生成这一完整的技术流程，实现了面向复杂工程模型的高质量四边形占优网格的自动生成。

使用来自GrabCAD的多个机械零件模型和复杂装配体模型进行了实验。所有测试模型均由NNW-GridStar软件三角化，生成带有分区信息的背景三角形网格作为输入。结果表明，该方法生成的网格四边形占比超过90%，平均缩放雅可比大于0.9，单元内角、翘曲和长宽比等质量指标均处于优秀范围。与ANSA和HyperMesh等主流商用软件相比，所提方法在边界保持、尺寸过渡光滑性和碎片化模型适应性方面具有更多优势，能够有效避免由冗余特征引起的低质量单元。在效率方面，该方法的平均生成速度可达每秒1万至2万个单元。对于一个近200

万三角形的复杂装配体模型，网格生成仅需约1分钟。特征清理和网格生成等步骤支持并行执行，具有良好的大规模模型处理能力。图2展示了不同方法在典型模型上生成的自适应尺寸四边形占优网格的对比结果。

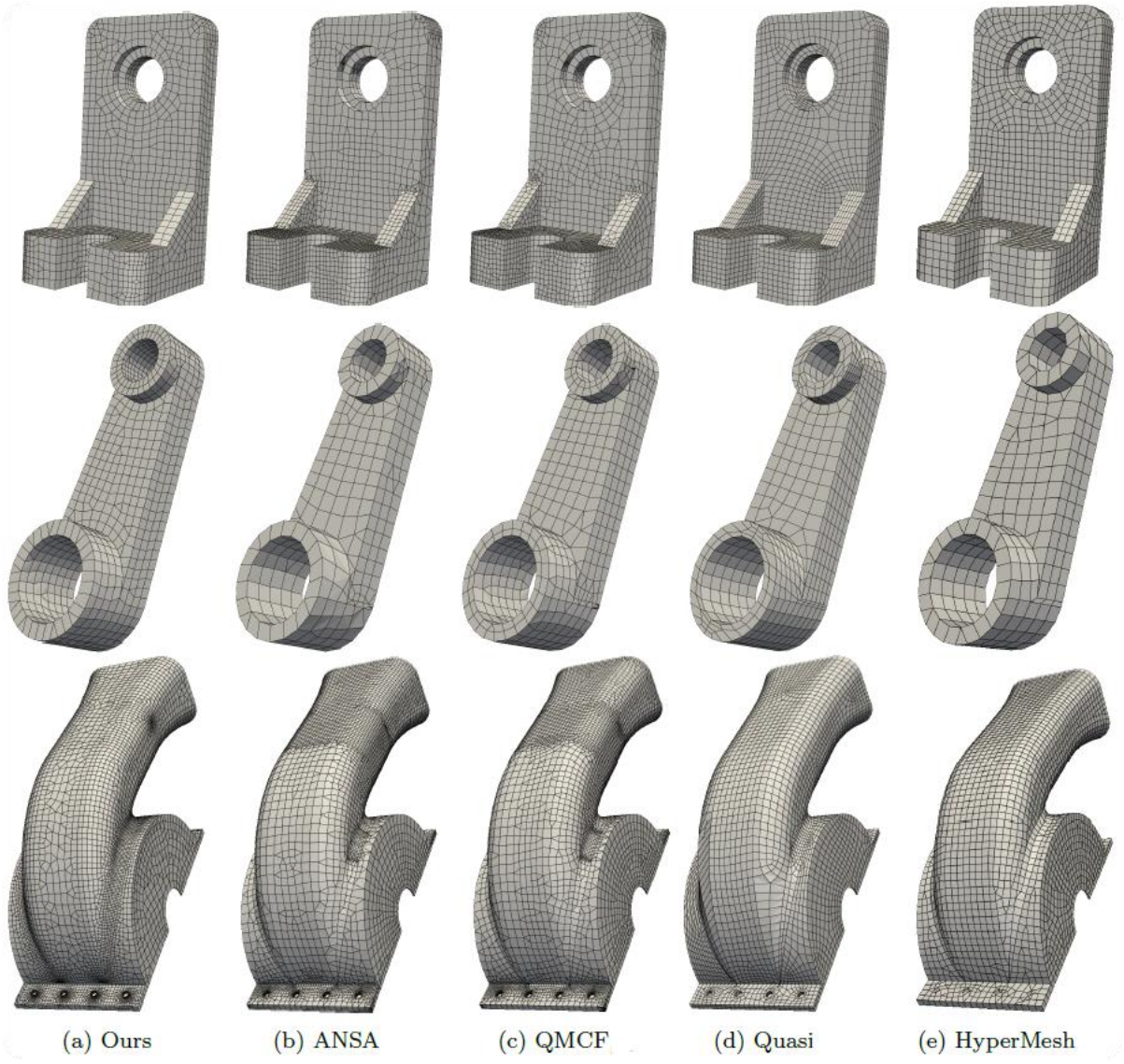


图 2 不同方法生成的自适应尺寸四边形占优网格对比。（a）本文方法；（b）ANSA；（c）QMCf；（d）Quasi；（e）HyperMesh。

未来研究将从三个方向展开：第一，研究适应尺寸变化的标架场求解方法，改善内部前沿碰撞区域的接缝缺陷，进一步提高内部单元质量；第二，优化各向异性场景下的位置点碰撞检测策略和边翻转算法，将方法扩展至各向异性四边形占优网格生成，以满足更多仿真场景的需求；第三，将所提方法扩展至三维体积网格生成，实现自动尺寸自适应的六面体占优网格生成，这具有更迫切的工程需求。

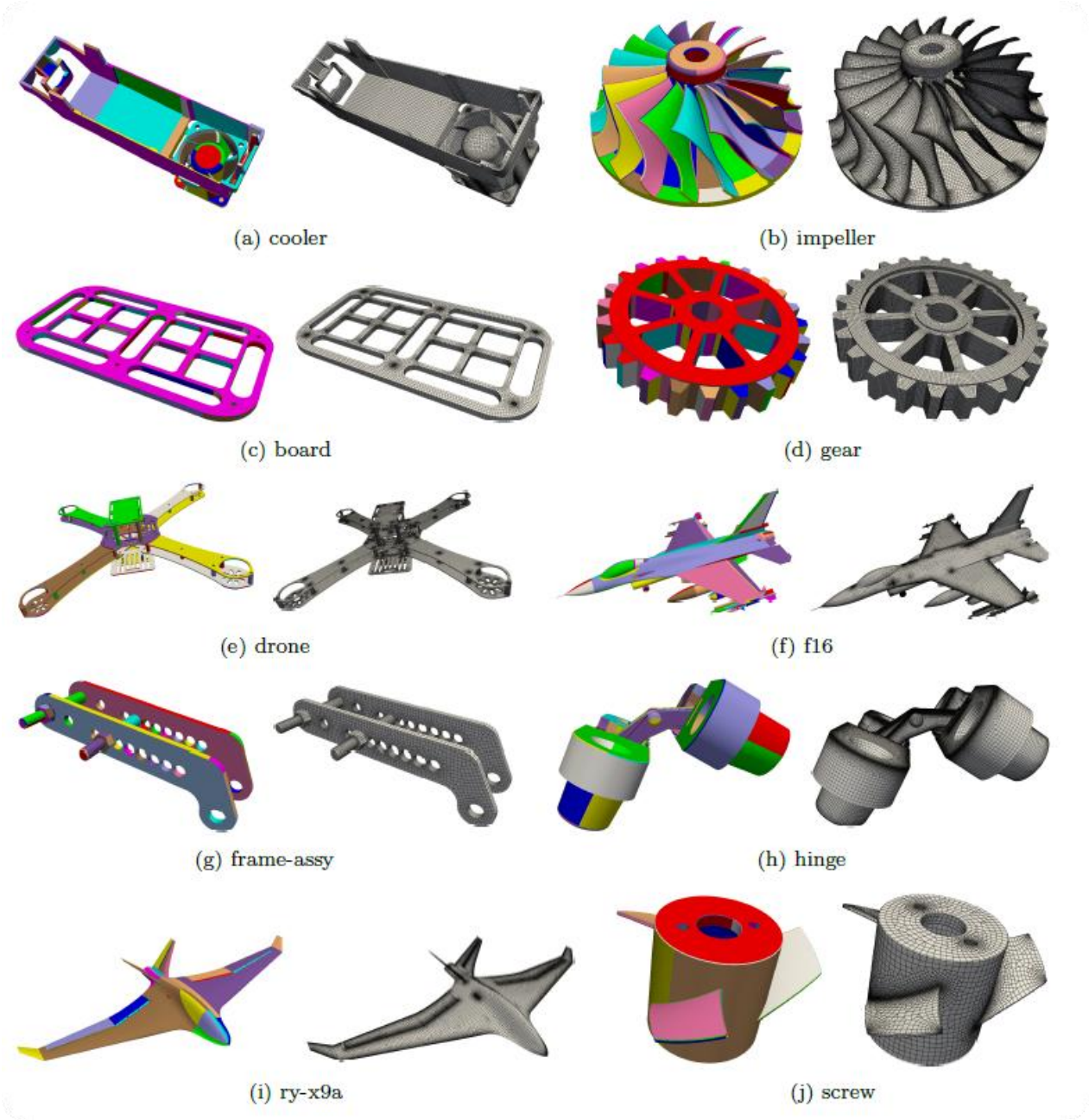


图 3 部分模型使用本文方法的结果

参考文献

[1] Blacker T D, Stephenson M B. Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 32(1): 54-67.

[2] Georgiadis C, Reberol M, Remacle J F. Indirect all-quadrilateral meshing based on bipartite topological labeling[J]. Engineering with Computers, 2022, 38(6): 4731-4747.

[3] Geuzaine C, Remacle J F. Gmsh: a 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 79(11): 1309-1331.

[4] BETA CAE Systems. ANSA: advanced CAE pre-processing software[EB/OL]. 2024. https://www.beta-cae.com/ansa.htm.

[5] Lu F, Qi L, Jiang X, et al. NNW-GridStar: interactive structured mesh generation software for aircrafts[J]. Advances in Engineering Software, 2020, 145: 102803.

详细摘要

基于多约束尺寸场的曲率自适应各向同性重网格化

Dihao Ma[1], Gang Xu[1*], Zaiqi Yao[2], Haiyan Wu[1], Hongyi Cao[1], Jinlan Xu[1] and Timon Rabczuk[3]

[*] 通讯作者：gxu@hdu.edu.cn
[1] 计算机学院, 杭州电子科技大学, 杭州, 310018, 中国
完整作者单位信息见文末

摘要

针对低质量三角网格，本文提出一种基于多约束尺寸场的曲率自适应各向同性重网格化方法。该方法在保持几何特征并控制误差的同时，使网格尺寸随曲率自适应变化，沿曲面形成平滑的近似等比渐进。为解决输入网格顶点稀疏时仅依靠顶点曲率难以充分表征曲率信息的问题，本文构建面–顶点–边约束尺寸场 FVE-SF（Face–Vertex–Edge Constrained Sizing Field）：以输入网格的三角面为基本约束单元，利用顶点目标尺寸构造点源，并利用边中点曲率构造子线段源。两类约束源分别根据查询点到点源或子线段的距离给出尺寸上界，并取所有约束的最小值作为目标尺寸；邻面约束通过刚性展开沿局部测地距离传播。在梯度限制下，各约束源的约束值随距离线性增长，使网格尺寸沿曲面由密到疏平滑过渡。该尺寸场在重网格化迭代前基于原始网格完成构建，后续不再更新；在其引导下，通过局部拓扑操作、切向光顺和曲面投影完成重网格化，并以统一的几何误差和单元质量判据控制各步操作。在 Thingi10K 数据集中选取的模型上进行的对比实验表明，与 CGAL、VCGLib 和 CSF 相比，FVE-SF 在平均单元质量、平均长宽比和几何误差三项指标上的平均结果均为最优。对 Thingi10K 数据集的大规模验证进一步表明，该方法能够稳定生成高质量网格；生成的网格在高曲率区域自动加密，在低曲率区域适度稀疏，并在保持尖锐特征的同时形成平滑的尺寸渐进。FVE-SF 无需预重网格化或全局优化，即可实现兼顾几何保真、曲率自适应与尺寸渐进的高质量各向同性重网格化。

关键词: 各向同性重网格化; 曲率自适应; 尺寸场; 刚性展开; 测地距离; 梯度限制

0 引言

三角网格重网格化是有限元分析、计算机图形学和几何处理中衔接几何模型与数值计算的基础环节。各向同性重网格化的目标是在保持原始曲面及其尖锐特征的同时，使三角形尽量接近等边形状，并使局部边长随曲率自适应变化：高曲率区域需要较密的离散以满足逼近精度，低曲率区域则应适当稀疏以控制计算规模。Botsch 和 Kobbelt 提出的边分裂、边折叠、边翻转与切向光顺增量框架至今仍被广泛采用 [1]，其结果很大程度上取决于目标尺寸场是否准确。

Borouchaki 等提出了尺寸渐进控制方法，通过限制尺寸场的变化率改善网格尺寸过渡 [2]。Dunyach 等从弦高误差推导了曲率到目标边长的映射 [3]，Lv 等随后利用曲率光顺场在顶点邻域内传播并平滑曲率信息 [4]。Dunyach 和 Lv 的方法均主要将曲率信息定义在网格顶点上；当原始网格顶点稀疏时，单纯依赖顶点曲率难以完整捕获网格中的高曲率变化。另一方面，若以网格边路径长度近似跨面距离，这种近似不能准确表示跨越尖锐二面角或细长三角形的曲面测地距离，容易使邻面约束的传播范围失真。为此，本文提出基于多约束尺寸场的曲率自适应各向同性重网格化方法 FVE-SF。该方法在不改变背景网格拓扑的前提下显式引入边中点曲率，并通过逐面刚性展开恢复跨面的局部测地距离。

1 多约束尺寸场的构建与重网格化

1.1 两类约束源的初始化

FVE-SF 使用点源和子线段源共同约束目标尺寸。初始化时，采用 Meyer 离散微分算子 [5] 计算各顶点处的最大主曲率 $\kappa(v)$，并根据绝对逼近容差 $\hat{\varepsilon}$ 得到 $h(v) = \sqrt{6\hat{\varepsilon}/\kappa(v) - 3\hat{\varepsilon}^2} \in [L_{\min}, L_{\max}]$；每个 $(v, h(v))$ 构成一个点源。令 $\alpha = \ln\beta$，本文取 $\beta = 1.3$；随后沿每条边双向迭代施加 $h(v_i) \le h(v_j) + \alpha\|v_i - v_j\|$，以限制相邻点源尺寸的变化率。

对每条边 $e = (v_0, v_1)$，在中点插入仅用于曲率估计的虚拟顶点。为抑制边中点曲率估计中可能出现的过估计，采用二面角曲率限制边中点曲率：

$$\kappa_{\text{edge}} = \min\left(\kappa_{\text{mid}},\, k\frac{\theta}{L_e}\right), \qquad k = 5. \tag{1}$$

将 κ_{edge} 映射为尺寸 h_{lim}。约束函数记为 $\mathcal{C}(d, h) = h + \alpha d$；沿边参数 $t \in [0, L_e]$，两个端点点源分别给出 $\mathcal{C}(t, h_0)$ 和 $\mathcal{C}(L_e - t, h_1)$。将满足 h_{lim} 同时小于两个端点约束值的连通区间 $[t_s, t_e]$ 保存为子线段源 $([t_s, t_e], h_{\text{lim}})$；若该区间为空，则不生成子线段源。

1.2 点源与子线段源的面内约束

每个三角面 F 的内部约束集合由 3 个顶点点源 $V_{\text{int}}(F)$ 和至多 3 个子线段源 $S_{\text{int}}(F)$ 组成。对于查询点 $p \in F$，点源 (q, h_q) 根据点间距离给出上界 $\mathcal{C}(\|p-q\|, h_q)$；子线段源 (s, h_s) 根据点到线段的最短距离 $d(p, s) = \min_{x\in s}\|p - x\|$ 给出上界 $\mathcal{C}(d(p, s), h_s)$。面内目标尺寸是两类约束的共同下包络：

$$\begin{aligned} h_{\text{int}}(p) = \min\Big(&\min_{(q,h_q)\in V_{\text{int}}(F)} \mathcal{C}(\|p - q\|, h_q), \\ &\min_{(s,h_s)\in S_{\text{int}}(F)} \mathcal{C}(d(p, s), h_s)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

点源将各顶点的目标尺寸向面内延拓；子线段源则使仅靠边两端点源无法充分约束的有效边段整体参与尺寸控制。在任一位置，约束值最小的源决定局部目标尺寸。由于各源的约束值随距离线性增长，尺寸场满足给定的梯度限制，从而使网格尺寸沿曲面平滑渐变。

1.3 跨面刚性展开与外部约束

邻面传入的外部约束仍分为点源和子线段源。传播约束时，以共享边为转轴，将源面刚性旋转到目标面所在平面，使展开后的源面与目标面分处共享边两侧。对于从共享边内部穿过的有效路径，查询点到展开后的点源或子线段源的平面距离等于沿该通道跨面的测地距离。楔形检验用于排除越过共享边端点的无效路径，并在多跳传播中逐跳执行。

外部源按轮次传播。每轮均以上一轮固定的约束集合为基础；仅当候选源能在共享边的自适应采样点处降低当前最小尺寸时，才将其接纳，直至不再有新源加入。最终，对于面 F 上的查询点 p，有效约束集合为

$$\Omega_p(F) = V_{\text{int}}(F) \cup S_{\text{int}}(F) \cup P^p_{\text{ext}}(F) \cup S^p_{\text{ext}}(F), \qquad h(p) = \min_{r\in\Omega_p(F)} \mathcal{C}(d_r(p), h_r), \tag{3}$$

其中 P^p_{ext} 和 S^p_{ext} 分别表示对查询点 p 通过楔形检验的外部点源和外部子线段源，$d_r(p)$ 根据源的类型取点间距离或点到线段的最短距离。通过空间索引定位面片后，

查询仅涉及该面的局部约束集合；尺寸场在重网格化迭代前基于原始网格完成构建，后续不再更新。

1.4 统一误差控制的迭代重网格化

在固定的 FVE-SF 尺寸场引导下，每轮依次执行边分裂、边折叠、边翻转、切向光顺和曲面投影。若 $\|e\| > \frac{4}{3}h_e$，则分裂边；若 $\|e\| < \frac{4}{5}h_e$，则折叠边，其中 h_e 为边中点的查询尺寸。边翻转用于使内部顶点的度数趋近 6；切向光顺将非特征顶点指向面积加权一环重心的位移投影至切平面；最后将顶点投影回原始曲面。

为统一不同局部操作的合法性判据，本文对所有操作检查以下三项条件：各验证点到原始网格的距离不超过 d_{Haus}；新生成三角面的法向与原始网格上最近三角面的法向点积不低于 $\tau_{\text{ori}} = 0.7$；操作后受影响区域的最差单元质量满足 $Q_{\min}^{\text{new}} \geq \eta Q_{\min}^{\text{old}}$，其中 $\eta = 0.5$，$Q = 4\sqrt{3}S/(l_0^2 + l_1^2 + l_2^2)$。仅当三项检查均通过时，才接受该操作。二面角超过 30° 的边被标记为特征边，禁止翻转，并限制折叠与光顺方向。

2 实验与分析

实验主要采用 Thingi10K[6] 数据集中的三角网格。对比实验选取 6 个包含针状面片、钝角面片、孔洞、圆角和尖锐折痕的代表性零件，比较 CGAL isotropic_remeshing[7]、VCGLib[8]、曲率光顺场 CSF[4] 与本文方法。主要参数为 $\hat{\varepsilon} = 10^{-3}L_{\text{bbox}}$、$[L_{\min}, L_{\max}] = [10^{-3}, 10^{-1}]L_{\text{bbox}}$ 和 15 轮重网格化迭代；全部实验在 AMD Ryzen 5 5500、16 GB 内存环境下以单线程运行。

在 6 个模型的对比实验中，FVE-SF 在平均单元质量、平均长宽比和归一化双向 Hausdorff 距离三项指标上的平均结果均为最优（表 1）。本文采用的 CSF 实现未显式保护特征边，也未进行单元翻转检查；虽然其平均质量较高，但输出网格的几何误差明显增大，未能达到同等几何保真度。由此可见，FVE-SF 的质量提升并非以牺牲几何保真度为代价。

尺寸场对比进一步说明了上述差异：仅使用顶点曲率时，尺寸场中会出现与初始细长三角形分布相对应的放射状条带和不连续等值线；引入边中点约束与测地传播后，孔边界附近形成连续的高曲率约束带，目标尺寸向低曲率区域平滑增大（图 1）。在 Part 39344 的重网格化结果中，高曲率区域得到自适应加密，平坦区域保持较大单元，不同区域之间的网格尺寸平滑渐变，同时保留尖锐特征（图 2）。

在 Thingi10K 数据集的大规模验证中，该方法在不同规模和复杂度的模型上总体保持了较高的单元质量和较低的几何误差，表明其具有稳定的批量处理能力。

3 结论

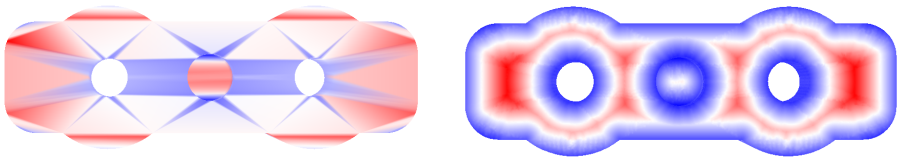
本文提出基于多约束尺寸场的曲率自适应各向同性重网格化方法 FVE-SF。该方法通过引入边中点曲率弥补仅依赖顶点采样的不足，并结合刚性展开与楔形有效性检验，使跨面约束沿局部测地距离传播。该尺寸场无需预重网格化、背景网格迭代更新或全局优化，可直接作用于低质量 CAD 三角化模型；定位背景面片后，尺寸查询仅涉及该面的局部约束集合。代表性模型对比和 Thingi10K 数据集上的批量实验验证了该方法在平均单元质量、长宽比、几何保真度与批量处理方面的有效性。

作者信息
[1] 计算机学院, 杭州电子科技大学, 杭州, 310018, 中国. [2] 浙江省汽车安全技术研究重点实验室, 吉利汽车研究院（宁波）有限公司, 宁波, 315336, 中国. [3] 结构力学研究所, 德国包豪斯大学, 魏玛, 99423, 德国.

参考文献

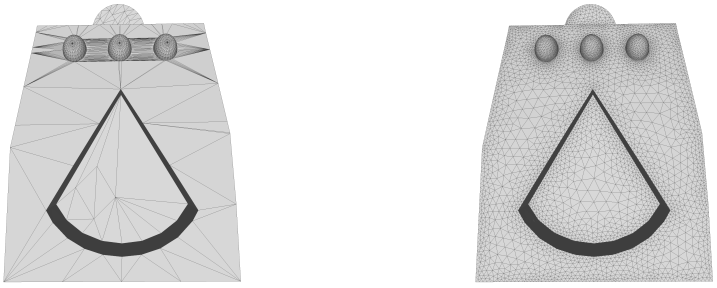
1. M. Botsch and L. Kobbelt. A remeshing approach to multiresolution modeling. In *Proc. Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*, pp. 189–196, 2004.
2. H. Borouchaki, F. Hecht, and P. J. Frey. Mesh gradation control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(6):1143–1165, 1998.
3. M. Dunyach, D. Vanderhaeghe, L. Barthe, and M. Botsch. Adaptive remeshing for real-time mesh deformation. In *Eurographics Short Papers*, pp. 29–32, 2013.
4. C. Lv, W. Lin, and J. Zheng. Adaptively isotropic remeshing based on curvature smoothed field. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 30(7):3196–3209, 2024.
5. M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. H. Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *Visualization and Mathematics III*, pp. 35–57. Springer, 2003.
6. Q. Zhou and A. Jacobson. Thingi10K: A dataset of 10,000 3D-printing models. *arXiv preprint* arXiv:1605.04797, 2016.
7. S. Loriot, M. Rouxel-Labbé, J. Tournois, and I. O. Yaz. Polygon mesh processing. In *CGAL User and Reference Manual*, version 5.6, 2024.
8. Visual Computing Lab, ISTI–CNR. VCG Library: The Visualization and Computer Graphics Library. `https://vcglib.net/`, accessed August 9, 2026.

图



(a) 仅顶点曲率 (b) FVE-SF

图 1 Part 37288 的尺寸场对比（蓝色表示目标尺寸较小，红色表示目标尺寸较大）。仅使用顶点曲率时，尺寸场中出现与初始细长三角形分布相对应的放射状条带；FVE-SF 的等值线沿测地方向平滑过渡，并在孔边界附近形成子线段约束带。



(a) 原始网格 (b) FVE-SF 重网格化结果

图 2 Part 39344 的曲率自适应重网格化结果。FVE-SF 在高曲率区域自动加密，在低曲率区域保持较大单元，并使不同区域之间的网格尺寸平滑渐变。

表

表 1 Thingi10K 数据集中 6 个模型的平均对比结果。d_H 为双向 Hausdorff 距离；CSF 存在单元翻转和几何不一致，其质量指标仅作参考。

方法	$Q_{\text{avg}} \uparrow$	$\text{AR}_{\text{avg}} \downarrow$	d_H / L_{bbox} (%) $\downarrow$
CGAL	0.838	1.345	0.176
CSF	0.869	1.270	1.065
VCGLib	0.834	1.372	0.118
FVE-SF	**0.874**	**1.267**	**0.068**

基于深度强化学习和最优共形映射的多块结构网格自动生成框架

齐　龙，慕茹霜，刘　杨，邱靖颖，庞宇飞*

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘　要：结构网格生成在数值计算与仿真模拟中优势显著，但传统方法依赖人工经验，难以兼顾自动化与高质量生成。为此，本文提出一种基于深度强化学习和最优共形映射的结构网格自动生成框架。该框架以几何模型的三角剖分为输入，并按以下四个步骤进行操作。首先，通过 Ricci flow 算法将曲面三角网格映射至平面参数域。其次，利用共形映射前后的网格密度变化率提取等值线来驱动分区。再次，构建强化学习决策框架，将网格生成转化为序贯决策过程，通过奖励函数优化拓扑模板选择与奇异点放置策略。最后，结合网格光顺与共形逆映射生成曲面结构网格。实验表明，文中在生成效率与质量上均优于现有方法，为 CAD/CAE 领域的自动化网格生成提供了智能化新方案。

关键词：离散 Ricci 流，等值线提取，深度强化学习，拓扑划分，结构网格

0　引　　言

网格生成在计算流体动力学（CFD）数值仿真中占据关键地位，也是数值计算及结果显示的重要载体。所生成网格的质量直接决定了 CFD 模拟结果的精度与可靠性[1]。随着工程问题复杂性的增加和模拟精细化程度的不断加深，网格规模呈指数级攀升，传统网格生成方法所需的人工成本也随之剧增，这已成为制约 CFD 数值模拟效率的关键瓶颈。据统计，在汽车、航空航天及船舶制造等复杂工业设计领域，网格划分阶段的人工时间成本往往占到整个分析流程的 80%左右[2]。因此，为满足日益增长的高质量网格需求，实现网格生成的自动化、智能化与高效化已成为学术界与工业界共同关注的研究热点与迫切需求。

传统的结构网格生成方法主要可归纳为三类：基于代数映射的方法、基于区域分解的方法以及基于偏微分方程（PDE）的方法。基于代数映射的方法[3, 4] 通过构建参数计算域到物理实际域的显式或隐式映射函数来生成网格，但难以处理复杂拓扑。基于区域分解的方法（亦称多块结构网格方法）的方法[5, 6]将复杂区域分解为拓扑简单的子区域再分别网格化，需要大量专家知识进行合理分区。基于 PDE 的方法[7-9] 通过求解控制网格线分布的偏微分方程来生成网格，通常能够产生光滑且正交性较好的高质量网格，然而其计算成本高昂，且对于复杂几何边界和内部特征的自动化处理仍存在困难。综上所述，这些传统方法在面对航空航天、先进制造等领域中日益复杂的几何模型时，往往难以兼顾自动化效率与网格质量的双重要求，工程师仍需投入大量时间进行模型清理、几何分区、奇异点布局、网格拓扑设计及疏密控制等手动操作。

近年来，以深度学习为代表的人工智能技术在诸多领域取得了突破性进展，其强大的特征学习与非线性映射能力也为解决传统网格生成方法的困境带来了新的契机。Lei 等[10]对智能网格生成这一新兴研

究领域进行了系统且全面的综述，为该领域的研究提供了重要的参考和指导。基于神经网络的网格生成方法，如卷积神经网络[11](CNN)、图神经网络[12](GNN)、物理信息神经网络[13, 14](PINN)和生成对抗网络[15] (GAN)等，通过数据驱动方式学习几何特征与网格拓扑之间的映射关系，在特定几何类型上取得了显著成果。然而，这些方法往往在泛化性方面面临着严重的挑战。当目标几何形状与训练样本存在显著差异时，生成网格的质量往往急剧下降，网格单元可能出现严重变形或拓扑错误。这种局限性严重制约了学习型方法在实际工程应用中的普适性，特别是在处理未知或变化多端的几何形状时。

为突破上述瓶颈，本文聚焦于结构化曲面网格的自动生成难题，提出了一种基于离散 Ricci 流与模板引导深度强化学习的结构网格自动生成框架。该框架核心思想是：首先利用离散 Ricci 流的保角特性将复杂三维曲面稳健地参数化至二维平面域，并基于参数化过程中的几何畸变信息实现参数域的自适应分区，将复杂问题分解为若干简单子问题；其次，在各参数化子域内，引入经典拓扑模板作为结构化先验，将网格生成问题转化为一个模板选择与参数优化的序列决策过程；最后，通过深度强化学习智能体学习最优决策策略，自动确定模板关键控制参数，从而在保证网格拓扑正确性的前提下，高效生成高质量的结构网格。

1 问题描述

本文提出的DRL-MeshGen框架旨在实现复杂三维曲面结构网格的自动化、智能化生成。其核心流程如图 1 所示，主要包括三个关键阶段：基于离散Ricci流的共形参数化与分区、基于模板先验引导的深度强化学习平面网格生成、以及逆映射回三维曲面。

第一阶段：共形参数化与几何感知分区。

给定一个输入的三维曲面三角剖分网格（图 1 (a)），我们首先运用离散Ricci流算法将其共形参数化至一个二维平面域（图 1 (b)）。在参数化过程中，不同区域的网格单元会经历不同程度的拉伸或压缩，这种几何畸变反映了原始曲面的局部曲率和特征变化。我们创新性地利用这一信息，通过分析参数化后网格单元的顶点畸变场，提取其等值线作为分区边界（图 1 (c)），从而将复杂的参数域自适应地分解为若干个拓扑结构相对简单且几何特征较为一致的子区域。

第二阶段：模板引导的深度强化学习平面网格生成。

在获得参数域的子区域划分后，我们提出了一种融合拓扑模板先验与深度强化学习（DRL）的创新方法。我们将经典的结构网格拓扑模板（如O型、C型等）视为一种强大的结构化先验知识，用以约束和引导DRL智能体的决策空间。强化学习的任务不再是从零开始自由地连接顶点、构建单元，而是转化为一个模板参数优化的序列决策问题（图 1 (d)）。这种模板引导的DRL方法，极大地缩小了搜索空间，提高了学习效率，并确保了生成网格的拓扑合理性与结构规整性。

第三阶段：网格组合与逆映射。

当所有参数域子区域的二维结构网格生成完毕后，它们将被组合成一个完整的参数域结构网格。最后，利用参数化过程的可逆性，通过共形逆映射（图 1 (e)），将这个二维平面结构网格变换回原始的三维曲面上，从而得到最终的三维曲面结构网格。

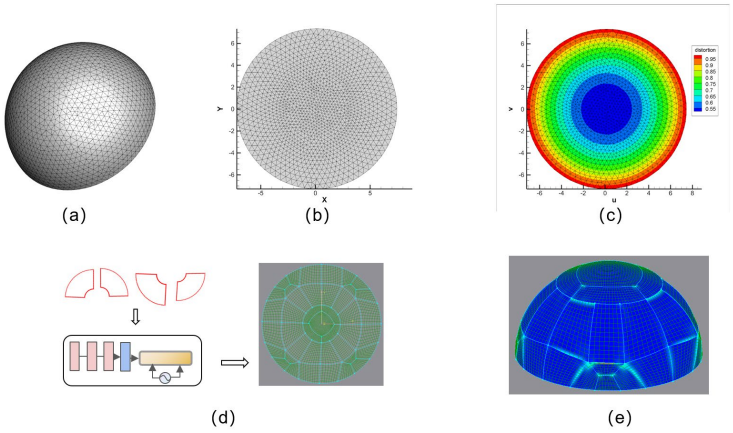


图 1 文中方法的流程。（a）给定几何外形的三角化网格，（b）采用离散 Ricci flow 进行共形参数化，（c）基于参数化畸变场提取等值线进行分区，（d）通过模板先验引导的深度强化学习框架在各分区内生成二维结构网格，（e）进行共形逆映射，得到最终的曲面结构网格。

2 结　论

与现有方法相比，DRL-MeshGen 框架在处理复杂几何和拓扑特征时展现出显著优势：首先，通过将三维曲面网格生成问题转化为二维参数域的结构网格生成问题，有效降低了问题复杂度；其次，基于强化学习的决策框架使系统能够从经验中学习并不断改进网格生成策略，而非依赖预定义规则；第三，通过细致设计的奖励机制，系统能够根据不同几何特征自适应地选择最优网格拓扑结构，实现网格质量与计算效率的平衡。

未来工作。我们计划引入更智能的模板和动作选择机制，例如增加基于全局几何特征的初始决策步骤，让智能体更高效地聚焦于合适的模板子空间。同时，将评估其他先进 RL 算法（如基于策略梯度的 PPO、基于值方法的 Rainbow DQN 等）以寻求性能和样本效率的提升。此外，进一步优化状态表示与奖励函数设计，探索更有效的几何特征提取方法与更精细化的奖励机制，以加速学习并提升最终网格质量。最后，将在更多样化、更具挑战性的几何数据集上进行测试和训练，以提升模型的泛化能力和鲁棒性。

参 考 文 献:

[1] Timothy, J., Baker. Mesh generation: Art or science? - ScienceDirect[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005,41(1): 29-63.

[2] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2005,194(39-41): 4135-4195.

[3] Tong, Y., Alliez, P., Cohen-Steiner, D., et al.Designing quadrangulations with discrete harmonic forms[C]//Eurographics symposium on geometry

processing. 2006.

[4] Viertel, R., Osting, B. An approach to quadrilateral mesh generation based on Ginzburg-Landau theory. arXiv preprint arXiv:1705.04369, 2017.

[5] Lu, F., Qi, L., Jiang, X., et al. NNW-GridStar: interactive structured mesh generation software for aircrafts[J]. Advances in Engineering Software, 2020,145(102803).

[6] Chuen, A.M., Hosseini, S.S., Jensen, J.C., et al.Aerodynamic Simulations for Complex Geometries Using Automatically Generated Structured Overset Meshes[C]//AIAA AVIATION 2023 Forum. 2023.

[7] Fogg, H.J., Armstrong, C.G., Robinson, T.T. Automatic generation of multiblock decompositions of surfaces[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015,101(13): 965-991.

[8] Georgiadis, C., Reberol, M., Remacle, J.F. Indirect all-quadrilateral meshing based on bipartite topological labeling[J]. Engineering with Computers, 2022,38(5): 4731-4747.

[9] Zhang, S., Xu, G., Wu, H., et al. Medial hex-meshing: high-quality all-hexahedral mesh generation based on medial mesh[J]. Engineering with Computers, 2024,40(4): 2537-2557.

[10] Lei, N., Li, Z., Xu, Z., et al. What's the situation with intelligent mesh generation: A survey and perspectives[J]. IEEE transactions on visualization and computer graphics, 2023.

[11] Chen, X., Liu, J., Pang, Y., et al. Developing a new mesh quality evaluation method based on convolutional neural network[J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2020,14(1): 391-400.

[12] Wang, X., Yue, Q., Liu, X. Intelligent mesh generation for crack simulation using graph neural networks[J]. Computers & Structures, 2024,292(107234.

[13] Aygun, A., Maulik, R., Karakus, A. Physics-informed neural networks for mesh deformation with exact boundary enforcement[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023,125(106660).

[14] Chen, X., Liu, J., Yan, J., et al. An improved structured mesh generation method based on physics-informed neural networks[J]. arXiv preprint arXiv:2210.09546, 2022.

虚几何技术在脏几何修复中的工程化实践与挑战

刘文鑫，谢冬香，张勇杰，庞宇飞，慕茹霜，刘杨

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘　要：CAD 模型中的脏几何问题是计算机辅助工程（CAE）前处理自动化的核心瓶颈。本文提出一种基于虚拟几何的分层解耦框架，旨在实现脏几何的自动化修复。该框架通过构建虚拟拓扑层与离散几何层实现拓扑重建于几何修复的双重解耦。核心创新包括：一种采用自适应公差的拓扑重建算法，用于自动恢复水密拓扑结构；一种基于离散几何裁剪的修复算法，将复杂的曲面操作转化为稳健的网格操作。实验结果表明，本框架能自动化处理缝隙、重叠、穿插等脏几何问题，显著提升修复成功率，为实现 CAD/CAE 一体化提供了鲁棒的自动化前处理技术方案。

关键词：脏几何修复；工程化实践；离散几何剪裁；CAD/CAE 一体化

0 引　言

计算机辅助工程（CAE）仿真中，前处理特别是几何清理和网格生成通常占据仿真总周期的 60%˜80% [2]。脏几何问题——如间隙、重叠、穿插、退化面片和非流形拓扑等[6]是导致自动化前处理失败的核心原因。

针对脏几何修复，学术界主要有三条技术路线。直接 CAD 修复[5]在 CAD 内核层面操作，保留参数信息但鲁棒性差。纯网格修复[3]在离散网格上操作，自动化程度较高但丢失原始设计特征。虚拓扑方法[8]通过引入虚实体将拓扑与几何解耦，Cao 等[1]的混合表面模型进一步引入离散-连续双重表示。这些方法在学术界产生了持续影响，但从 Sheffer~2000 年提出虚拓扑至今已二十余年，一个值得注意的现象是：虚几何/虚拓扑技术在工业网格生成软件中极少见到真正的工程化落地和产品化发布}。多数工作仍停留在算法验证和原型系统层面。与此同时，工业界对于脏几何问题实际上已经发展出了一套不同于学术路线的解决方案——Surface Wrapping[7]。该方案不直接修复脏几何，而是用一张水密表面"包裹"原始几何，直接从包裹表面提取网格。其核心优势是全自动化：输入脏模型、输出水密网格，几乎不需要人工干预。然而，Surface Wrapping 的本质缺陷同样明显：从原理上它会自动抹除微小几何特征（圆角、倒角、薄壁等），生成的网格质量难以满足航空航天等高阶仿真需求，且结果无法回溯到原始 CAD 设计。

GridStar 团队前期提出了面向非结构网格生成的轻量化交互框架[4]，在此基础上进一步系统化实现了虚几何框架（VGFramework），并将其集成到团队自主研发的网格生成软件 NNW-GridStar 中作为正式功能发布。本文的核心贡献不在于提出新的算法，而在于\emph{以工程化实践报告的形式}，系统分享：（1）VGFramework 的双层解耦架构设计及与前期工作的演进关系；（2）工程化中遇到的三类关键技术挑战及应对经验；（3）与 Surface Wrapping 路线的系统对比分析；（4）虚几何技术自动化的核心瓶颈与未来方向的开放讨论。

1 问题描述

脏几何模型则存在以下三类缺陷：拓扑缺陷：间隙（$d(e_i, e_j) > 0$）、非流形边/顶点；几何退化：碎面（面积接近于零的面）、短边（长度接近于零的边）；几何冲突：重叠（两面空间交集非零测度）、穿插（两面互相穿透形成自交区域）。这些缺陷导致自动网格生成算法无法形成封闭的计算域，从而生成失败或产生包含畸变单元的劣质网格。VGFramework 在传统 B-Rep 表示之上引入两层独立抽象层。虚拓扑层（VTL）维护虚实体（虚点、虚边、虚面、超边、超面）之间的拓扑邻接关系，每个虚实体通过"主-客"关系关联到底层 CAD 几何，所有操作不修改原始几何，保证非破坏性。离散几何层（DGL）为每个虚面对应一个共形离散三角网格及其参数域映射，承担所有需要几何信息的计算（缺陷检测、曲线投影、区域剪裁）。相比前期轻量化交互框架[4]，本次工作的核心升级在于显式引入并重构了离散几何层。在前期的交互框架中，拓扑修复和几何修复耦合在一起，修复结果仅能用于网格生成的辅助引导。引入 DGL 之后，修复算法可以直接在离散网格上执行，修复后得到一个水密的离散网格，该离散网格可作为背景网格驱动后续的表面网格生成，同时保持了与原始 NURBS 曲面的精确映射关系。这一升级使得框架从"辅助交互工具"进化为"可自动输出的修复引擎"。

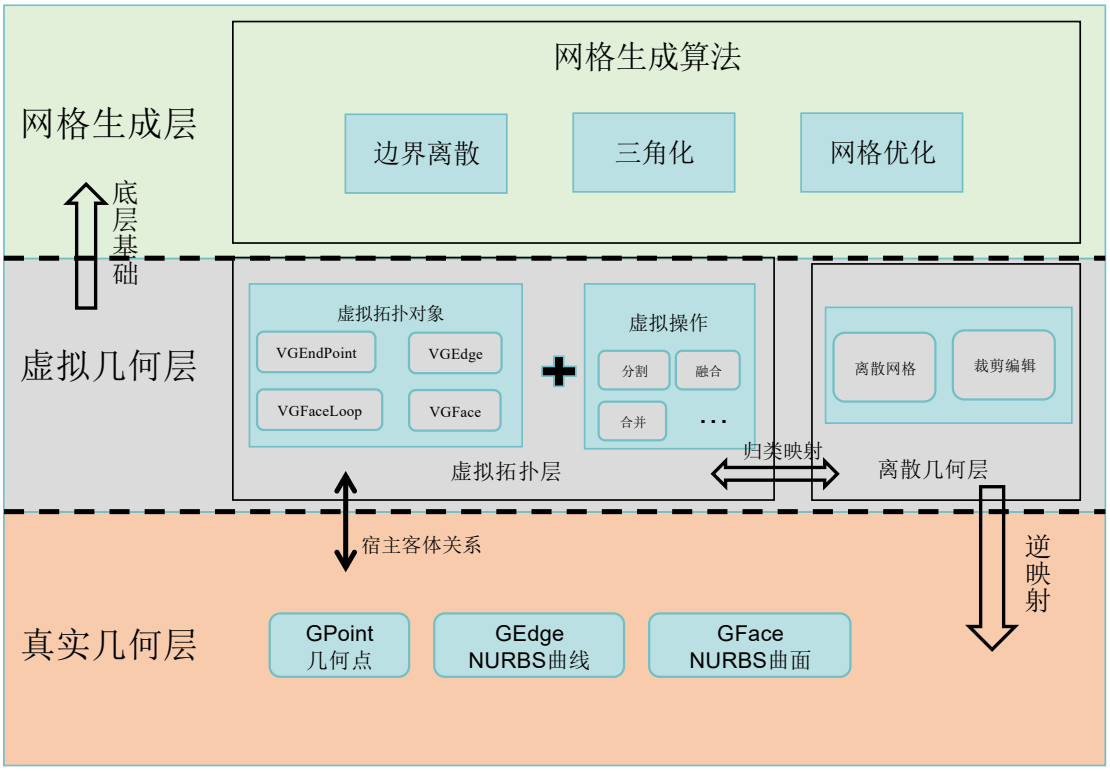


图 1 系统架构图

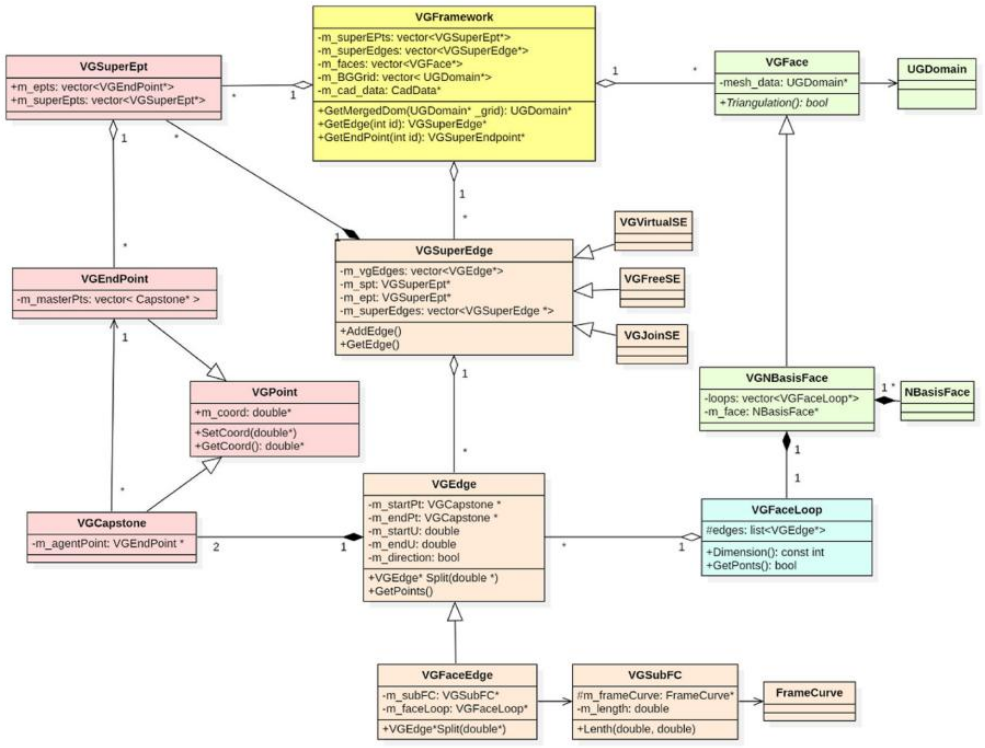


图 2 前期工作中的虚拟拓扑层数据结构类图

2 工程化实现的关键技术挑战

虚几何技术的核心操作——边分割、边焊接、面合并——在 VTL 中修改拓扑关系，同时必须同步更新 DGL 中对应网格的离散数据。此即双层一致性维护问题。每次拓扑操作后，需要重新计算关联网格面的边界点分布、更新 kd 树索引和参数域映射。在单个操作层面实现一致性相对容易，但在批量处理（如一次容差迭代中数十条边的焊接）时，操作之间存在复杂的依赖关系（一条边被分割后，其子边又可能参与另一轮焊接），维护一致性的复杂度急剧上升。这是\emph{虚几何路线自动化程度不高的根本原因之一}：每一步都需要确认两层的状态同步，出现不一致时需要回滚或人工干预，难以构建无中断的全自动修复管线。

工程实践中一个核心发现是：不存在一个适用于所有模型的通用容差。不同来源的 CAD 模型，其尺度范围从毫米级的精密零件到十米级的飞行器，数据转换产生的间隙尺度跨越10^{-6}到10^{-2}量级。我们采用自适应容差迭代策略：定义容差序列$\Sigma = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$，从最小容差开始逐次递增，在每个容差级别执行间隙搜索和虚边焊接。经过数十个工程模型的实践，我们积累了针对不同类型模型的默认容差参数配置：对于航空航天薄壁件模型（典型间隙$10^{-4} \sim 10^{-3}$），使用$\epsilon_1 = 10^{-5}, \epsilon_n = 10^{-3}$；对于一般工业模型（典型间隙$10^{-3} \sim 10^{-2}$），使用$\epsilon_1 = 10^{-4}, \epsilon_n = 5 \times 10^{-3}$。这些默认值被固化在算法底层，使得普通用户无需手动调参即可获得可用结果。

当模型面数超过千面时，虚边搜索和焊接的配对复杂度呈指数增长。为此我们实现了三层加速策略：

（1）基于 ADT 树的虚边空间索引，将候选边对的搜索从$O(n^2)$降至$O(n \log n)$；

（2）基于包围盒的粗筛-精判两级碰撞检测；

（3）容差分级处理，只在小容差级别结束后才触发大规模的网格数据更新，

避免了每步操作都重构网格的开销。

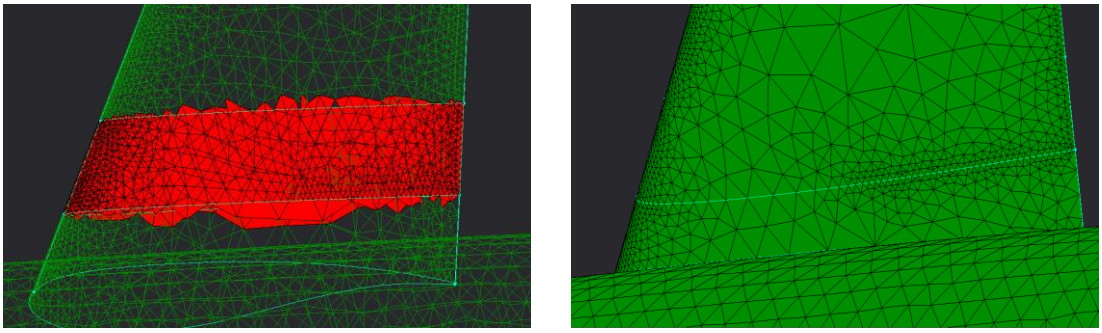
3 几何缺陷修复算法框架

自适应容差拓扑重建：对每个容差ϵ_k，执行两个核心操作。虚边分割：当虚点p与虚边e的距离$d(p,e) \le \epsilon_k$时，将e在p的最远点处一分为二，为焊接提供更精细的对齐。虚边焊接：对e搜索邻域$\mathcal{B}(e,\epsilon_k)$内的候选边$e'$，满足 Hausdorff 距离$\mathcal{H}(e,e') \le \epsilon_k$，将两者融合为共享超边（VGVirtualSE），使两个虚面在边界处建立拓扑邻接。算法同时记录每次迭代的焊接操作，保证已修复的小尺度间隙不受后续大容差干扰。

重叠与穿插修复：重叠和穿插检测在 DGL 上完成。对任意两个虚面F_a和F_b，统计共面相交三角形对数N_{co}和空间相交三角形对数N_{cr}：

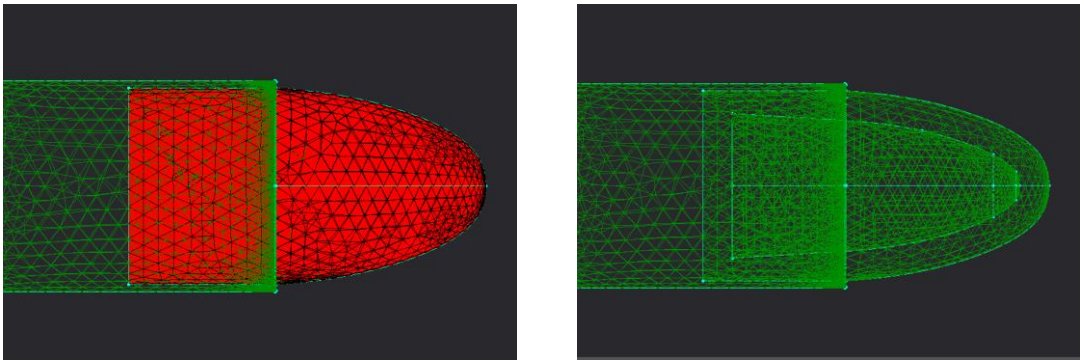
$$R_{co} = N_{co}/\min(N_a,N_b), \quad R_{cr} = N_{cr}/\min(N_a,N_b).$$

根据比率分类处理：完全重叠（$R_{\text{co}} \approx 1.0$）直接删除一个面；部分重叠将一面边界投影至另一面，通过离散剪裁切除重叠区域；穿插则从底层 NURBS 曲面求解光滑交线，对两面同时剪裁，保留交线两侧有效区域。



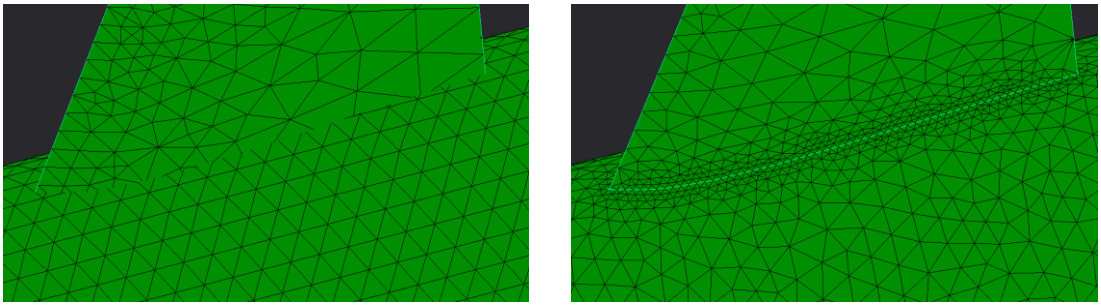
（a）重叠修复前　　（b）重叠修复后

图 3 某飞机机翼重叠区域修复情况



（a）重叠修复前　　（b）重叠修复后

图 4 完全重叠场景处理情况



（a）穿插修复前　　（a）穿插修复后

图 5 穿插场景处理情况

离散几何剪裁算法:输入为虚面F、共形离散网格M_F和约束曲线$C(t)$。算法包含四个阶段：

（1）沿$C(t)$自适应采样，利用 kd 树投影至网格面并转换至参数坐标；

（2）将投影点插入M_F形成半边边界；

（3）通过边翻转和边分割恢复约束边；

（4）使用深度优先染色法分割拓扑区域，

每个区域创建子虚面，相邻子面共享边界处执行离散点同步确保完全重合。

参 考 文 献:

[1] Jun Cao, Xiaohu Guo, Xianfang Sun, and Paul L. Rosin. A hybrid surface model for automatic repair of CAD models. Computer-Aided Design, 69:73–85, 2015.

[2] M. Gammon. A review of geometry cleanup and mesh generation for computational fluid dynamics. PhD thesis, University of Cambridge, 2018.7

[3] Jianwei Guo, Dong-Ming Yan, Xiaohu Guo, Peter Wonka, and Xiaopeng Zhang. A survey of mesh repair. Computer Graphics Forum, 37(6):270–291, 2018.

[4] Wenxin Liu, Dongxiang Xie, Yang Liu, et al. A lightweight interactive framework for unstructured mesh generation. Advances in Engineering Software, 2025. Accepted.

[5] A. Mezentsev and T. Woehler. Methods and algorithms of automated CAD model repair for integration in CAD/CAE. In Proceedings of the 1999 ACM Symposium on Applied Computing, pages 323–327, 1999.

[6] Y. Onishi, Y. Okada, and K. Shimada. Topology-free CAD model repair for mesh generation. Engineering with Computers, 37:647–663, 2021.

[7] R. Portaneri, M. Rouxel-Labbe, T. Lelievre, L. Rineau, and M. Yvinec. Alpha wrapping with an offset. ACM Transactions on Graphics, 41(6):1–18, 2022.

[8] Alla Sheffer, M. Etzion, A. Rappoport, and D. Bercovier. Virtual topology operators for meshing. International Journal of Computational Geometry and Applications, 10(3):309–331,2000.

基于共形映射压缩梯度场的四边形占优网格生成方法

慕茹霜，齐　龙，邱靖颖，韩　芳，熊永平，庞宇飞，刘　杨*

（中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，绵阳 621000）

摘　要：四边形网格因其规则的拓扑结构和优良的数值性能，在工程仿真中具有重要地位。与三角形网格相比，在达到相同精度时，四边形网格所需单元数更少，计算效率更高，尤其适用于对计算要求严苛的高端仿真场景。然而，针对复杂几何模型的全自动四边形网格生成仍存在诸多挑战，尤其是在处理高曲率边界、多尺度特征区域时，现有方法往往面临单元畸变率高、算法鲁棒性不足等问题，限制了其工程应用范围。为此，本文提出一种基于共形映射压缩梯度场的四边形占优网格自动生成方法。该方法首先将三维三角网格通过共形映射转换为二维参数域，利用映射前后的度量变化构建梯度场，进而提取等值线并依据预设尺寸与质量阈值，在参数域中生成以四边形为主的网格。对不满足质量要求的区域，采用三角形单元进行过渡处理。最终，通过逆映射将二维网格变换至三维曲面，形成高质量的曲面四边形占优网格。该方法实现了从三维到二维再回三维的闭环处理，显著提升了网格生成的自动化程度与质量。

关键词：共形映射；梯度场；四边形占优；网格生成

0　引　　言

网格是数值模拟的“基石”，所有物理场（如应力、速度、温度）的离散计算均依赖网格单元的拓扑与几何质量[1]。传统四边形网格[2-7]（几何适应性差）与三角形网格（精度、稳定性不足）均存在明显缺陷，为四边形占优网格研究提供动力。随着工程向“高精度、自动化、智能化”发展，传统网格难以满足复杂场景需求。四边形占优网格作为计算力学、计算流体力学（CFD）、有限元分析（FEA）等领域的重要研究方向，其以“四边形单元为主、少量三角形单元为辅”，兼顾结构化网格的高精度与非结构网格的几何适应性，具备高效计算、几何兼容性与实用性，成为复杂仿真和建模的必然选择。尤其适用于捕捉各向异性特征、保证曲面光滑性或优化计算资源的场景[8]。目前，其在“自动化生成、高质量控制、拓扑优化”方面仍面临诸多科学难题，这些挑战也推动相关研究持续深入。

近年来，多项研究聚焦于专用算法的开发，旨在生成适用于复杂几何形状的高质量四边形曲面网格。已有研究提出一种高效的非结构化四边形占优曲面网格生成算法，可针对任意形状生成高质量曲面单元，展现出更优的网格质量与适应性[9]。预处理技术也被引入四边形占优网格生成器的优化过程中，尤其针对船体及海洋结构物 —该技术可确保生成的网格在满足严苛质量要求的同时，保持较高的生成效率[10]。此外，研究人员还开发了开源流程，以助力生成适用于结构分析（如海洋工程应用场景）的高质量四边形占优网格，该流程借助先进的前沿推进算法，进一步提升了网格的质量与稳健性[11]。基于光滑粒子流体动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH）的并行自适应四边形占优网格生成方法为处理

大规模、自适应网格任务提供了新路径[12]。然而，这些方法在处理复杂几何拓扑全自动高质量网格生成时依然存在工程应用中的普适性不足等问题。

本文提出了一种基于共形映射的四边形占优曲面网格生成方法。该方法首先通过共形映射[13-17]将曲面映射至二维参数域，并依据映射前后度量张量的变化定义压缩比函数，以此构造反映局部尺度变化的梯度场。在此基础上，通过求解水平集方程生成一系列代表不同度量压缩强度的等值线，进而根据预设尺寸阈值对区域进行判别：在满足条件的区域采用结构化方法生成四边形单元；在不满足条件的区域引入三角形单元实现相容过渡，从而在参数域内形成四边形为主的复合网格。最后，利用共形映射的微分同胚性质将参数网格逆映射回原曲面，得到四边形占优的曲面网格。

1 方法描述

本文提出了一种全新的四边形占优网格生成方法。该方法通过将三维曲面网格问题转化至二维参数域进行处理，显著降低了网格生成的复杂度。在此基础上，利用由度量压缩比构建的梯度场生成一系列等值线，并通过在相邻等值线之间填充单元，实现了高效的网格生成，在保证质量的同时大幅提升了生成效率。其核心流程主要包含以下四个步骤：

Step1:创建三角网格。读入 CAD 数模半模 igs 文件，设置表面网格生成参数，使用 NNW-GridStar 软件生成非结构三角网格 M，作为此方法的输入。

Step2:离散 Ricci 曲率流共形映射。将曲面网格 M 共形映射至二维参数域如图 1 所示,得到点线面关系相互对应的二维平面 N，提取度量压缩比。

Step3:梯度场填充四边形占优网格。根据参数化平面网格尺寸以及梯度场推进方向，计算梯度值获取等值线，在梯度线中设置阈值两两生成高质量四边形网格。对于不符合阈值要求的部分，采用前沿推进法填充网格进行处理。

Step4:Tutte 重心逆变换。将生成的参数域四边形占优网格根据共形映射一一对应关系逆变换至曲面空间，最终自动生成曲面四边形占优网格。

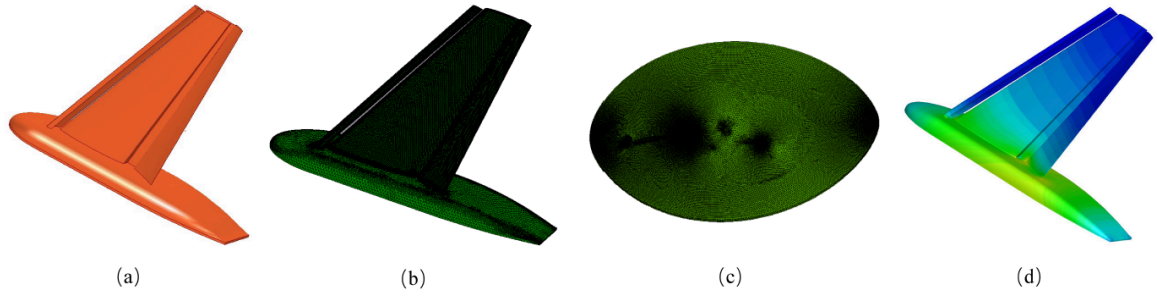


图 1 机翼模型的网格生成和参数化：（a）数字几何模型，（b）非结构化表面网格，（c）通过共形映射生成的参数化域网格，（d）共形压缩比。

在计算机图形学、几何建模与工业设计领域，等值线提取是实现模型特征可视化、尺寸分布分析的关键技术。本文解析的算法，核心目标是基于参数化平面以顶点压缩率为量化指标，通过系统化的几何计算与迭代处理，精准提取并优化反映相同尺寸特征的等值线集合，为后续模型分析、优化提供基础数据支撑。

在参数域中等值线的提取过程中，受曲面几何形态及尺寸函数分布的复杂性影响，生成的等值线主要呈现为单环与多环两种拓扑结构如图 2。单环等值线由单一封闭轮廓构成，其生成通常通过直接追踪尺寸函数等值点并闭合为环实现，处理策略相对明确，主要包括离散化、压缩比判断与点集插入。而对于多环等值线，即包含多个嵌套或分离环路的复合结构，其生成机制虽更为复杂，需额外进行拓扑识别以区分子环的层次与关联关系，但在处理每个独立子环时，仍可复用单环情形的核心流程：即对每一子环分别进行离散化、压缩比评估与网格插入操作。因此，多环的处理可视为在单环方法基础上的扩展与迭代应用，既保持了算法逻辑的一致性，也增强了对复杂拓扑情形的适应能力。

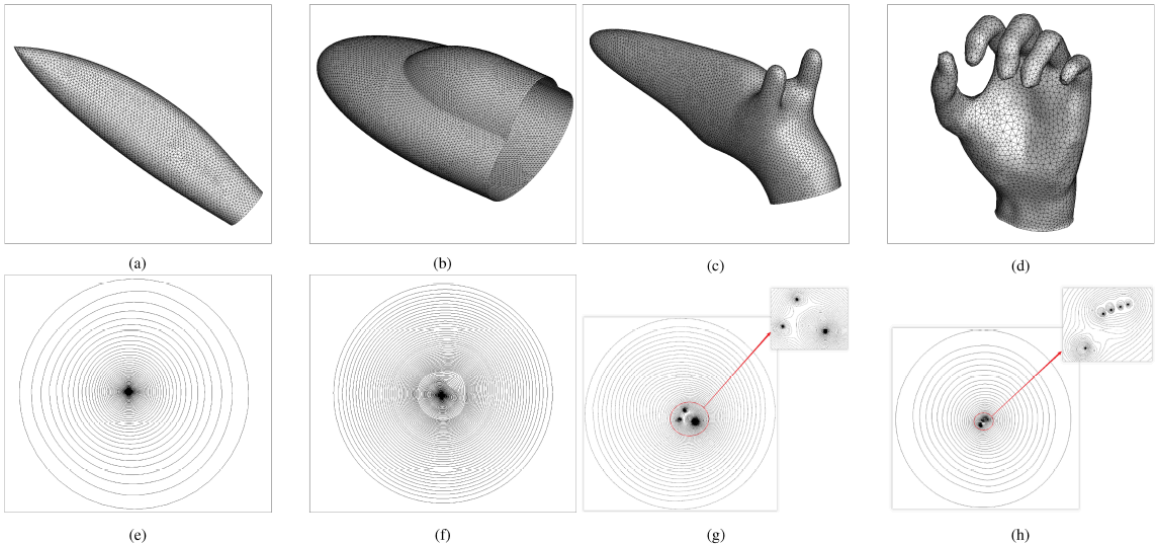


图 2 四个几何模型的初始背景网格和提取的等值线。由 NNW-GridStar 生成的背景网格为(a)NIm、(b)Cang、(c)Giraffe 和(d)Hand 模型，突出了它们独特的几何特征。(e) - (h) 提取的对应等值线，展示拓扑完整性和精确的特征依附性。

本研究方法的一个重要优势在于其高计算效率与完全自动化程度。由于算法不需要人工设置控制参数或进行中间干预，因此非常适用于集成进 CAE 前处理流程或用于多批次大规模网格生成任务中，显著降低了使用门槛和时间成本。

2 结　论

本文提出了一种基于共形映射压缩梯度场的四边形主导网格生成新方法。该方法利用共形映射的双射特性和角度保持特性，有效减少了参数化过程中的畸变；通过构造压缩梯度场并提取等值线，实现了高质量四边形单元的自动生成；引入阈值控制和三角形填充机制，实现了四边形主导网格的自适应生成。

实验结果表明，该方法在网格质量、生成效率和几何精度方面均表现出良好的性能，为复杂几何外形的数值模拟网格生成提供了一种有效的新途径。

未来的工作包括：1）扩展到全四边形网格的生成，消除三角形填充区域；2）拓展至三维体网格网格生成；3）开发并行版本，支持大规模网格的高效生成。

参 考 文 献:

[1] Deiterding, R.Block-structured adaptive mesh refinement-theory, implementation and application[C]//Esaim: Proceedings. EDP Sciences,2011.

[2] Timothy, J., Baker. Mesh generation: Art or science? - ScienceDirect[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2005,41(1): 29-63.

[3] Atalay, F.B., Ramaswami, S., Xu, D. Quadrilateral meshes with provable angle bounds[J]. Engineering with Computers, 2012,28(1): 31-56.

[4] Chen, W., Zheng, X., Ke, J., et al. Quadrilateral mesh generation I: Metric based method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019,356(652-668.

[5] Lei, N., Zheng, X., Luo, Z., et al. Quadrilateral mesh generation II: Meromorphic quartic differentials and Abel-Jacobi condition[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2020,366(112980.

[6] Zheng, X., Zhu, Y., Chen, W., et al. Quadrilateral mesh generation III: Optimizing singularity configuration based on Abel-Jacobi theory[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021,387(114146.

[7] Yang, X., Shan, J., Yu, F., et al. Boundary constrained quadrilateral mesh generation based on domain decomposition and templates[J]. Computers & Structures, 2024,295(107275.

[8] Qi, L., Qiu, J., Xu, G., et al. RFF-meshing: a parallel and anisotropic quad-dominant mesh generation framework based on Riemann frame field[J]. Engineering with Computers, 2024.

[9] Chi, B., Jia, Z., Niu, S., et al. An efficient unstructured quadrilateral-dominated surface mesh generation method for arbitrary geometry with tiny features or crack defects in DiBFM[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2024,164(105750.

[10] Grubišić, L., Lacmanović, D., Tambača, J. Preconditioning the quad dominant mesh generator for ship structural analysis[J]. Algorithms, 2021,15(1): 2.

[11] Grubišić, L., Lacmanović, D., Palaversa, M., et al. An open-source processing pipeline for quad-dominant mesh generation for class-compliant ship structural analysis[J]. Journal of marine science and engineering, 2022,10(2): 209.

[12] Hu, Y., Bai, H., Pang, Y., et al. A novel SPH-based efficient adaptive quadrilateral-dominant mesh generation method[J]. Engineering with Computers, 2025: 1-19.

[13] Van Essen, D.C., Drury, H.A., Joshi, S., et al. Functional and structural mapping of human cerebral cortex: solutions are in the surfaces[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1998,95(3): 788-795.

[14] Wang, Y., Shi, J., Yin, X., et al. Brain surface conformal parameterization with the Ricci flow[J]. IEEE transactions on medical imaging, 2011,31(2): 251-264.

[15] Zeng, W., Samaras, D., Gu, D. Ricci flow for 3D shape analysis[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010,32(4): 662-677.

[16] Gu, X., Parametrization for surfaces with arbitrary topologies, Harvard University2003.

[17] Qi, L., Wu, Q., Xu, G., et al. DRL-MeshGen: automated block-structured mesh generation framework via deep reinforcement learning and optimal conformal mapping[J]. Engineering with Computers, 2025: 1-23.

自适应笛卡尔网格生成的 GPU 并行方法

赵洪杰，李瑞田，张莹桥，陈浩，陈波，代喆，邓亮*

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘　要：自适应笛卡尔网格因其自动化程度高、复杂外形适应性好等优势，在计算流体力学（CFD）领域应用广泛。然而，在 GPU 异构并行架构下，满足 2：1 平衡约束的自适应细分过程会引发递归式全局拓扑依赖，与 GPU 细粒度并行模式产生冲突；同时，传统“先缓冲层加密、后内外判定”的生成流程存在大量冗余计算；且传统射线法在 GPU 平台存在奇点判定困难，制约了网格生成效率。针对上述挑战，本文提出了一套完全在 GPU 端执行的并行网格生成方法。首先，发展了基于单层推进与继承式栈遍历的并行自适应细分算法，将 2：1 平衡约束的维护解耦为无递归依赖的并行子任务；其次，提出了基于层级传播的异构染色策略，替代传统射线法，并重构了“先判定、后缓冲”的生成流程，有效减少冗余计算。典型三维测试算例结果表明，本文网格生成相较于串行方法效率可提升两个数量级，在百万网格规模下，生成时间压缩至 50 毫秒以内，具备工程应用潜力。

关键词：自适应笛卡尔网格，GPU，2：1 平衡约束，CFD

0 引　言

自适应笛卡尔网格采用“空间到物面”的非贴体策略，具有网格生成自动化程度高、复杂外形适应性强等特点，在飞行器气动性能评估中展现出广阔的应用前景。国内外研究团队相继发展了 Cart3D[1]、UTCart[2]等工业级网格生成软件。随着高性能计算迈入 GPU 异构加速时代，将自适应笛卡尔网格生成流程高效部署于 GPU 架构已成为研究热点。

然而，自适应细分必须遵循严格的 2:1 平衡约束，以保证不同层级网格交界处数值解的稳定性。单个单元的细分可能触发多层邻居单元的递归细分与全局拓扑的动态变更，形成“涟漪效应”[3]。这种全局依赖关系与 GPU 细粒度并行的计算模式产生冲突，给并行生成带来严峻挑战。同时，传统射线法在 GPU 平台存在奇点判定困难，制约了网格生成效率。此外，传统生成流程通常采取“先缓冲层加密、后内外判定”的串行顺序，导致大量缓冲层单元在后续判定阶段被删除，造成计算资源与内存空间的无效消耗。针对上述问题，本文依托国家数值风洞工程自主研发的 NNW-FAST 软件[4]，提出一种适配 GPU 架构的自适应笛卡尔网格并行生成方法，以化解递归依赖、消除冗余计算，提升网格生成效率。

1 问题描述

针对网格生成的 GPU 并行生成挑战，国内外学者已围绕树型数据结构展开了广泛研究。自适应笛卡尔网格通常以四叉树/八叉树为底层支撑，其生成算法主要分为自上而下与自下而上两类技术路线。自上而下方法以根节点为起始，按照预设准则递归细分不满足分辨率要求的节点，直至达到终止条件或最大树深；自下而上方法则从底层节点逐层聚合，通过补全各层级缺失单元逐步生成覆盖全域的完整树结构。

Karras 等人提出的最大并行策略通过莫顿码排序和并行区间搜索，实现了不同层级中间节点的并行构建，极大地提升了非平衡网格的生成效率[5]。在此基础上，Wang 等人继承 Sundar 等提出的经典线性八叉树理论框架，提出了 GPU 适配的线性树 2:1 平衡算法[6-7]。该算法通过搜索角与搜索键机制完成邻接单元查询，采用从细到粗的逐层平衡策略，首次在 GPU 环境下实现了满足 2:1 约束的自适应网格生成。然而，自下而上构建以底层离散点集为输入，对于工业仿真中常见的几何缓冲层生成、包围盒分级细化、曲面曲率自适应等实际需求，需先将几何特征转化为离散采样点再执行构建，适配灵活性弱于自上而下的递归细化模式，适用场景存在一定限制。此外，针对传统生成流程中的冗余计算以及射线法的奇点判定困难等问题，当前在 GPU 并行框架下亦缺乏系统性优化方案。因此，发展一种高效的自上而下方法的自适应笛卡尔网格生成的 GPU 并行方法，已成为突破上述效率瓶颈的关键研究方向。

2 结　论

针对上述三个问题，本文提出了一种自适应笛卡尔网格生成的 GPU 异构并行方法。通过基于单层推进与继承式栈遍历的并行自适应细分算法，将 2:1 平衡约束转化为无递归依赖的并行子任务，成功化解了全局递归拓扑依赖。在物面内外判定方面，提出了基于层级传播的异构染色策略，替代传统射线法，规避了奇点计算困难。在生成流程方面，将流程重构为“先判定、后缓冲”，在缓冲层生成之前直接剔除内部及相交单元，避免了无效的冗余计算与内存开销。

实验选取 CT-1 飞行器、CHN-F1 飞翼标模和 X-38 飞行器作为典型三维测试算例。结果表明，相较于 CPU 串行版本，本文网格生成全流程在 NVIDIA A100 上获得 198.2 至 290.8 倍的加速比。在百万网格规模下，各典型算例的网格生成总耗时可压缩至 50 毫秒以内，具有良好的工程时效性。该高效方法已集成至国家数值风洞工程 NNW-FAST 软件中，为工业级气动快速评估提供了有力支撑。未来工作拟将该方法推广至动态自适应网格及多 GPU 集群环境，以满足更复杂、更大规模的 CFD 仿真需求。

参 考 文 献:

[1] Aftosmis M J, Berger M J, Melton J E. Robust and Efficient Cartesian Mesh Generation for Component-Based Geometry[J]. Aiaa Journal, 2015, 36(6): 952-960.

[2] Tamaki Y, Imamura T. Turbulent flow simulations of the common research model using immersed boundary method[J]. AIAA Journal, 2018, 56(6): 2271-2282.

[3] 任丽欣，刘树森，郭煜中，等. 基于 GPU 的并行自适应笛卡儿网格建模方法与仿真应用研究综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2026, 38(02): 296-312.

[4] 中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所. 国家数值风洞工程快速气动分析软件[简称：NNW-FAST]; 2025SR2350018[P]. 2025-12-04.

[5] Karras T. Maximizing parallelism in the construction of BVHs, octrees, and k-d trees[C] //Proceedings of the 4th ACM SIGGRAPH/Eurographics Conference on High-Performance Graphics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2012: 33-37.

[6] Sundar H, Sampath R S, Biros G. Bottom-up construction and 2:1 balance refinement of linear octrees in parallel[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, 30(5): 2675-2708.

[7] Wang L, Witherden F, Jameson A. An efficient GPU-based h-adaptation framework via linear trees for the flux reconstruction method[J]. Journal of Computational Physics, 2024, 502(c): 112823.

基于 SCNN 结合拓扑保持的网格压缩方法

陈锐锋，高绍武

（粤港澳大湾区（广东）国创中心，广州 510530）

摘　要：科学计算类网格是当前数值模拟计算场景的基石，为确保物理模拟计算与实际物理测量值间的准确性，研究人员通常通过加密网格的方式实现，最终导致网格数量呈指数级增长，目前大部分结构计算场景网格量达百万级、流体计算场景下达千万级部分案例达亿级规模，导致对网格数据的处理如存储、加载、传输等环节遇到了瓶颈。针对上述问题本文提出了一种基于单纯复形(Simplicial Complex)理论构建自编码神经网络（AutoEncoder），该网络将大规模的网格数据通过编码（Encoder）网络将数据高保真地映射到潜在编码空间（Latent Code），再通过解码（Decoder）网络将潜在编码空间映射回原始空间,潜在编码空间维度通常比原始空间维度要小几个数量级，同时叠加量化技术可进一步压缩数据，优化大规模网格在实际应用场景下的存储、加载、传输效率瓶颈问题，同时通过单纯复形神经网络（Simplicial Complex Neural Network，SCNN）来显示地表示网格数据，通过霍基拉普拉斯算子（Hodge Laplacian）构建点与边、边与面、面与体间的消息传递机制以确保网格拓扑结构的一致性，实现在保证网格拓扑结构特征的基础上对网格数据进行压缩的一种方法。

关键词：网格压缩，SCNN，单纯复形，自编码，拓扑保持

0 引　言

在科学计算与高性能计算领域，随着超算性能的飞速发展，由流体力学 CFD、气象、海洋、核物理等领域内进行物理模拟仿真计算所生成的网格数据量正以指数级增长[1]。这类网格数据通常以三角形和四面体网格形式存在，用于精确描述复杂几何边界和捕捉剧烈变化的物理现象，但海量数据给存储、加载、传输等环节造成了极大的难点，同时也面临处理数据效率低下的严峻问题，促使研究人员急需一种高效的数据压缩处理方法。然而，传统的无损压缩方法由于其针对浮点数的压缩率通常只能达到 2 倍左右[2]，无法满足研究人员对数据进行高效存储与快捷传输的需求。虽然以 SZ 和 ZFP 为代表的误差有界有损压缩[2]（Error Bounded Loss Compression）方法在科学数据压缩领域取得了显著成功，但这些传统方法主要依赖数据的空间平滑性假设，其量化与截断操作极易剔除或伪造流场中的涡旋、分离面等关键拓扑特征，但这些拓扑特征对于研究人员研究相关物理特性是极为重要的，因此必须保证拓扑结构的完整性。近期有研究人员尝试利用图神经网络（GNN）、隐式神经网络（INR）等方法对网格类数据进行压缩，但 GNN 通过构建节点与边的关系即只能构建一阶节点邻接关系，无法感知由面或体构成的高阶拓扑流形特征；INR 通常将科学计算网格进行空间离散后将相关物理场数据嵌入进坐标空间，其极大地破坏了空间拓扑结构，对研究人员进行相关领域特征研究造成了极大的障碍。因此，本文融合拓扑深度学习[3]（Topology Deep Learning，TDL）与代数拓扑中的单纯复形（Simplicial Complex）理论，构建了基于单纯复形神经网络（Simplicial Complex Neural Network，SCNN）在保持网格拓扑结构的基础上对网格数据进行压缩的一种压缩新范式，以期解决在高保真环境下对大规模网格数据进行压缩，以解决其在存储、加

载、传输中的瓶颈问题，加快物理模拟数值计算。

1 问题描述

针对网格数据尤其是非结构化网格数据的压缩，目前主流方法面临以下三大严峻挑战：1）传统误差有界压缩（Error Bounded Lossy Compression）方法存在“拓扑盲区”；2）传统深度学习压缩方法存在“高阶拓扑感知缺失”；3）代数拓扑理论中拓扑约束的“不可微瓶颈”。

1）传统误差有界压缩方法存在“拓扑盲区”，如以 SZ 系列为代表的预测型压缩模式（如 Lorenzo 预测器）为例，其在处理包含激波、强剪切层等低自相关性数据时，为了控制其逐点（Point Wise）误差而进行保守型量化方法，将破坏网格数据的全局性拓扑结构，产生大量的异常结构；

2）传统深度学习压缩方法存在“高阶拓扑感知缺失”，如传统的图神经网络（GNN）仅能获取节点、节点与节点构成的边的拓扑信息即仅能获取一阶节点邻接关系，而无法感知由面或体构成的高阶拓扑结构；再比如隐式神经网络（INR）通常将网格简化为点云或通过三维规则化网格进行重采样获取规则化单元，这种低阶采样极易导致过平滑（over-smoothing）现象，进而导致三维流场中的涡流、拓扑孔洞在解码 Decoder 过程中被直接平滑，进而丢失关键拓扑结构特征，无法实现拓扑保持和反映特殊的物理结构现象；

3）代数拓扑理论中拓扑约束“不可微瓶颈”，在传统代数拓扑计算中持久同调（Persistent Homology）是量化拓扑特征的“黄金标准”，但其计算过程（如边界矩阵约简）本质上是离散且不可微的，如何通过 AI 模型开发框架如 PyTorch 将拓扑距离度量（如 Wasserstein 距离）转化为开发框架下的自动反向传播的可微损失函数即 PyTorch 下的自动微分计算 autograd 模式，这是实现利用拓扑感知技术进行端到端压缩的一大技术障碍；

2 结　论

为了突破网格数据尤其是非结构化网格在压缩过程中保持拓扑特征的模式下实现高保真、高压缩率、快速压缩和解压缩，本文提出了一种基于 SCNN（Simplicial Complex Neural Network）结合网格拓扑保持的自编码（AutoEncoder）模式的压缩方法。该方法包括编码器（Encoder）、潜在编码空间（Latent Code）和解码器（Decoder）构成。其编码器（Encoder）部分通过单纯复形（Simplicial Complex）理论综合考虑了 0 维点单元、1 维线单元、2 维面单元、3 维体单元，可完美地与非结构化的四面体网格单元类型相匹配（四面体网格单元是目前绝大多数物理数值模拟仿真所采用的网格类型，同时四面体网格类型也是其它网格类型的基础，所以针对四面体网格类型的研究具有一定的代表意义），构建好单纯复形（Simplicial Complex）后应用持久同调（Persistent Homology）算法，生成对应的持久图（Persistence Diagram）PD_{orig}，此持久图（PD）是后续训练过程中保持网格拓扑结构的“黄金标准”；在构建好的单纯复形网络中执行霍基拉普拉斯算子（Hodge Laplacian）来同时获取网格局部平滑性特征（如相邻网格节点的物理量渐变特征）和全局拓扑流形特征（如是否有多条边构成了一个涡旋核），对于维度为 k 的霍基拉普拉斯算子 L_k 定义为 $L_k=B_{k+1}B^T_{k+1}+B^T_kB_k$，其中 B 为单纯复形的 k 维的边界算子（$B_k$），霍基拉普拉斯算子可将信息在 k-1 维、k 维和 k+1 维复形单元间进行有效的聚合和扩散，在 SCNN 中使用霍基拉普拉斯算子进行卷积计算时，其内部计算过程包含了对网格数据拓扑特性的聚合和分离，从而可使其在学习过程中具备识别和保留拓扑结构特征的内在能力[4]。经过多层高阶卷积后，编码器将输出一个紧凑的潜在编码空间（Latent Code），此向量空间不仅包含网格与物理场信息，更浓缩了经过 SCNN 网络提炼的网格拓扑信息，此潜在编码空间是整个压缩过程中整体数据的核心，此潜在编码空间即可认为“压缩后的数据”；解码器（Decoder）与编码器（Encoder）完全对称，解码器负责从潜在编码空间（Latent Code）中逐步

恢复出原始网格上的物理场数据包括网格空间坐标等数据，解码器也由一系列的反向高阶卷积层构成，负责将潜在编码空间中的信息重新映射到各个维度的单纯复形上，以此实现对“压缩数据”的“解压缩”过程。

训练过程中拓扑感知损失函数的设计主要有两部分组成拓扑损失（L_{topo}）和误差有界损失（L_{error}）。其中拓扑损失直接度量重建网格数据的拓扑结构与原始数据拓扑结构的一致性，其计算可通过对重建后的网格数据应用持久同调算法计算出重建后的持久图 PD_{recon}，再计算 PD_{orig} 与 PD_{recon} 之间的 Wasserstein 距离[5]即 $L_{topo}=W_p(PD_{orig}, PD_{recon})$，此损失函数将直接抑制任何拓扑特征的增生、湮灭、移位等的拓扑结构的变化；误差有界损失用于控制重建网格数据与原始网格数据之间的整体偏差，并确保其不超过所设置阈值 e，通过 MSE 作为其逐点误差损失（Point Wise）函数。总损失函数为此两部分损失函数的加权和即 $L_{total}=aL_{error}+bL_{topo}$，其中 a 和 b 是超参数，用于控制数据保真度与拓扑保持之间进行权衡。通过最小化 L_{total}，SCNN 自编码模型就能快速地学习到在满足误差约束条件下严格保持数据原始拓扑结构的网络模型参数权重。

通过在真实的结构分析场景下对非结构化的四面体网格数据应用 SCNN 自编码网络模型对网格数据进行“压缩”和“解压缩”实验验证，其逐点误差信息：平均绝对误差 0.1956、最大绝对误差 0.6810、标准差 0.0844。该案例的网格特征长度为 985.85，所以其相对平均误差为 0.0198%、最大相对误差为 0.0691%。原始网格数据与重建后的网格数据的可视化结构如图 1 所示。逐点位移误差值云图可视化如图 2 所示。

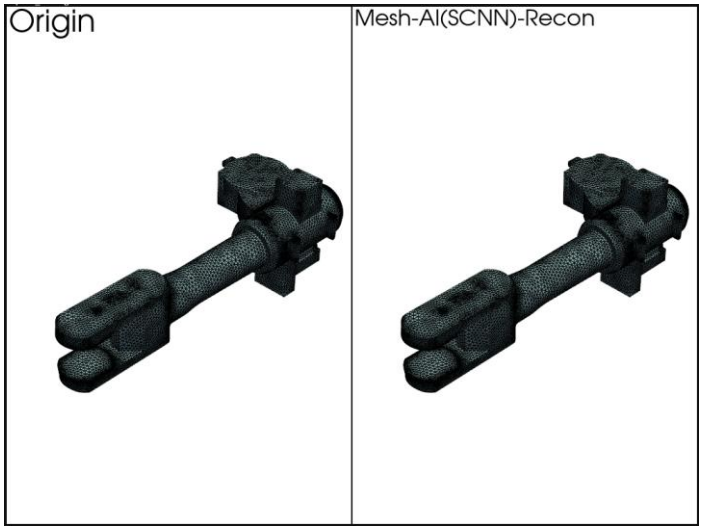


图 1、原始网格数据与重建后网格数据可视化对比

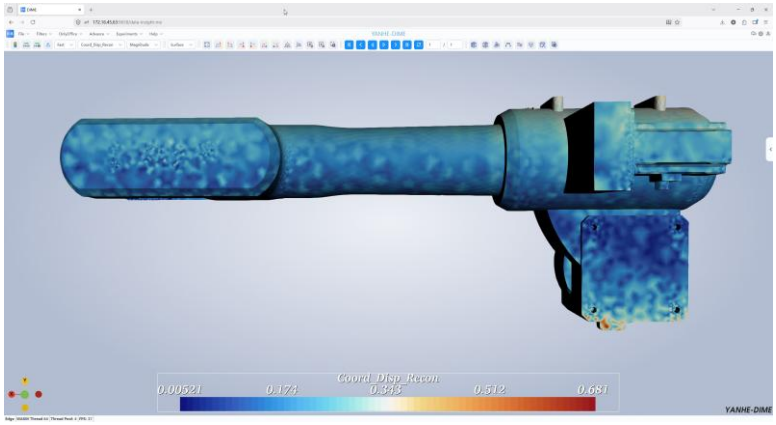


图 2、位移空间逐点误差云图可视化

综合可视化分析结果和相关误差分析结果可以得出基于单纯复形+拓扑保持的自编码神经网络方法对非结构化数据进行网格数据“压缩”和“解压缩”的技术是完全可行的，但其也存在数据恢复精度误差偏大的问题急需解决。

未来的工作主要包括以下几个方面。1）进一步优化损失函数设计；2）支持结合多物理场结果数据统一计算处理方法；3）研究支持高阶网格类型的高阶消息传递计算方法。

参 考 文 献:

[1] Nathaniel Gorski, Xin Liang, Hanqi Guo, Lin Yan, Bei Wang. A General Framework for Augmenting Lossy Compressors with Topological Guarantees [J]. IEEE TVCG. 31(6). 2025. 3693-3705.

[2] DI S, LIU J, ZHAO K, et al. A Survey on Error-bounded Lossy Compression for Scientific Datasets[J]. ACM Computing Surveys, 2024, 37(4): 111.

[3] PAPILLON M, BODNAR C, et al. Topological Deep Learning: Going Beyond Graph-Structured Data[J]. Nature Computational Science, 2024, 4(2): 108-121.

[4] Roddenberry, T.M.; Frantzen, F.; Schaub, M.T. & Segarra, S. (2022), ″Hodgelets: Localized Spectral Representations of Flows On Simplicial Complexes″, In IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)., May, 2022. , pp. 5922-5926。

[5] Hofer, Christoph, Roland Kwitt, Marc Niethammer and Andreas Uhl. “Deep Learning with Topological Signatures.” ArXiv abs/1707.04041 (2017): n. pag.

面向工业应用的 NURBS 曲面保型三角化方法

谢冬香，刘文鑫，熊永平，刘 杨*

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘 要： 针对 CAD/CAE 集成设计与分析流程，将 NURBS 曲面高效、鲁棒地转化为高质量三角形网格是核心环节之一。然而，现有方法在处理工业级复杂模型时，常面临因 NURBS 曲面参数化奇异、退化、高曲率变化以及复杂裁剪边界所导致的网格质量差、拓扑非保型乃至算法失效等问题。针对此问题，提出了一种面向工业应用的 NURBS 曲面保型三角化算法。该算法采用分层处理策略：首先在虚几何层构建环拓扑信息，确保面片交界处的拓扑一致性；随后，通过曲率自适应剖分在参数域生成结构化的 UV 网格候选点，并设计四阶段二维三角形连接策略，以保障网格的拓扑保型性；最后，基于曲率对边界曲线进行自适应离散，并利用边界对原始网格进行裁剪，从而有效处理裁剪曲面、多连通等复杂区域。在 F6 机翼、Spacecraft、CHN-T1 等一系列工业模型上的测试结果表明，本算法在网格质量、鲁棒性和效率方面具有显著优势，能够为下游数值仿真提供可靠的离散几何基础。

关键词： NURBS 曲面；保型三角化；自适应剖分；裁剪曲面

0 引 言

计算机辅助设计（CAD）和计算机图形学中，非均匀有理 B 样条（NURBS）曲面因其能够精确且紧凑地表示复杂自由形态几何体，已成为行业标准。然而，NURBS 曲面的直接渲染和实时交互处理仍然面临巨大挑战。这是因为大多数图形处理单元原生仅支持三角形网格的渲染，而无法直接处理 NURBS 的数学表示。一个理想的 NURBS 曲面三角化方法应满足：（1）在给定几何容差下最小化三角形数量；（2）准确捕捉曲面的曲率特征，保证法向逼近精度；（3）多面片交界处严格拓扑一致，无裂缝、无重叠；（4）鲁棒处理退化情形（控制点重合、奇异边、退化面等）。Aubry 等[1]提出的分层近似方法，通过边界曲率离散、结构化点生成和局部拓扑优化等步骤，兼顾了三角形数量压缩与拓扑一致性。。本文在此基础上进一步深入，提出了一种面向工业应用的 NURBS 曲面保型三角化算法。主要贡献包括：（1）一种完备的行列双方向四边形剖分+耳切法修补的二维参数域三角形连接算法，支持任意裁剪曲面和不规则边界；（2）基于虚几何层的实现架构，实现面片间离散点的自动匹配；（3）在多个航空工业数模上验证了算法的鲁棒性和效率。

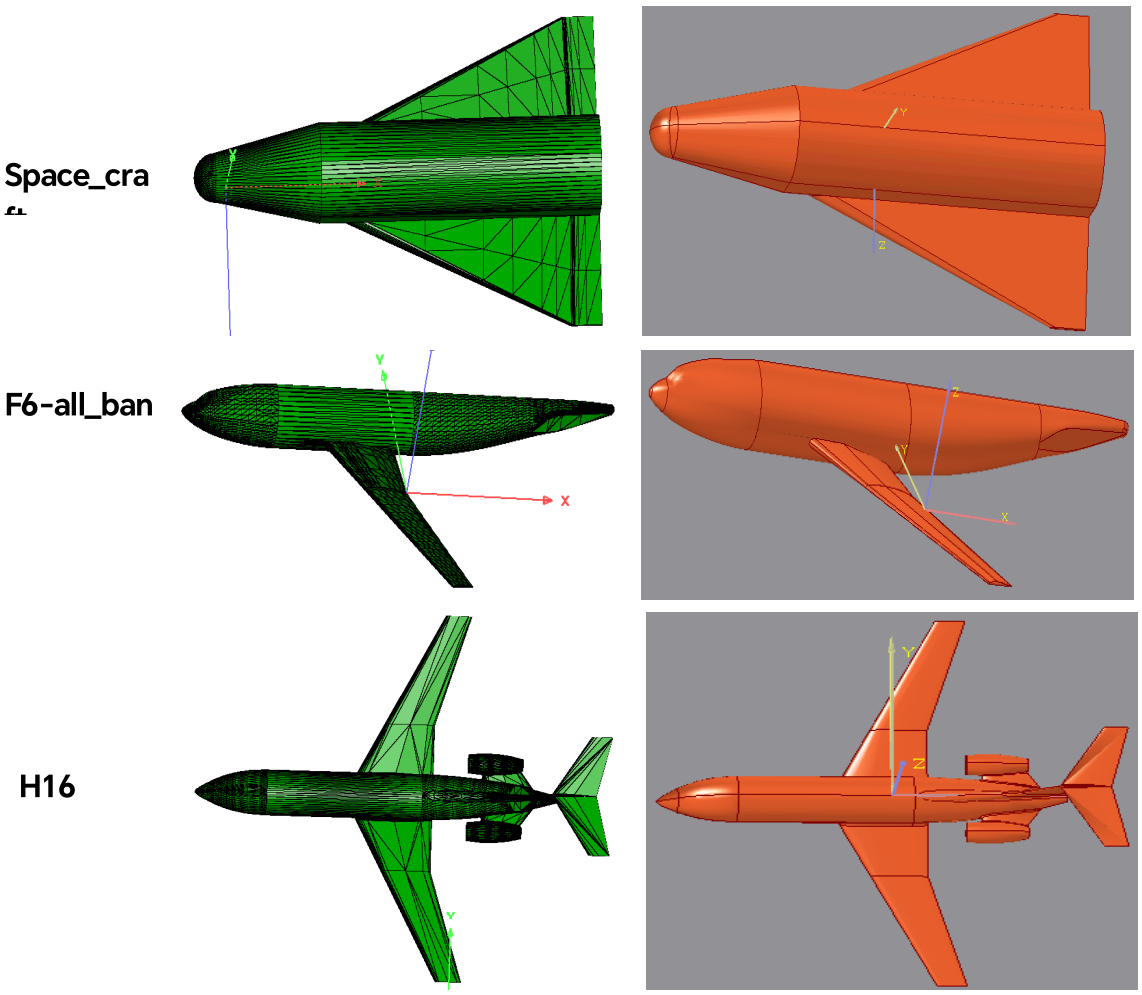
1 问题描述

设 S(u,v)为一个 NURBS 曲面，参数域Ω=[0,1]× [0,1]上可能存在若干裁剪环。粗三角化的目标是在给定误差容限ε下，生成由三角形集 T 组成的离散曲面Σ，满足：

$$\max_{p\in\sum}\min_{q\in\sum}\left\|p-q\right\|\leqslant\varepsilon\text{,|T|尽可能小}$$

本算法的具体流程如下：首先，构建虚几何层信息，从 CAD 内核读取几何拓扑信息，构建虚面的环结构，合并环内边的共端点，确立边的方向一致性，并预置不同粒度（粗、中、细）的离散参数，由底层自适应选择合适密度。其次，进行边界自适应离散，其质量决定全局效果。对 NURBS 曲线，采用曲率驱动离散

点密度，在高曲率区加密、低曲率区稀疏，并利用第一、第二基本形式系数计算主曲率与主方向。第三，生成参数域结构化点，通过扫描 NURBS 节点向量，移除重复节点，定位曲面形状变化的关键位置，并结合曲率分析，沿 u 和 v 方向自适应生成结构化的网格候选点。第四，进行二维参数域三角形连接，对每行收集有效点及其列索引，建立映射，同时构建有效标记矩阵，分别按行方向和列方向进行四边形剖分并去重，对行列均无法规整剖分的多对多拓扑区域采用改进的耳切法修补。最后，进行退化处理与质量优化，检测退化面（某行或某列退化为单个有效点），并执行相应的连接策略。



(a)保型三角化　　(b)渲染效果

图 1 保型三角化效果图

图 1 展示了保型三角化的离散效果及可视化渲染效果。F6 机翼模型包含大量裁剪曲面和 Bezier 曲面块划分，算法仍稳定生成拓扑一致的保型三角化。Spacecraft 数模的第 30 个面存在极端的三维退化点（两条独立边界边在空间收缩至同一位置），算法通过退化点检测与合并策略成功处理。在所有测试模型中，多面片拼接区域的边界点完全一致，未出现裂缝或重叠。算法对不同复杂度和几何细节的模型具有自适应能力。

2 结　论

本文提出一种面向工业应用的 NURBS 曲面保型三角化算法，方法通过虚几何层信息构建、边界曲率自适应离散、NURBS 节点向量扫描、行列双方向四边形剖分、耳切法修补和退化处理等分层步骤，在保证拓扑一致性的前提下，以最少三角形精确表达复杂工业几何的曲率特征。在多个工业级模型（如 F6 机翼、Spacecraft、CHN-T1）上的测试结果表明，该方法在网格质量、拓扑保型性和鲁棒性优势显著。未来的工作将聚焦于引入基于内在度量的简化方法[2]，在保持曲面内在几何的同时进一步压缩网格规模；探索其在高性能计算平台上的并行实现，并研究将其与基于机器学习的网格生成方法相结合的可行性。

参 考 文 献:

[1] Aubry, R., et al. "A robust and efficient approach for the tessellation of NURBS surfaces." Procedia Engineering 124 (2015): 44-56.

[2] Liu, Y., et al. "Surface simplification using intrinsic metrics." ACM Transactions on Graphics 42.4 (2023): 1-13.

PACE：基于误差等分布的物理感知网格简化

裴婧竹，陈新海*

(国防科技大学计算机学院，湖南长沙 410073)

摘　要：高分辨率网格会显著增加复杂数值仿真的计算成本。虽然人工设计的网格或自适应网格简化可以减少冗余自由度，从而降低计算开销。但传统方法或是依赖昂贵的迭代优化，或是需要大量监督数据学习边坍缩策略。本文提出一种面向流体仿真的图神经网络架构，实现基于误差等分布的物理感知网格简化（PACE）。该网络以图神经网络为基础架构，并结合低成本物理信息引导的网格简化策略。该方法不依赖几何启发式规则，而是根据局部物理变化来判断边是否坍缩，优先简化物理变化平缓区域，并将更多网格分辨率保留在仿真关键区域。该架构通过边编码器提取物理和几何信息，并利用图注意力机制建模邻边差异和多跳拓扑关系，从而提高逐边简化决策的准确性。本文在多个稳态和瞬态工况下开展评测。与多种网格简化方法相比，PACE 在求解精度和效率方面均表现出稳定优势。实验结果表明，物理信息能够有效提升流体仿真中的网格简化质量与效率。

关键词：网格简化，非结构网格，误差等分布

0 引　言

计算流体力学（CFD）通过将计算域离散为网格以求解流体控制方程。均匀细网格虽然能够降低离散误差，但其计算成本随网格尺度减小而快速增长。实际流场通常具有明显的空间非均匀性，激波、尾迹和涡结构等区域需要较高的网格分辨率，而大部分平缓区域存在较多冗余单元。因此，自适应网格根据局部物理变化调整网格分辨率，在计算成本与求解精度之间取得平衡。误差等分布是自适应网格构造的重要原则，其目标是使不同网格单元对总体离散误差的贡献趋于均衡。然而，传统自适应方法通常需要反复进行误差估计、网格修改和数值求解，在大规模 CFD 仿真中仍具有较高开销。为此，本文提出基于误差等分布的物理感知网格简化框架 PACE。该方法以图神经网络为骨干，利用基于误差等分布思想的损失函数引导模型预测逐边简化得分场。推理阶段通过拓扑约束的并行边坍缩快速生成非均匀网格，在减少网格规模的同时保留重要流动结构以维持求解精度。

1 问题描述

现有网格简化方法主要面向计算机图形学，其目标是在减少网格规模的同时保持原始模型的几何特征和视觉效果。经典的二次误差度量网格简化方法（QEM）[1]利用几何误差确定边坍缩顺序，后续研究进一步在 QEM 基础上增强了对几何特征的保持能力[2-4]。

近年来，一些方法尝试将物理特征引入网格简化。HMSimNet[5]和 TetSimNet[6]结合几何和物理特征学习对仿真精度影响较小的区域。这类方法能够在降低网格规模的同时保持仿真精度，但其主要采用监督学习训练范式，模型对特定数据类型依赖较强，泛化能力有限。最近也有一些方法借鉴多重网格的思想，在神经网络中构建粗细网格之间的多尺度信息传递来快速完成网格简化[7-9]。

通过对上述研究的分析，可以得到以下观察：1）现有网格简化仍以几何简化为主，重点关注视觉效果和几何特征保持；2）物理感知网格简化已经得到初步研究，但代表性方法仍具有较强的物理问题或训练场景依赖，泛化能力有待提高；3）现有代表性的物理感知网格简化较多面向固体力学，而面向流体力学领域的网格简化方法仍相对有限。

2 结　论

为了提高流体数值仿真的计算效率，本文提出一种基于误差等分布的物理感知网格简化方法（PACE）。该方法利用低成本流场求解结果和轻量级图神经网络模型预测网格简化策略，并通过边坍缩来完成网格简化。实验结果表明，该方法能够根据物理场的空间变化自适应分配网格分辨率，在保护关键物理区域的同时减少平滑区域中的冗余网格，从而在控制求解误差的基础上降低数值仿真的计算开销。

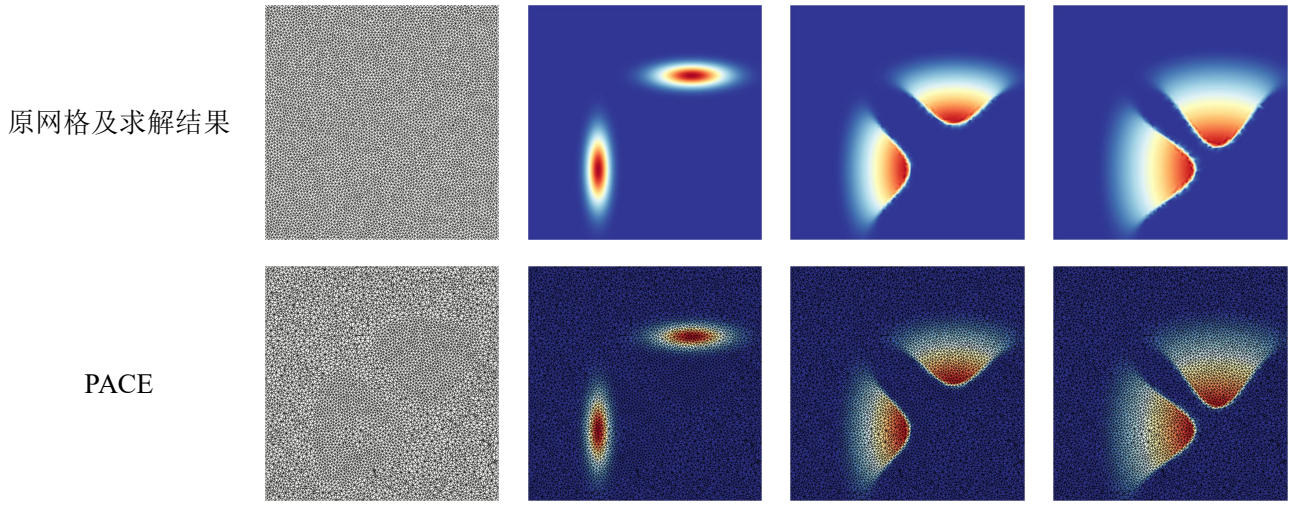


图 1 瞬态工况可视化结果

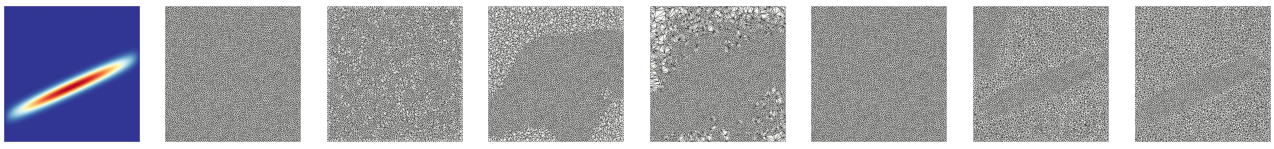


图 2 稳态工况多方法对比可视化结果

未来的工作包括以下几个方面。1）进一步研究面向三维非结构化网格的物理引导简化方法；2）面向大规模计算网格，进一步提高边简化得分预测和并行边坍缩的计算效率。

参 考 文 献:

[1] GARLAND M, HECKBERT P S. Surface Simplification Using Quadric Error Metrics[C]//Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. 1997:209-216.

[2] BHOSIKAR K, SAVALIA P, TIWARI L, et al. Fast and Robust Mesh Simplification for Generated and Real-World 3D Assets[C]//IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop on 3D Geometry Generation for Scientific Computing. 2026.

[3] ZHANG B, YU X, CAI W, et al. A Structure-Aware Triangular Mesh Simplification Based on Graph Neural Network (GNN)-Guided Quadric Error Metrics (QEM)[J]. Mathematics, 2026, 14(10):1610.

[4] LIU H T D, ZHANG X, YUKSEL C. Simplifying Textured Triangle Meshes in the Wild[J]. ACM Transactions on Graphics, 2025, 44(6):181:1-181:16.

[5] WANG R, LIU S, YU J, ZHAN H. HMSimNet: A Hexahedral Mesh Simplification Network Model for Preserving Analysis Accuracy[J]. Advances in Engineering Software, 2025, 202:103874.

[6] LIU S, WANG R, ZHAN H, YU J. TetSimNet: A Tetrahedral Mesh Simplification Network Model for Preserving Analysis Accuracy[J]. Engineering with Computers, 2025, 41(6):4345-4363.

[7] SHUMILIN S, RYABOV A, YAVICH N, et al. Self-Supervised Coarsening of Unstructured Grid with Automatic Differentiation[C]//Proceedings of the 41st International Conference on Machine Learning. Proceedings of Machine Learning Research, 2024, 235:45315-45328.

[8] RYABOV A, NAUMOV V, SHUMILIN S, et al. Learnable Stability-Aware Computational Grid Coarsening for Accelerating Physics Simulations[J]. Machine Learning: Science and Technology, 2026, 7(1):015019.

[9] BAZZI A, CARDINAUX D, NEMER R, et al. Physics-Informed Coarsening for Multigrid Graph Neural Surrogates[C]//Proceedings of the 43rd International Conference on Machine Learning. 2026.

基于标架场引导与单调拓扑修正的特征保持孔洞修复方法

高业鹏，肖周芳*，肖　聪，顾博文，徐　岗

（杭州电子科技大学，杭州 310018）

摘　要：针对机械 CAD 三角网格中的孔洞跨越锐边、角点及分片光滑曲面时难以恢复缺失结构的问题，提出一种基于三维标架场引导与单调拓扑修正的特征保持孔洞修复方法。首先，对有效孔洞边界生成初始三角曲面，并利用非孔洞邻域约束的三维标架场提供方向先验；随后，将边界邻接面的法向沿面对偶图进行测地扩散，并吸附到局部标架轴，通过优先传播获得孔洞内部的分片预测法向。预测法向进一步诱导 Chart 划分及候选特征线。针对局部方向兼容但整体连接不合理的 Chart 边界，构造面向边界特征流的单调性判据，并结合局部路径搜索、虚拟执行和拓扑合法性检查修正回折或错误连接。最后，通过整体形状对齐、特征线细化和 Chart 内部松弛三个阶段恢复顶点位置。Thingi10K 数据集上的筛选实验中，151 个有效候选中有 142 个完成修复；其中 22 个仅含孔洞缺陷的模型均消除了自由边界并生成水密网格，可直接用于 TetGen 四面体化。与 MeshLab、CGAL 和 TetWild 的定性结果相比，本文方法在保持原非孔洞区域的同时能够恢复清晰的几何特征。

关键词：三角网格修复，孔洞修复，特征保持，三维标架场，拓扑正则化

0　引　　言

三角网格是计算机辅助设计、三维扫描、数字制造和数值仿真中的重要离散表示。受扫描遮挡、数据转换及几何内核差异等因素影响，网格中常出现孔洞、裂缝、自交和非流形等缺陷。孔洞会破坏模型的水密性与拓扑一致性，并影响四面体网格生成和工程仿真等后续处理[1]。对于自由曲面模型，孔洞通常可以通过局部插值和平滑获得视觉连续的补片；而机械 CAD 模型由分片光滑曲面、锐利特征线和角点组成，当缺失区域截断这些结构时，仅生成光滑曲面会导致特征模糊或错误连接。

现有基于表面方法通常通过边界三角化、局部细化和公平化完成孔洞闭合[2]，能够保持原模型非孔洞区域，但难以恢复跨越孔洞的锐利特征。基于体的方法具有较强的拓扑鲁棒性，却可能对模型进行全局重采样并削弱小尺度 CAD 结构。部分特征保持方法通过边界特征点匹配和曲线外推恢复缺失特征[3]，但在长距离缺失、多条特征同时进入孔洞或存在多个合理配对时容易产生歧义。三维标架场可以将邻域中的多方向信息传播至缺失区域[4]，然而局部法向与标架轴兼容并不意味着由其诱导的特征连接在整体上合理，Chart 边界仍可能出现回折、锯齿和异常汇合。

为此，本文将机械 CAD 网格孔洞修复分解为分片法向推断、Chart 拓扑正则化和几何重建三个相互衔接的阶段。方法不显式配对边界特征片段，而是首先推断孔洞内部的方向结构，再利用边界特征流约束修正不合理的 Chart 边界，最后在稳定特征骨架约束下恢复补片几何。

1　方法介绍

本文方法的总体流程如图 1 所示。对于检测并拆分得到的有效孔洞边界，首先采用耳切三角化、局部各向同性重网格和边界固定平滑构造初始补片。该补片仅作为后续计算域，并在其与非孔洞邻域上构造边界约束三维标架场，由可靠原始区域提供方向约束。

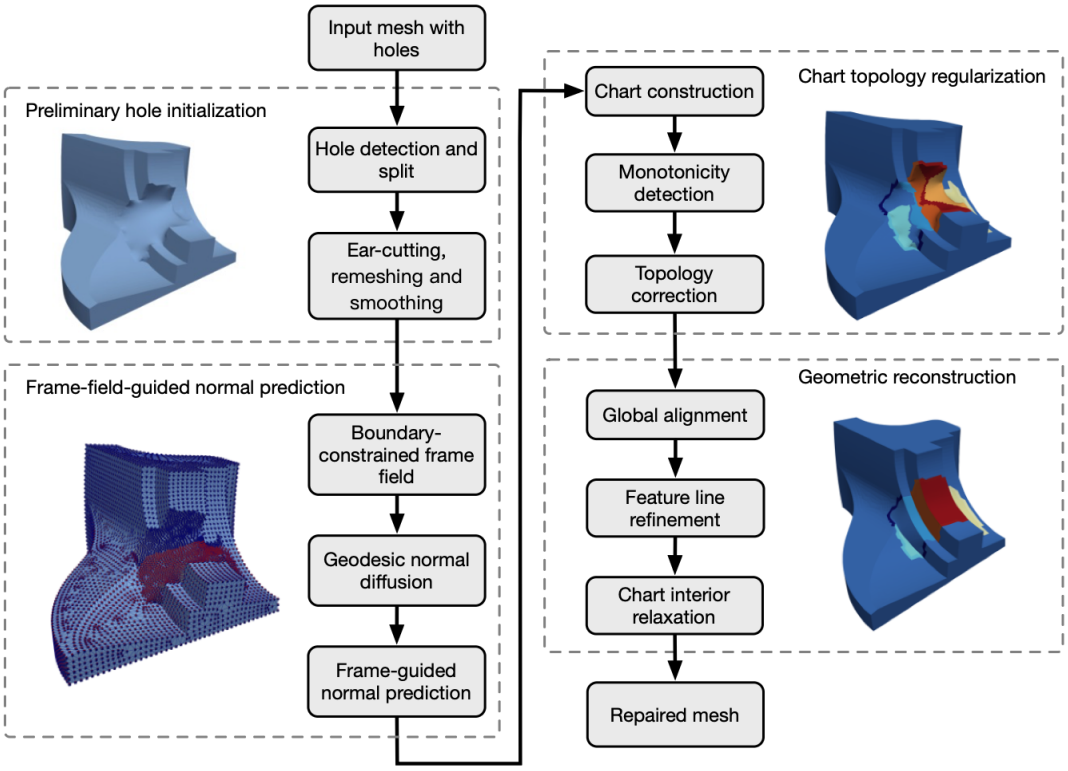


图 1　特征保持孔洞修复方法总体流程

1.1　标架场引导的法向推断

三维标架场定义在顶点上。由于标架轴具有排列和符号对称性，在将顶点标架插值到三角形面时，先以一个顶点标架为参考完成轴匹配与符号对齐，再对对应轴求平均并正交化，得到每个孔洞面的候选方向集合。为确定其中哪一条轴应作为曲面法向，本文在孔洞面及其边界邻接原始面上建立面对偶图，以面心距离作为边权，将原始面法向按照测地距离衰减扩散至孔洞内部，形成连续法向先验。连续先验能够描述周围曲面的整体趋势，但会平滑锐利转折，因此进一步将其吸附到局部标架轴。边界邻接孔洞面首先完成初始化，其余面按照候选法向与连续先验的一致性进行优先传播；传播过程中检查已赋值邻面的法向兼容性和局部连通性，以减少碎片化 Chart 和不稳定汇合。

1.2　面向边界特征流的 Chart 拓扑修正

预测法向相互兼容的相邻面被组织为 Chart，不同 Chart 之间的内部公共边构成候选特征线，并进一步追踪为有序 Segment。受离散化误差、标架场对称性和局部传播歧义影响，初始 Segment 可能局部合理但整体回折。本文参考单调 Chart 边界的思想[5]，使用孔洞边界上已有特征边的方向作为约束：当 Segment 两端均对应可靠特征锚点时，通过端点方向一致性和端点半空间关系判断其是否符合边界特征流。对于非单调 Segment，在相邻 Chart 区域的面对偶图上搜索局部修正路径，并在真实修改前进行虚拟执行。候选操作只有在不产生异常高阶汇合、不造成同标签局部断裂、不破坏孔洞边界连接且能够改善非单调结构时才被接受，再依据单调性收益、路径代价和边界拓扑距离进行排序和迭代更新。

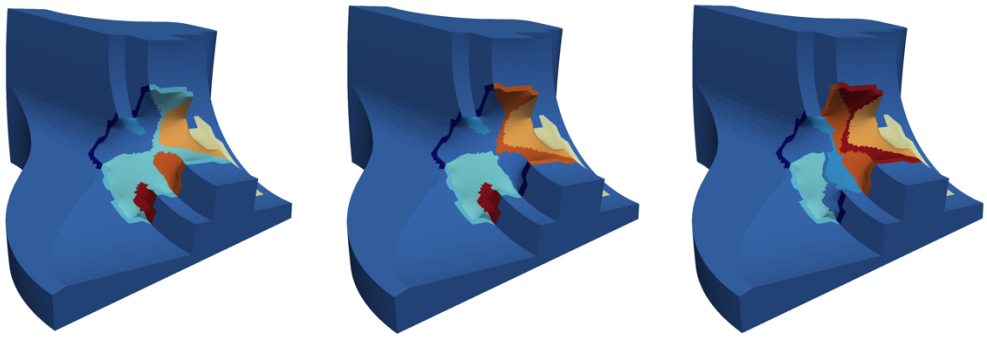


图 2　Chart 拓扑修正过程：（a）初始 Chart；（b）局部候选修正；（c）修正后的规则结构

1.3　分阶段几何重建

完成拓扑正则化后，补片顶点仍处于初始三角化位置。本文采用统一稀疏最小二乘框架恢复几何，但将优化划分为三个阶段。第一阶段固定原孔洞边界，利用预测法向正交约束、弱平面一致性和光滑约束恢复补片整体形状；第二阶段固定边界与内部角点，通过特征边两侧 Chart 法向的双侧正交约束细化特征线；第三阶段固定边界和特征骨架，仅松弛 Chart 内部顶点，以改善局部网格质量。这种变量分组能够降低整体曲面公平化与锐利特征保持之间的直接竞争。

2　实验结果

本文方法采用 C++实现，并在 4.05 GHz CPU 和 18 GB 内存的个人计算机上完成测试。首先对 Thingi10K 数据集中的 9956 个 STL 模型进行自由边界检测。在 420 个含自由边界的模型中，进一步排除孤立边、表面接触以及孔洞邻域严重非流形等情况，得到 151 个有效修复候选，其中 142 个完成了孔洞闭合和局部重建，总体统计见表 1。9 个失败案例主要由高度弯曲或强非平面的孔洞边界导致，初始三角补片无法保持稳定。

表 1　Thingi10K 数据集筛选与孔洞修复统计

统计项	数量	比例	说明
测试 STL 模型	9956	100%	Thingi10K 中的测试模型
检测到自由边界的模型	420	4.2%	自由边界检测后的候选模型
有效孔洞修复候选	151	36.0%*	排除孤立边、接触和严重非流形案例
完成修复的模型	142	94.0%**	完成孔洞闭合和局部几何重建
失败模型	9	6.0%**	初始补片不稳定

注：* 相对于检测到自由边界的模型；** 相对于有效孔洞修复候选。

在 142 个完成修复的模型中，22 个模型仅包含孔洞缺陷。修复后，这 22 个模型均不再含自由边界；其中 21 个可直接使用 TetGen 生成四面体网格，另 1 个模型经额外局部重网格后可完成四面体化。该结果表明，本文方法生成的补片不仅能够实现视觉闭合，也可在多数有效案例中满足后续体网格生成对表面闭合性的要求。与 MeshLab、CGAL 和 TetWild 的定性比较显示，传统局部方法倾向于生成平滑补片，体方法可能改变非孔洞区域，而本文方法能够在保持原始有效区域不变的条件下恢复较清晰的锐边和分片曲面。图 3 给出了 Fandisk 类 CAD 模型的修复过程与最终结果。

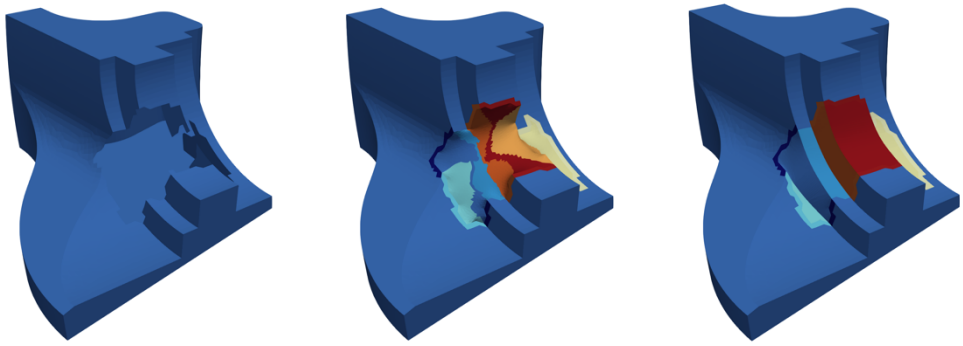


图 3　修复结果：（a）含孔洞输入；（b）拓扑正则化后的 Chart 结构；（c）最终补片

3　结　论

本文提出了一种面向机械 CAD 三角网格的特征保持孔洞修复方法。该方法利用三维标架场和测地法向扩散推断孔洞内部的分片方向，通过面向边界特征流的单调性判据与局部虚拟验证修正不合理的 Chart 边界，并采用分阶段稀疏优化恢复补片几何。现有实验表明，该方法能够处理多类有效孔洞，并在保持原非孔洞区域的同时恢复清晰的 CAD 特征。

该方法依赖有效且相对稳定的孔洞边界以及邻域中的可靠方向线索。对于强非平面边界、严重自交、非流形结构或弱特征自由曲面，初始补片和方向传播仍可能不稳定。后续将进一步提高复杂边界预处理的鲁棒性，并补充特征线误差、法向误差、消融分析和运行时间等定量评价。

参 考 文 献:

[1] ATTENE M, CAMPEN M, KOBBELT L. Polygon mesh repairing: An application perspective[J]. ACM Computing Surveys, 2013, 45(2): Article 15.

[2] LIEPA P. Filling holes in meshes[C]//Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing. 2003: 200-205.

[3] WANG X, LIU X, LU L, et al. Automatic hole-filling of CAD models with feature-preserving[J]. Computers & Graphics, 2012, 36(2): 101-110.

[4] RAY N, SOKOLOV D, LÉVY B. Practical 3D frame field generation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(6): Article 233.

[5] LIVESU M, VINING N, SHEFFER A, et al. PolyCut: Monotone graph-cuts for PolyCube base-complex construction[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): Article 171.

[6] SHEN S, ZHOU S, XIAO Z, et al. Adaptive gap closing for complex triangular mesh repair using geometric and topological characteristics[J]. Computer-Aided Design, 2026, 190: 103981.

[7] SI H. TetGen, a Delaunay-based quality tetrahedral mesh generator[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2015, 41(2): Article 11.

面向网格生成前处理的飞机 B-Rep 模型部件语义分割

王唯钧[1]，全卫泽[1]，陈彬[1]，韩芳[2]，刘杨[2]，严冬明[1]

（1 中国科学院自动化研究所，北京 100190

2 中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，绵阳 621000）

摘　要：飞机边界表示（B-Rep）模型中的部件语义可为飞机网格划分、边界条件配置与模型检查提供先验。针对复杂飞机模型面片数量多、部件边界易混淆的问题，构建了一套从 B-Rep 输入到面级六类标签输出的自动分割方法。该方法以表面点及法向构成几何表达，通过几何表征学习识别机头、机身、垂尾、平尾、主机翼和发动机，并将点级结果聚合至原始 B-Rep 面。在由 752 个飞机模型构成的数据集上，测试集点级分割的 mIoU、mAcc 和 allAcc 分别达到 96.67%、98.37%和 98.61%。多个独立 B-Rep 模型上的结果表明，该方法能够适应不同机翼、发动机和尾翼布局，为面向部件的网格生成前处理提供可靠语义信息。

关键词：边界表示，飞机模型，部件语义分割，点云，网格生成前处理

0 引　言

在计算流体力学（CFD）、CAE 仿真等工程应用中，网格生成通常以 B-Rep 模型作为输入。然而，飞机等复杂装备通常由机身、机翼、尾翼、发动机等多类功能部件组成，整机一体化网格划分面临几何复杂、尺度差异大和边界处理要求多样等挑战，仍高度依赖人工分区与参数配置。此外，不同部件在局部网格尺度、边界层加密策略以及边界条件设置方面具有显著差异，缺乏准确的部件语义信息将进一步增加前处理难度。

现有 B-Rep 模型通常仅包含几何与拓扑描述，缺少面向工程仿真的高层部件语义，使得网格生成过程中的区域划分、质量检查和参数配置仍需人工完成。近年来，面向 B-Rep 的深度学习方法和点云表征模型为 CAD 几何语义理解提供了新的技术途径[1-3]，但现有研究主要针对通用机械特征识别或自然场景点云理解，难以满足飞机结构部件级语义解析和网格前处理需求。

针对上述问题，本文面向飞行器非结构表面网格自动生成前处理任务，构建适用于航空结构的六类部件语义体系，建立融合 B-Rep 表面几何、拓扑关系与局部形态特征的智能识别方法，实现从 B-Rep 原始面片到功能部件语义标签的自动映射，为后续网格分区、参数自适应配置和自动化网格生成提供语义基础。

1 方 法 概 述

总体流程如图 1 所示。首先从 B-Rep 曲面采集带法向的几何点，并统一模型的尺度与空间方向；随后利用几何表征预训练和监督学习获得点级六类预测；最后结合点与原始曲面的对应关系及局部几何一致性，将预测聚合为每个 Face ID 对应的语义标签。该流程既保留了点云方法对复杂几何的适应性，也保持了 B-Rep 面级输出对后续 CAD/CAE 处理的可用性。

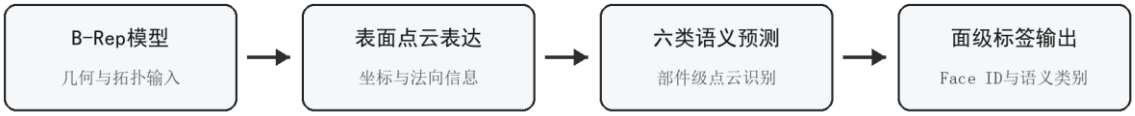


图 1　飞机 B-Rep 部件语义分割总体流程

实验数据由 603 个原生点云模型和 149 个 B-Rep 扩展模型组成，均经过统一的六类标注与质量检查。监督训练阶段全部使用 2048 点几何表达，并按 602 个训练样本和 150 个测试样本固定划分，以避免不同实验间的数据漂移。

2　实 验 结 果

表 1 给出了固定测试集上的点级分割结果。六类平均交并比达到 96.67%，总体点准确率达到 98.61%；其中垂尾与发动机因面积较小、局部结构差异较大而相对困难，但 IoU 仍分别达到 94.23%和 95.82%。这些结果说明本文提出的识别模型能够在类别尺度明显不均衡的情况下保持稳定识别。

表 1　固定测试集上的点级语义分割结果

整体指标	数值/%	部件类别	IoU/%
mIoU	96.67	机头	97.79
mAcc	98.37	机身	97.72
allAcc	98.61	垂尾	94.23
		平尾	97.05
		主机翼	97.45
		发动机	95.82

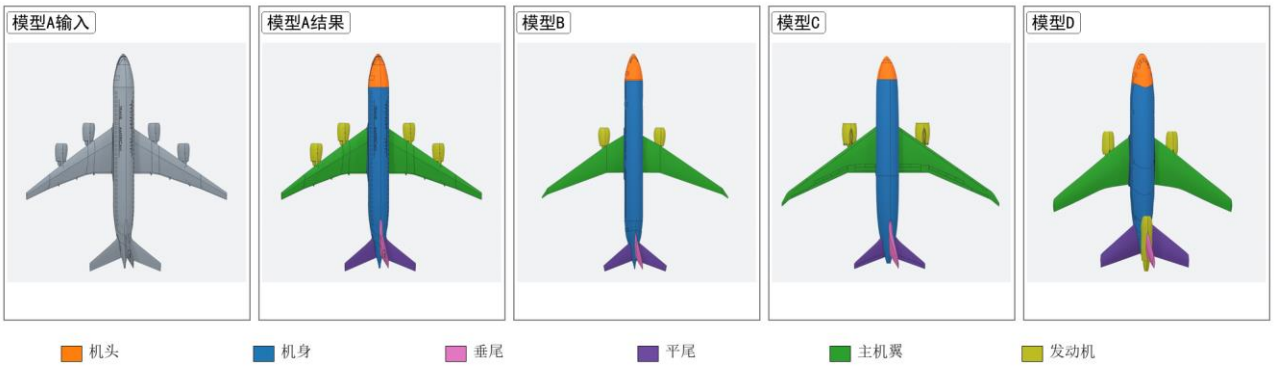


图 2　输入 B-Rep 与不同构型测试模型的面级部件分割结果

图 2 给出了输入模型、对应面级结果以及多个匿名化测试模型。7 个独立 B-Rep 模型的定性测试涵盖不同机翼外形、发动机数量和尾翼布局；结果在多数面片上保持连续，并能区分主机翼、平尾和垂尾等空间邻近部件。

3　结　　论

本文实现了面向飞机 B-Rep 模型的六类部件语义分割，并输出关联原始 Face ID 的面级标签。实验表明，该方法在固定测试集和多种外部模型上均获得稳定结果，可为按部件设置网格参数及边界条件提供语义基础。后续可以扩展起落架、挂架等细粒度类别，并研究与网格划分软件的自动联动。

参 考 文 献：

[1] LAMBOURNE J G, WILLIS K D D, JAYARAMAN P K, et al. BRepNet: A topological message passing system for solid models[C]//CVPR. 2021: 12773-12782.

[2] WU X, JIANG L, WANG P S, et al. Point Transformer V3: Simpler, faster, stronger[C]//CVPR. 2024: 4840-4851.

[3] WU X, DETONE D, FROST D, et al. Sonata: Self-supervised learning of reliable point representations[C]//CVPR. 2025: 22193-22204.

Robust Constrained Tetrahedralization with Steiner-point-free Boundaries

王毅夫，陈建军

（浙江大学航空航天学院，杭州 310058）

摘　要：提出了一种鲁棒的四面体网格生成算法，该算法能够严格保持有效非自交三角形网格的几何和拓扑连接关系。该任务的一个关键挑战在于 Steiner 点的放置控制。虽然优化 Steiner 点放置是 NP 困难的，但消除边界上的 Steiner 点对于保持边界拓扑和界面连接的完整性具有重要的实际意义。针对这一挑战，本文引入了翻转困难构型（FHCs）的概念，用于刻画局部情况下仅通过翻转操作无法恢复约束的情形。基于此观察，本文在经典边界恢复流程中增强了以下三项机制：基于 FHC 引导的内部 Steiner 点插入、鲁棒的边界 Steiner 点重定位，以及基于浮点算术的局部网格优化。这些机制减少了对边界 Steiner 点的依赖，并缓解了由有限精度舍入引起的数值失效问题。在 Thingi10K 数据集中的全部 5,468 个有效模型上对本文算法进行了评估。实验结果表明，本文实现成功地为所有模型生成了约束四面体剖分，所有生成的网格均包含无 Steiner 点的边界，同时保持了输入 PLC 的拓扑结构。

关键词：约束四面体剖分，数值鲁棒性，边界恢复，Steiner 点

0 引　言

约束四面体剖分（Constrained Tetrahedralization，CT）是指将分段线性复形（PLC）所围成的三维区域划分为四面体，同时严格保留所有输入几何约束（线段和面片）。CT 是计算模拟中的基础性技术，尤其在并行网格生成、多物理场耦合仿真等高性能计算场景中，需要精确的边界一致性，此时仅近似或宽松匹配输入边界的算法往往不够充分[1-3]。虽然二维约束 Delaunay 三角剖分可以保证对任何非退化输入都能成功[4]，但三维 PLC 可能无法仅用其原始顶点实现有效的约束四面体剖分，通常需要插入 Steiner 点，而 Steiner 点的放置会引入浮点舍入误差等数值挑战，导致几何谓词与拓扑假设之间的不匹配[7,8]。因此，如何在保证数值鲁棒性的前提下实现有效的约束四面体剖分，是 CT 领域长期面临的核心问题。

1 问题描述

本文的输入为一个非自交的分段线性复形（PLC）P = (V, E, F)，其中 V 为顶点集合，E 为线段（边）集合，F 为多边形面（面片）集合。输出为 P 所围成三维区域的一个约束四面体剖分 T，满足：E 中的每条线段是 T 中若干边的并集，F 中的每个面片是 T 中若干面的并集，且 T 的边界不包含 Steiner 点。

本文涉及以下核心概念：

（1）约束四面体剖分（CT）——将 PLC 所围区域划分为四面体，同时严格保留所有输入约束线段和面片；

（2）Steiner 点——为获得合法剖分而额外插入的顶点，本文的目标是消除边界上的 Steiner 点；

（3）翻转困难构型（FHCs）——刻画局部情况下仅通过翻转操作无法恢复约束的几何构型，分为级

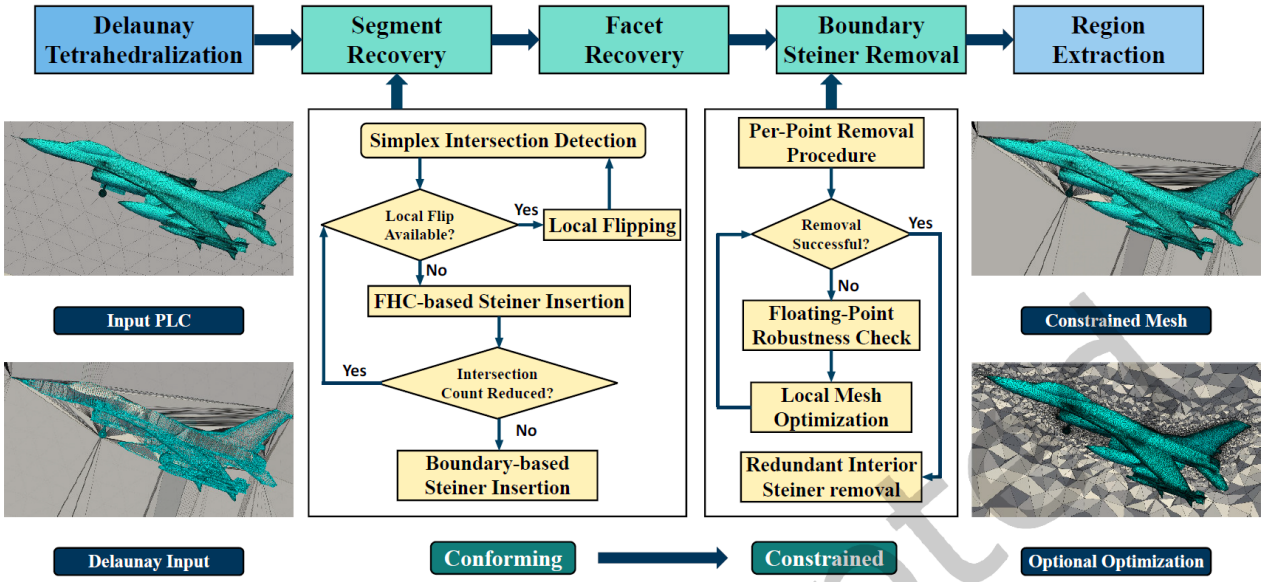


图 1 基于 FHC 方法的四面体化算法流程

联翻转困难（任何翻转都会引入新相交）和锁定翻转困难（翻转会违反已恢复的约束）两类。

本文算法遵循经典的 CT 流水线，如图 1 所示，包含三个阶段：（1）初始 Delaunay 四面体剖分——从输入顶点构建初始 Delaunay 四面体剖分；（2）边界恢复——通过线段恢复、面片恢复和边界 Steiner 点移除三个子阶段恢复输入边界。当局部翻转无法解决相交时，算法识别对应的 FHC 并引导内部 Steiner 点的插入，在大多数情况下仅通过 FHC 插入即可完成恢复，仅在必要时引入边界 Steiner 点作为后备方案；（3）后处理——识别内部和外部区域，移除外部四面体，生成最终的约束网格。针对有限精度算术下的数值失效问题，本文还提出了鲁棒的边界 Steiner 点重定位策略和基于体积的能量优化策略，确保算法在浮点运算下的可靠性。

2 结　论

本文提出了一种在浮点算术下完全运行的鲁棒约束四面体剖分算法。该方法的核心思想是识别翻转困难构型（FHCs），揭示何时无法仅通过局部翻转实现约束恢复，并据此指导 Steiner 点的插入。结合解决边界 Steiner 点处理中有限精度失效模式的策略，该方法在浮点算术下实现了可靠的约束四面体剖分。在 Thingi10K 数据集上的大量实验验证了所提方法的鲁棒性和效率。本文算法成功地对全部 5,468 个有效模型进行了四面体剖分，生成的约束网格具有无 Steiner 点的边界，每个模型平均仅插入 6.84 个内部 Steiner 点。与主流工具 TetGen 相比，本文方法在成功率（100% vs 96.07%）和 Steiner 点数量（平均 6.84 vs 53.5）方面均显著优于对比方法。与基于精确有理算术的 TetWild*相比，本文方法在保持高鲁棒性的同时，运行时间和内存消耗降低了数个数量级。据我们所知，本文方法是第一个在整个 Thingi10K 数据集上进行完整评估、并以显式目标实现无边界 Steiner 点恢复的完整约束四面体剖分流程。结果表明，对于有效的 PLC 输入，仅使用浮点算术即可实现鲁棒的约束四面体剖分，为需要严格边界一致性的应用提供了实用解决方案。

参考文献

[1] WINSLOW A M. Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 135(2): 128-138.

[2] GARIMELLA R V, SHEPHARD M S. Boundary Layer Mesh Generation for Viscous Flow Simulations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 49(1-2): 193-218.

[3] BERGHEAU J M, FORTUNIER R. Finite element simulation of heat transfer[M]. John Wiley & Sons, 2013.

[4] CHEW L P. Constrained Delaunay triangulations[C]//Proceedings of the Third Annual Symposium on Computational Geometry. 1987: 215-222.

[5] SCHÖNHARDT E. Über die zerlegung von dreieckspolyedern in tetraeder[J]. Math. Ann., 1928, 98(1): 309-312.

[6] CHAZELLE B. Convex partitions of polyhedra: a lower bound and worst-case optimal algorithm[J]. SIAM J. Comput., 1984, 13(3): 488-507.

[7] MURPHY M, MOUNT D M, GABLE C W. A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization[J]. International Journal of Computational Geometry & Applications, 2001, 11(06): 669-682.

[8] SHEWCHUK J R. Constrained Delaunay Tetrahedralizations and Provably Good Boundary Recovery[D]. 2002.

[9] SI H, GOERIGK N. Generalised flip-based constrained tetrahedralization[J]. 2018.

[10] CHEN J, ZHENG J, ZHENG Y, et al. Tetrahedral mesh improvement by shell transformation[J]. Engineering with Computers, 2017, 33: 393-414.

[11] DU Q, WANG D. Constrained boundary recovery for three dimensional Delaunay triangulations[J]. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 2004, 61(9): 1471-1500.

[12] GEORGE P L, BOROUCHAKI H, SAINTEL E. 'Ultimate'robustness in meshing an arbitrary polyhedron[J]. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 2003, 58(7): 1061-1089.

[13] SI H. TetGen, a Delaunay-based quality tetrahedral mesh generator[J]. ACM Trans. Math. Softw, 2015, 41(2): 11.

[14] DIAZZI L, PANOZZO D, VAXMAN A, et al. Constrained delaunay tetrahedrization: A robust and practical approach[J]. ACM Transactions on Graphics, 2023, 42(6): 1-15.

[15] SHEWCHUK J R. Adaptive precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates[J]. Discrete & Computational Geometry, 1997, 18: 305-363.

[16] FABRI A, PION S. CGAL: The Computational Geometry Algorithms Library[C]//Proceedings of the 17th ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information Systems. 2009: 538-539.

[17] RINEAU L, YVINEC M. A generic software design for Delaunay refinement meshing[J]. Computational Geometry, 2007, 38(1-2): 100-110.

动态虚拟单元方法求解薄壁几何

李佳，杨明智

（中南大学, 交通运输工程学院, 长沙 410075）

摘　要：针对笛卡尔网格虚拟单元法处理薄壁几何时因固体域厚度不足导致的多值点问题（即同一单元被不同壁面侧的流场模板重复引用，或流场单元被误用作虚拟单元），本文发展了一种动态虚拟单元方法。该方法不再将虚拟值预先存储于固定网格单元，而是依据目标单元与模板单元的空间相对位置进行实时判定：若模板单元为相对流场单元，则直接采用流场值；若为相对虚拟单元，则临时计算其虚拟值并存入额外生成的临时网格，实现“即求即用”的动态赋值策略。同时，通过网格类型辅助判定和壁法向一致性检查，快速识别相对虚拟单元并筛选正确壁面点，避免薄壁处壁面点误选。采用零厚度平板、钻石翼型及无粘 NACA0012 翼型等算例进行验证。结果表明：该方法能准确捕捉薄壁附近的流动分离、尾涡演化及激波位置，平板阻力系数和尾涡长度与文献吻合，钻石翼型斜激波角及分区马赫数误差分别小于 1%和 2%，NACA0012 翼型表面压力系数在尾缘处较传统方法更贴近参考解。本文方法无需复杂的邻居重构，避免了多值数据误用和非物理振荡，为笛卡尔网格框架下薄壁复杂外形的鲁棒高精度模拟提供了有效途径。

关键词：笛卡尔网格；虚拟单元法；薄壁几何；多值点；动态虚拟单元

0 引　言

随着航空航天等领域工程外形的日趋复杂，传统贴体网格生成高度依赖人工经验、耗时漫长，已成为制约 CFD 应用的重要瓶颈。笛卡尔网格方法因其高度自动化生成能力、对复杂几何的强大适应性，近年来受到广泛重视。由于笛卡尔网格的非贴体特性，边界条件处理是流场计算正确性的关键。虚拟单元法通过在壁面另一侧构造虚拟流实现物面上的非穿透条件，具有易于实现和计算效率高等优点，目前相关研究多集中于虚拟值的构造，对求解薄壁几何时出现的多值点问题涉及甚少。

在薄壁几何区域，由于固体域厚度不足，会出现两类多值点问题：一是不同壁面方向流场模板采用同一个虚拟点（虚拟型多值点）；二是差分模板穿过物面采用了另一个流场点的值（流场型多值点），导致使用错误单元值造成非物理振荡。本文发展了一种动态虚拟单元方法，通过动态识别模板单元与目标单元的相对位置关系，临时计算虚拟值，从而规避多值点问题。

1 问题描述

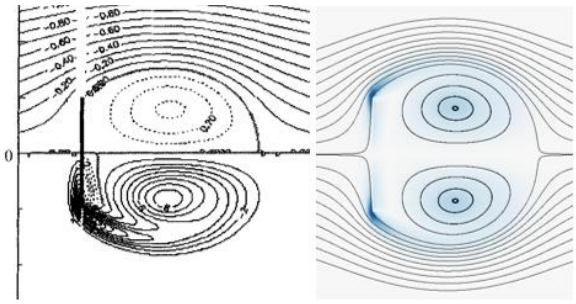
本文考虑二维可压缩 Navier-Stokes 方程，采用五点模板格式离散空间项，以适应 MUSCL 等高阶格式。在读入几何外型后，按位置及内外关系将网格划分为流体单元、固体单元、切割流体单元、切割固体单元。

动态虚拟单元方法的核心策略是：虚拟值不再预先储存于计算域网格中，而是根据目标单元与模板单元的相对位置关系实时判定与赋值。具体做法是生成额外的网格单元与模板单元一一对应，动态存储模板单元的流场信息。若模板单元为目标单元的流场单元，则直接将流场值赋值给额外单元；若为虚拟单元，则临时构造虚拟值再赋值。当目标单元推进至下一单元时，重新进行判定与赋值，直至全部流场单元完成计算。

在相对虚拟单元的快速判定方面，采用网格类型辅助判定：若目标单元为内部单元则直接判定为其虚拟单元；否则判断目标单元到虚拟单元之间是否存在外切单元，若存在则检查物面是否与两单元中心连线相交，若是则判定为相对虚拟单元。确定虚拟单元位置后，需查找最近壁面点构造虚拟值。针对薄壁处直接查找易选到壁面另一侧点的问题，增加壁法线一致性判断，确保候选点位于目标单元流场同侧。

2 算例验证

首先采用零厚度平板验证方法，平板高度 Hp=1，计算域 x∈[-5.12,5.12]，y∈[-5.12,5.12]，网格宽度 H=0.01Hp，Ma=0.046，Re=126。图 1 给出了 T=6 时涡量等值线与流线图，与参考文献[4]吻合良好；图 2 展示了尾涡长度随时间变化，结果与文献一致。同时开展了平板与网格成 45° 的工况，阻力系数时间历程与文献[6]吻合，证明方法对非对齐薄壁几何同样适用。



Koumoutsakos（1996）　　Present

图 1 无量纲时间 T=6 时流线图，涡量云图对比

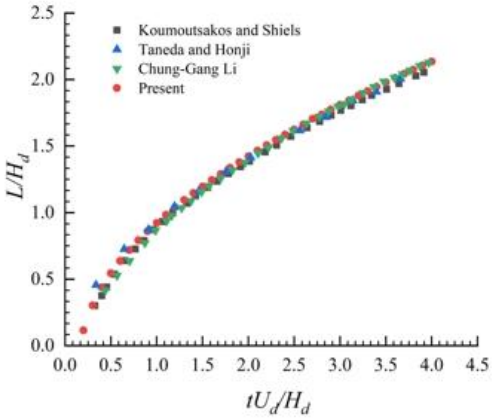


图 2 尾涡长度随时间变化对比

其次针对带有附着激波的钻石翼型（厚度比 0.05，Ma=2.0，攻角 3° ）开展验证。图 3 给出了马赫数云图对比，其中（a）为传统方法结果，（b）为本文发展方法结果，动态虚拟单元法激波生成位置与实际几何尖端一致，而传统方法激波位于几何内部。与无粘激波膨胀理论对比，斜激波角误差小于 1%，分区马赫数误差低于 2%。

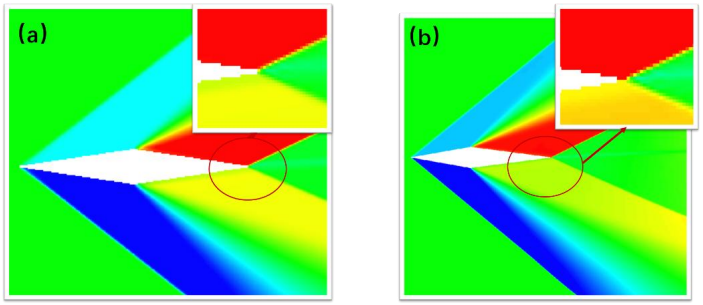


图 3 钻石翼型马赫图对比

最后针对无粘 NACA0012 翼型（Ma=0.5，攻角 3° ），采用曲率自适应加密。图 4 为压力云图对比，动态方法实现了后缘滞止点的正确匹配。图 5 为表面压力系数分布，动态方法在尾缘处与传统方法及结

构网格结果对比，吻合更好。

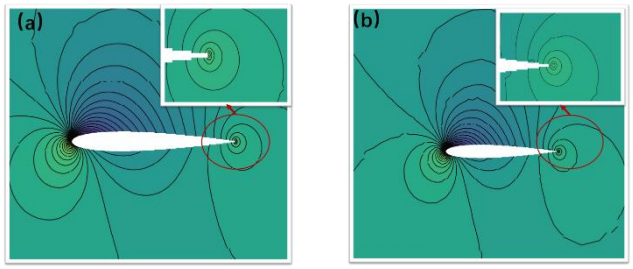


图 4 传统虚拟单元方法和动态虚拟单元方法的压力云图

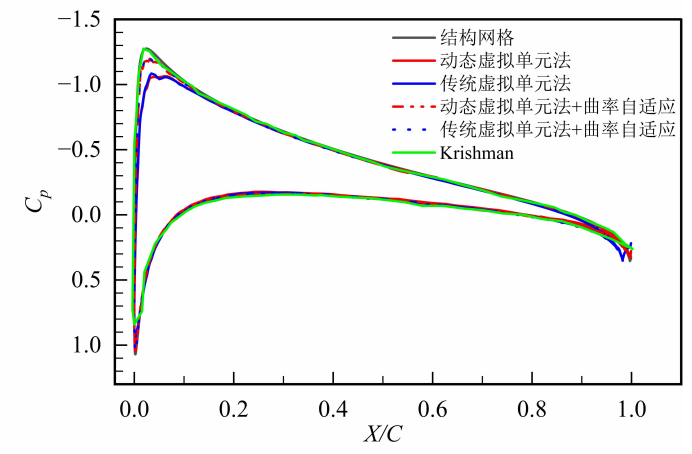


图 5 不同方法翼型表面压力系数分布

2 结　论

本文针对笛卡尔网格虚拟单元法处理薄壁几何的多值点问题，发展了动态虚拟单元方法。通过零厚度平板、钻石翼型及 NACA0012 翼型等算例验证表明：该方法在薄壁几何区域具有良好的鲁棒性，能准确捕捉薄壁附近流动分离、尾涡演化及激波位置；钻石翼型斜激波角误差小于 1%，分区马赫数误差低于 2%；NACA0012 翼型表面压力系数在尾缘处较传统方法更贴近参考解。该方法避免了多值点导致的数据误用和非物理振荡，无需复杂邻居重构过程，为笛卡尔网格框架下薄壁复杂外形的鲁棒高精度模拟提供了有效途径。

参 考 文 献:

[1] Slotnock J, Khodadoust A, Alonso J, et al. CFD vision 2030 study: A path to revolutionary computational aerosciences[R]. NASA/CR-2014-218178, Washington: NASA, 2014.

[2] Forrer H, Jeltsch R. A higher-order boundary treatment for Cartesian-grid methods[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 140(2): 259-277.

[3] 胡偶. 基于自适应笛卡尔网格的虚拟单元方法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.

[4] Koumoutsakos P, Shiels D. Simulations of the viscous flow normal to an impulsively started and uniformly accelerated flat plate[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 328: 177-227.

[5] Li C G, Bale R, Wang W H, et al. A sharp interface immersed boundary method for thin-walled geometries in viscous compressible flows[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2023, 253: 108401.

[6] Bale R, Patankar N A, Jansson N, et al. Stencil penalty approach based constraint immersed boundary method[J]. Computers & Fluids, 2020, 200: 104457.

[7] Tang Z G, Chen H, Bi L, et al. Numerical simulation of supersonic viscous flow based on adaptive Cartesian grid[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(5): 121697.

[8] Meinke M, Schneiders L, Günther C, et al. A cut-cell method for sharp moving boundaries in Cartesian grids[J]. Computers & Fluids, 2013, 85: 135-142.

[9] Peskin C S. Flow patterns around heart valves: A numerical method[J]. Journal of Computational Physics, 1972, 10(2): 252-271.

自适应网格加密与粗化准则参数对临界雷诺数钝体尾流大涡模拟预测的影响

乔凌宇，徐林程*

（西北工业大学航空学院，西安 710072)

摘　要：自适应网格加密（AMR）能够将计算资源集中于分离剪切层和近尾流等关键区域，但持续的网格加密、粗化及层级转换也会形成数值扰动。对于转捩敏感尾流，这类扰动可能改变剪切层不稳定性的发展，并进一步影响回流区和气动力预测。本文采用大涡模拟，研究加密判据阈值 （A） 和粗化阈值比 （C） 对临界雷诺数钝体尾流的扰动影响。以 Re=3700 球体为主要对象，通过静态网格建立分辨率敏感性基线，比较不同 A 和 C 条件下的表面压力、中心线速度、流向正应力、回流长度及平均阻力，并采用 Re=3900 圆柱考察相关参数效应。结果表明，A 和 C 分别改变网格加密与粗化的触发条件，进而形成不同的网格层级分布和参数相关数值扰动环境。对于球体，降低 A 和 C 总体上使速度恢复和脉动发展向下游移动，回流区延长，平均阻力减小；圆柱尾流统计量和平均阻力同样表现出明显的参数敏感性，但具体响应受到几何分离特征和参数范围的影响。研究表明，A 和 C 不仅控制网格数量及层级分布，还会通过参数相关的 AMR 数值扰动环境影响尾流统计特征和气动力预测。

关键词：自适应网格加密；大涡模拟；数值扰动；钝体尾流

0 引　　言

大涡模拟能够解析钝体尾流中的主要非定常结构，但其预测结果对网格分辨率、数值耗散和可解析尺度较为敏感[1,2]。自适应网格加密（AMR）可依据局部流动特征动态配置网格资源，已被应用于涡主导流动和复杂湍流计算[3–5]。然而，加密判据阈值和粗化阈值比不仅影响网格数量及层级分布，还会通过持续的加密、粗化和层级转换形成不同的数值扰动环境。对于转捩敏感的球体和圆柱尾流，这种影响可能进一步反映在速度恢复、脉动分布、回流长度和阻力中。本文比较两类 AMR 参数对球体和圆柱尾流统计量的影响，分析参数相关数值扰动与尾流响应之间的联系，并考察这种参数敏感性在两种典型钝体尾流中的表现。

1 问题描述

自适应网格加密根据局部流动特征对计算网格进行动态调整。其中，加密判据阈值 A 控制网格加密的触发条件，粗化阈值比 C 控制已加密网格恢复至较粗层级的条件。减小 A 会提高局部加密的敏感程度，而减小 C 会抑制网格粗化。因而，即使不同工况采用相同的最小网格尺度，改变 A 或 C 仍会形成不同的网格层级分布和动态演化过程。

与静态网格相比，AMR 计算中的网格层级和粗细网格界面会随流场不断变化，流场变量也需要在不同层级之间进行传递。这些过程可能形成与准则参数相关的数值扰动。对于球体和圆柱的转捩敏感尾流，扰动环境的变化可能影响分离剪切层中脉动的发展以及平均速度恢复过程，并进一步改变回流长度

和整体阻力。因此，仅根据最小网格尺度或网格数量，难以判断 AMR 参数设置是否合理。

为考察上述问题，本文选取 Re=3700 球体和 Re=3900 圆柱两种典型钝体尾流。球体首先采用四组静态网格建立分辨率敏感性参照，随后分别改变 A 和 C；圆柱采用相应的 Adaptive 和 Coarse 系列，考察参数敏感性是否同样存在于另一种典型钝体尾流。各组工况如表 1 所示。

表 1　计算工况及参数设置

几何	工况系列	变化参数	固定参数	研究用途
球体	静态网格	Δ x/D = 0.064, 0.032, 0.016, 0.008	关闭 AMR	分辨率敏感性参照
球体	Adaptive	A = 1.0, 2.0, 3.0	C = 0.20; Power = 2	加密阈值影响
球体	Coarse	C = 0.25, 0.50, 0.75	A = 2.0; Power = 2	粗化阈值比影响
圆柱	Adaptive	A = 1.0, 2.0, 3.0	C = 0.20; Power = 2	跨几何敏感性比较
圆柱	Coarse	C = 0.125, 0.1875, 0.25	A = 2.0; Power = 2	跨几何敏感性比较

图 1 给出球体部分 AMR 参数下的代表性网格分布。由图可见，各工况的近壁最小网格尺度保持一致，分离剪切层和近尾流中的网格覆盖范围存在明显差异，说明 A 和 C 不仅改变网格数量，还会改变不同层级网格在关键流动区域中的空间配置。

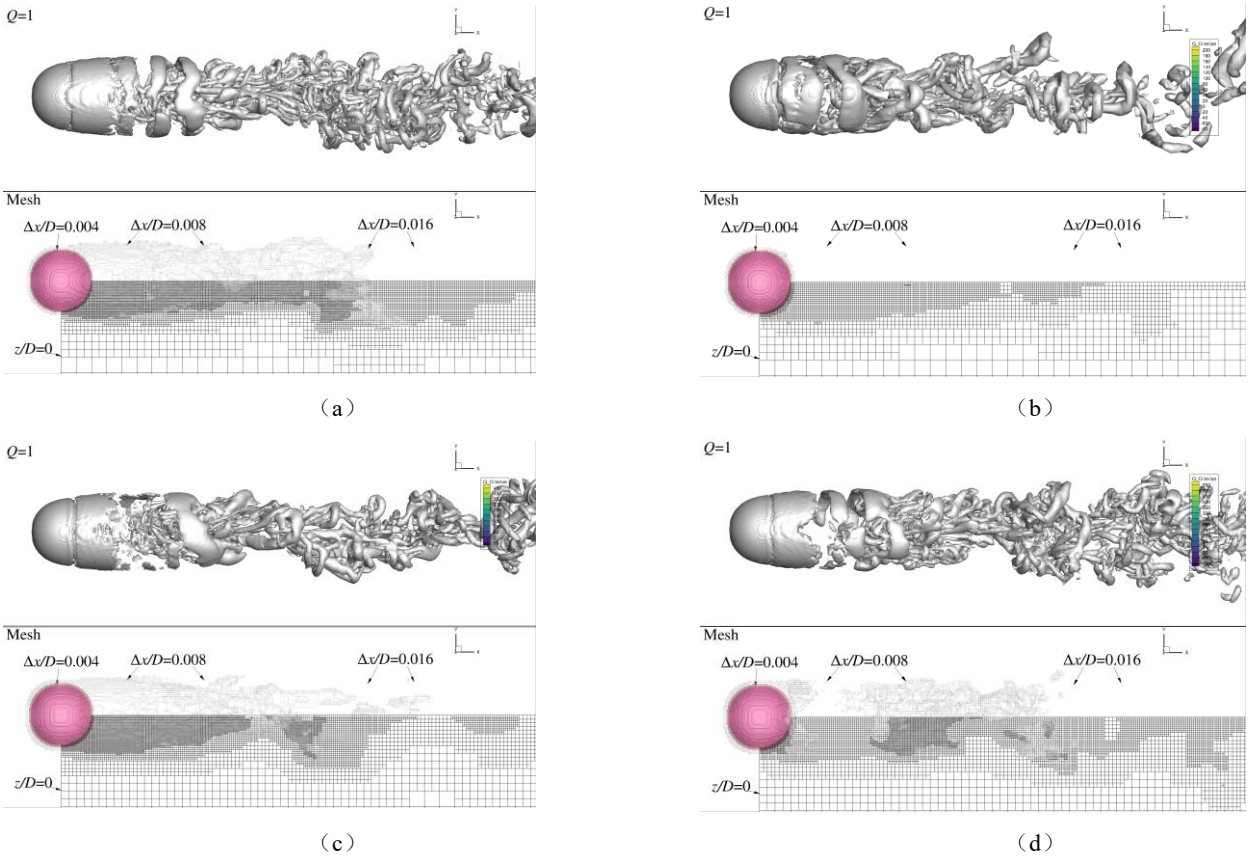


图 1　AMR 准则参数对球体瞬时涡结构和网格分布的影响：（a）A = 1.0；（b）A = 2.0（C = 0.20，Power = 2）；（c）C = 0.25；（d）C = 0.50）。涡结构采用 Q = 1 等值面显示，网格分布位于 z/D = 0 截面。

通过上述工况可以重点考察以下问题： 1）改变 A 和 C 后，参数相关的网格分布与数值扰动是否会引起速度恢复、流向正应力、回流长度和平均阻力的变化；2）这种参数敏感性是否同时存在于球体和圆柱两种典型钝体尾流中。本文分别利用表面压力、中心线平均流向速度、流向雷诺正应力、回流长度和平均阻力对上述问题进行分析。

2 结　论

本文采用大涡模拟研究了加密判据阈值 A 和粗化阈值比 C 对球体及圆柱尾流预测的影响。结果表明，改变 A 和 C 在调整网格层级分布及动态适配过程产生的数值扰动作用，会明显改变速度恢复、流向雷诺正应力、回流长度和平均阻力。两种几何均表现出明显的参数敏感性，但具体响应受到几何特征和参数范围的影响。因此，AMR 准则参数不仅控制网格分配，也是影响转捩敏感尾流 LES 预测的重要数值因素。

参 考 文 献:

[1] POPE S B. Ten questions concerning the large-eddy simulation of turbulent flows[J]. New Journal of Physics, 2004, 6: 35.
[2] GHOSAL S. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 125(1): 187-206.
[3] LÉONARD S, TERRACOL M, SAGAUT P. A wavelet-based adaptive mesh refinement criterion for large-eddy simulation[J]. Journal of Turbulence, 2006, 7: N64.
[4] KAMKAR S, WISSINK A, SANKARAN V, et al. Feature-driven Cartesian adaptive mesh refinement for vortex-dominated flows[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(16): 6271-6298.
[5] GOU J, SU X, YUAN X. Adaptive mesh refinement method-based large eddy simulation for the flow over circular cylinder at ReD=3900[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2018, 32(1): 1-18.

笛卡尔网格并行生成加速与高雷诺数湍流模拟研究

陈航，田琳琳，赵宁*

（南京航空航天大学，南京 210016）

摘　要：笛卡尔网格自动生成与高雷诺数流动模拟是制约 CFD 工程自动化的核心瓶颈。本文在自适应笛卡尔网格框架下提出两项关键技术：其一，针对并行生成中各进程因 k-d 树查询迭代次数悬殊导致的计算负载不均衡问题，提出动态分区权重策略，通过将迭代次数量化为分区权重并实施前瞻性动态重分区，实现计算负载的全局均衡；其二，针对浸没边界法在解析高雷诺数薄边界层时面临的网格量爆炸问题，发展浸没边界法与 S-A 壁面函数耦合方法，利用参考点重构近壁物面条件，以稀疏网格实现边界层流动的准确模化。数值实验表明，动态分区权重策略在 64 核千万网格规模下生成时间降低 50%以上，千核 13.7 亿网格并行效率达 73.96%；浸没边界与壁面函数耦合方法对 RAE2822 翼型和 DLR-F6 整机跨音速绕流的预测结果与实验及贴体网格数据高度吻合，验证了方法的可靠性与工程适用性。

关键词：笛卡尔网格，并行生成，负载均衡，浸没边界法，壁面函数

0 引　言

网格生成和自适应被我国《计算流体力学 2035 愿景》及美国 NASA《CFD 2030 愿景》共同列为 CFD 领域的关键瓶颈[1]。笛卡尔网格因与几何外形完全解耦，具备自动化程度高、质量优、正交性好等显著优势，被广泛视为突破网格生成人力成本桎梏的理想途径。然而，该技术在实际工程推广中面临双重阻碍：其一，并行生成框架下，不同空间位置的网格单元因几何信息查询在 k-d 树[2]中的迭代次数差异可达数十倍，传统静态分区策略仅能平衡单元数量而无法均衡实际计算负载，严重制约并行可扩展性；其二，采用浸没边界法[3]处理高雷诺数流动时，极薄的边界层需要极端加密网格方可解析，由此产生“网格灾难”。上述问题相互耦合，共同制约笛卡尔网格在工程高雷诺数 CFD 中的应用。为此，本文在自适应笛卡尔网格统一框架下，从并行生成加速和边界层模化两个维度出发，分别提出动态分区权重策略（Dynamic Partition Weight，DPW）和浸没边界-壁面函数耦合方法（Immersed Boundary Method – Wall Fuction，IBM-WF），旨在实现从网格生成到高雷诺数流动模拟的全流程自动化。

1　笛卡尔网格并行生成的负载均衡方法

笛卡尔网格生成过程中，网格单元与几何表面单元之间的搜索效率直接决定整体生成速度。k-d 树通过二分空间划分将搜索时间复杂度由 $O(N_{空间}\times M_{表面})$ 降至 $O(N_{空间}\times \log_2 M_{表面})$，已成为该领域的标准数据存储方法。然而实际并行计算中发现，各进程的 k-d 树查找时间差异可达数十倍。其根本原因在于：不同位置的网格单元所关联的几何信息不同，导致在 k-d 树中的递归迭代次数存在显著差异，而迭代次数的差异直接反映为计算量的差异。NoPW 策略虽能基于空间填充曲线在网格数量层面实现负载平衡，却无法消除计算量的不均衡，导致轻载进程过早空闲、重载进程持续运行，整体并行效率严重受损。图 1 给出了一个二维示意，其中数字表示各单元查询 k-d 树的查找深度，不同颜色代表不同进程划分，可见即便单元数量分配均匀，各进程的迭代总次数仍严重失衡。

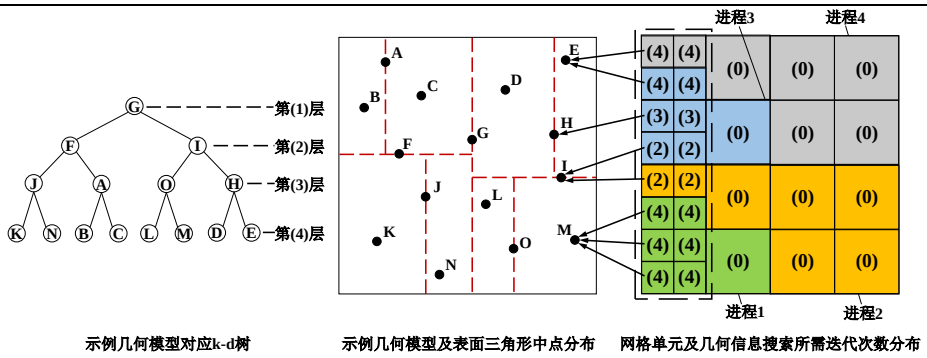


图 1 基于几何模型与 k-d 树的网格单元几何信息搜索所需迭代次数分布（数字表示查询 k-d 树对应单元的查找深度，不同颜色表示不同进程）

针对上述问题，本文提出 DPW 策略。该策略的核心在于：将 k-d 树迭代次数作为计算负载的直接度量，并为每一网格单元赋予分区权重 $P=1+\psi\times N$，其中 N 为该单元在 k-d 树中的迭代次数，比例系数 ψ 取 1000 以确保需几何搜索的单元与无需搜索单元之间的权重具有足够区分度。此外，利用网格加密过程中父子单元几何邻近、搜索路径相似的特点，建立负载继承机制：加密产生的子单元直接继承父单元的迭代次数，而未经变化的单元则继承值为零。该机制使得算法能够在实际执行几何搜索之前，预先获得全计算域新单元负载分布的估计值。基于此预测信息，DPW 策略仅在壁面距离计算等最耗时的几何检索步骤之前执行考虑权重的重分区操作，其目标是将高计算负载单元均匀分散至所有进程中，从而以极小的额外通信开销换取计算负载的全局均衡。

为验证 DPW 策略的有效性，本文选取不同几何外形在自适应笛卡尔网格框架下进行数值实验。在 64 核、千万网格量级的测试中，针对球、马、兔子及 CRM 四种外形，如表 1 所示，DPW 相比传统静态分区策略（NoPW）将网格生成时间分别降低 59.87%、84.72%、94.02%和 61.62%。以兔子模型为例，由于表面几何细节丰富，k-d 树查询深度分布极不均匀，DPW 的加速效果尤为显著。

表 1 自适应笛卡尔网格并行生成耗时情况

模型	表面三角单元数量	网格数量（万）	CPU 时间		
			NoPW（s）	DPW（s）	降低率（%）
球	3 918	6782	52.33	21.00	59.87
马	86 262	9620	435.16	66.48	84.72
兔子	200 000	8301	610.74	36.50	94.02
CRM	341 810	8932	201.23	77.23	61.62

此外，如图 2 所示，在不同计算规模（128～1024 核）下，针对 CRM 模型生成 13.7 亿自适应笛卡尔网格的测试结果表明，DPW 策略始终维持较高的并行效率，1024 核时并行效率达 73.96%。进程中壁面距离计算的最大耗时差由 128 核时的 50.23 秒压缩至 1024 核时的 7.52 秒，性能明显优于法国 ONERA FastS 在 800 核时差异达 100 余秒的结果[4]。

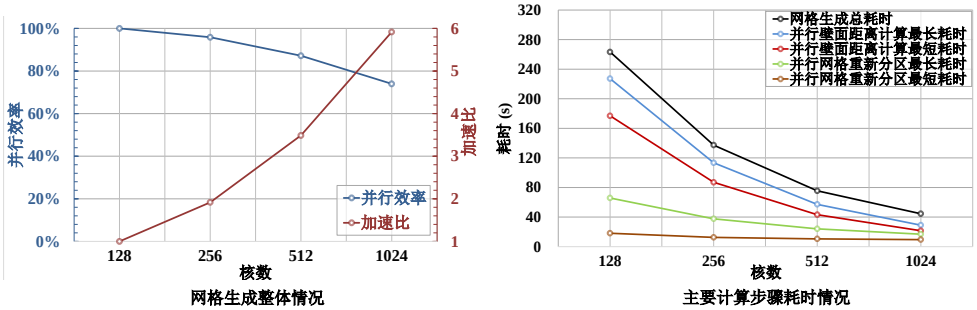


图 2 不同计算规模下使用 DPW 策略的网格生成性能

2 高雷诺数可压缩流动浸没边界-壁面函数耦合方法

浸没边界法通过在笛卡尔网格上施加物面边界条件来模拟复杂几何绕流，可规避贴体网格生成，但在高雷诺数条件下，极薄的湍流边界层要求网格尺度足够小，导致计算量随雷诺数急剧增长。壁面函数通过对近壁区域速度型进行模化，允许以较粗的网格获得工程可接受的边界层预测结果。本文采用基于 S-A 湍流模型[5]的 Allmaras 修正壁面函数[6]，该函数在标准对数律基础上引入分子粘性修正，其无量纲速度梯度满足：

$$\frac{du^+}{dy^+}=\frac{c_{v1}^3+(\kappa y^+)^3}{c_{v1}^3+(\kappa y^+)^3+(\kappa y^+)^4}, \tag{1}$$

其中$\kappa=0.41$。积分可得：

$$\begin{aligned}u^+=f_{SA}(y^+)=\tilde{B}+c_1 log((y^++a_1)^2+b_1^2)-c_2 log((y^++a_2)^2+b_2^2)\\ -c_3 Arctan[y^++a_1,b_1]-c_4 Arctan[y^++a_2,b_2],\end{aligned} \tag{2}$$

其中常数项$\tilde{B}=5.033\,390\,879$，$a_1=8.148\,221\,580$，$a_2=-6.928\,709\,385$，$b_1=7.460\,087\,608$，$b_2=7.468\,145\,790$，$c_1=2.549\,677\,354$，$c_2=1.330\,165\,159$，$c_3=3.599\,459\,109$，$c_4=3.639\,753\,187$。该壁面函数综合考虑了分子粘性和涡粘性的共同作用，在边界层内的模拟效果优于纯对数律形式。

此外，对近壁面相交单元的处理是 IBM-WF 方法的关键。如图 3 所示，从相交单元中心点 A 沿物面法线方向向流场内部引出固定距离，得到流场中的参考点 B，A 点与 B 点处的流场变量满足壁面函数关系。具体实施时，以 B 点处流场变量为已知量代入壁面函数，通过 Newton 迭代求解壁面摩擦速度u_τ，再结合 A 点处的壁面距离，即可重构该单元的流场变量。该处理避免了在物面附近生成极密网格，有效缓解了浸没边界法的“网格灾难”。

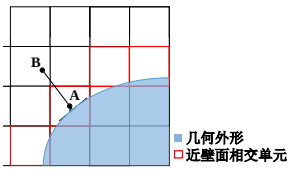
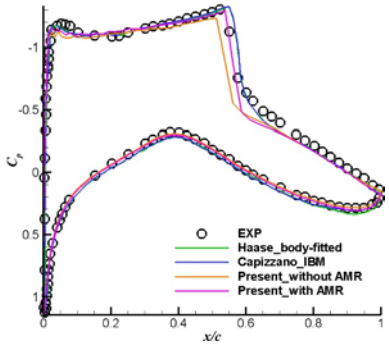


图 3 近壁面相交单元 A 与其对应参考点 B

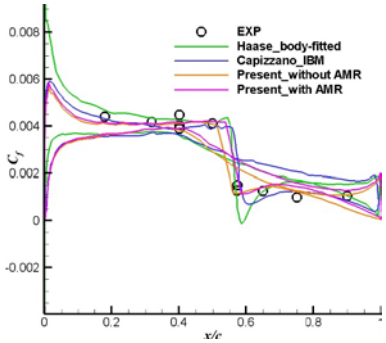
为评估 IBM-WF 方法在真实高雷诺数可压缩流动中的仿真计算能力，本文选取二维翼型和三维整机两类典型跨音速绕流问题，将计算结果分别与实验数据及传统贴体网格模拟结果进行定量对比。

（1）RAE2822 翼型跨音速粘性绕流

该算例来流条件为马赫数 0.734、攻角 2.79°、基于弦长的雷诺数 6.20×10^6。如图 4 所示，通过提取计算结果中的压力系数和表面摩擦系数，并与参考结果[7-8]进行对比，验证了该方法在自适应笛卡尔网格中能够有效模拟高雷诺数可压缩粘性流动问题。



（a）RAE2822 压力系数



（b）RAE2822 表面摩擦系数

图 4 RAE2822 计算结果

（2）DLR-F6 翼身组合体跨音速绕流

该算例来流马赫数 0.75、攻角 0.49°、雷诺数 3.0×10^6。如图 5 所示，通过提取位于机翼上 6 个典型截面的压力系数计算结果，并与参考结果[9-11]进行对比，说明该方法在激波位置及前缘峰值的预测上总体效果十分可靠，验证了其运用于三维复杂外形流动问题的可靠性和准确性。

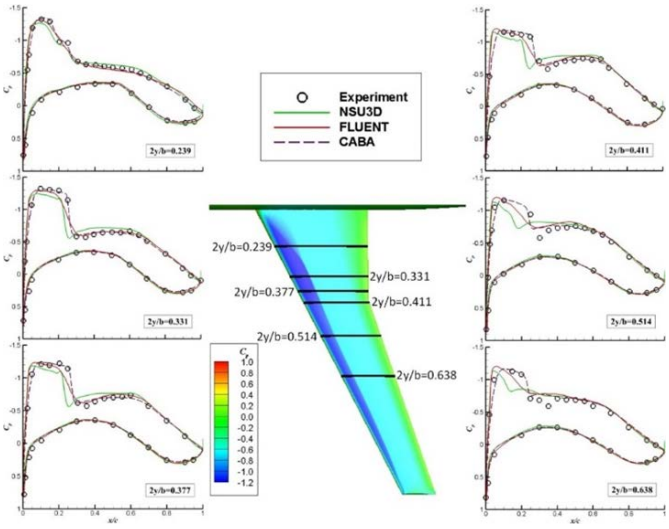


图 5 DLR-F6 模型跨音速流动计算结果

3 结　论

本文在自适应笛卡尔网格框架下，针对并行生成负载不均衡和高雷诺数边界层两大瓶颈，分别提出了 DPW 策略和 IBM-WF 耦合方法。DPW 通过将 k-d 树迭代次数作为计算负载的定量度量，并实施预测性动态重分区，有效解决了传统静态分区策略无法均衡计算负载的缺陷，在千核计算规模下展现出优异的并行可扩展性。IBM-WF 方法基于 S-A 壁面函数重构近壁物面条件，使浸没边界法在稀疏网格下获得高雷诺数可压缩流动的准确模拟，显著降低了对网格规模的需求。两者协同作用使笛卡尔网格从自动生成到流场计算形成完整闭环，并通过典型跨音速算例得到验证。后续工作将引入间断伽辽金等高阶格式，进一步拓展至复杂构型非定常流动模拟。

参 考 文 献:

[1] Slotnick J P, Khodadoust A, Alonso J J, et al. CFD vision 2030 study: A path to revolutionary computational aerosciences[R]. Washington, D.C.: NASA, 2014. (NASA/CR-2014-218178)

[2] Bentley J L. Multidimensional binary search trees used for associative searching[J]. Communications of the ACM, 1975, 18(9): 509-517.

[3] Mohd-Yusof J. Combined immersed boundaries/B-splines methods for simulations in complex geometries[C]//Annual Research Briefs. Stanford: Center for Turbulence Research, 1997: 317-327.

[4] Péron S, Benoit C, Renaud T, et al. An immersed boundary method on Cartesian adaptive grids for the simulation of compressible flows around arbitrary geometries[J]. Engineering with Computers, 2021, 37(3): 2419-2437.

[5] Spalart P R, Allmaras S R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows[C]//30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reston: AIAA, 1992. (AIAA Paper 1992-0439)

[6] Allmaras S R, Johnson F T, Spalart P R. Modifications and clarifications for the implementation of the Spalart-Allmaras turbulence model[C]//7th International Conference on Computational Fluid Dynamics, 2012. (ICCFD7-1902)

[7] Haase W, Brandsma F, Elsholz E, et al. EUROVAL: A European initiative on validation of CFD codes[C]//Notes on Numerical Fluid

Mechanics. 1993, 42: 127-184.

[8] Capizzano F. Turbulent wall model for immersed boundary methods[J]. AIAA Journal, 2011, 49(11): 2367-2381.

[9] Laflin K R, Klausmeyer S M, Zickuhr T, et al. Data summary from second AIAA Computational Fluid Dynamics Drag Prediction Workshop[J]. Journal of Aircraft, 2005, 42(5): 1165-1178.

[10] Lee-Rausch E M, Frink N T, Mavriplis D J, et al. Transonic drag prediction on a DLR-F6 transport configuration using unstructured grid solvers[J]. Computers & Fluids, 2009, 38(3): 511-532.

[11] Mavriplis D J. Third drag prediction workshop results using the NSU3D unstructured mesh solver[J]. Journal of Aircraft, 2008, 45(3): 750-761.

蝗虫翅翼几何重构、参数化与网格生成的一体化框架

方立，俞建阳*，陈浮，姜紫琦，宋彦萍

（哈尔滨工业大学能源科学与工程学院，哈尔滨 150000）

摘　要：昆虫翅翼在扑动过程中表现出显著的弦向弯曲、展向扭转及前后翅协同变形，这些几何变化直接控制局部有效迎角、翼面载荷分布、前缘涡演化以及前后翅之间的非定常气动干扰。然而，实验测量通常只能提供有限翼展位置和离散扑动相位上的截面数据，难以直接转化为具有时间周期性、空间连续性和拓扑一致性的计算几何。扫描噪声、局部褶皱、翅脉诱导起伏及截面之间的不规则对应关系，还容易在曲面重构和网格变形过程中引入非物理振荡、局部拉伸和网格拓扑变化。为连接生物形态测量与高保真非定常流动计算，本文提出一种面向蝗虫前、后翅的几何重构、低维参数化和分析就绪网格生成一体化框架。该框架以沙漠蝗虫前、后翅的三维数字化翼面及时间分辨截面测量数据为生物约束。首先，在保留原始翼面平面外形、展长、弦长分布及前后翅相对布局的条件下，将三维翼面映射至平面参考构型，从而将刚体扑动运动与弹性翼面变形相分离。真实翅翼的主导变形进一步分解为弦向弯度和展向扭转两个低维模态。对于任意展向截面，采用由最大弯度比及其弦向位置控制的平均弯度线描述弦向变形，并利用局部入射角及其相对翼根的变化表征展向扭转。该表示在显著降低几何自由度的同时，保留了对局部有效迎角和压力载荷最为关键的大尺度形态特征。为避免直接弯曲参考截面造成非物理弦向伸长，本文对几何映射施加局部弧长守恒约束。对于给定弯度参数，变形后的投影弦长通过求解非线性弧长方程确定；随后，根据材料点至前缘的累计弧长建立参考截面与弯曲截面之间的一一对应关系。完成弦向弯曲后，以前缘主承载结构为局部旋转轴施加展向扭转，得到弯度—扭转耦合的三维翼面构型。该映射既保持局部弦向长度，也使弯曲和扭转具有清晰且彼此独立的几何含义，为后续变形模态消融和参数敏感性分析提供了统一基础。针对实验数据在时间和空间上的离散性，本文构造了连续的时空参数场。各控制截面的弯度、最大弯度位置及局部入射角由实验截面提取，并采用周期傅里叶展开重构其在完整扑动周期内的变化，从而保证相邻周期之间几何状态及其时间演化的连续性。在展向方向上，采用保形分段三次 Hermite 插值重构各参数的连续分布。与常规高阶样条相比，该方法能够保持离散测量数据的局部变化趋势，并抑制有限控制截面导致的非物理过冲。因此，任意扑动相位和任意展向位置的翼型截面均可由同一组低维参数唯一确定，形成时间周期、展向连续且可重复生成的动态翼面。在网格层面，本文在平面参考翼面上建立统一的节点索引和表面拓扑，并通过弧长守恒的弯曲映射和以前缘为轴的扭转变换，将参考节点传递至各瞬时构型。不同扑动相位和不同参数组合共享相同的节点连接关系、边界标识及展弦向节点对应关系，从而避免对每个瞬时几何重复进行表面重构和重新网格划分。该拓扑保持策略可直接为任意拉格朗日—欧拉方法、动态网格方法或其他非定常流动求解器提供时间一致的运动边界，并有利于控制网格变化所产生的数值误差。通过分别缩放前翅弯度、前翅扭转、后翅弯度和后翅扭转，可进一步生成围绕真实生物构型的连续设计空间，而不改变基础网格拓扑，为高通量计算、代理建模及全局敏感性分析提供几何一致的样本集合。与实验测得的典型翼展截面进行比较表明，该低维模型能够较好地重现前、后翅在多数扑动相位下的整体弯度和扭转趋势，尤其对外翼段的主导几何特征具有较高的一致性。较明显的局部偏差主要出现在靠近翼根的内翼段以及强变形相位，并集中表现为翅脉附近的局部折曲、褶皱和高阶起伏。这说明弯度—扭转分解能够捕捉控制整体气动载荷的低阶变形模态，但不旨在复现由翅脉—翼膜耦合产生的全部细观拓扑。该误差结构同时给出了模型的适用边界，并为未来引入翅脉约束或局部高阶形态基函数提供了依据。所提出框架建立了从离散生物测量、连续几何重构、低维变形参数化到拓扑一致网格生成的可重复计算链条，使真实蝗虫翼构型、人工消融构型和参数化设计构型能够在统一数值条件下进行比较。其核心意义在于将几何表示误差、网格变化误差与真实变形所引起的流动物理效应区分开来，从而为研究弯度和扭转对前缘涡稳定性、尾迹捕获、前后翅涡干扰及周期平均气动力的独立贡献和耦合作用提供可靠基础。该方法也可推广至其他具有大幅周期运动和柔性变形的昆虫翼、鸟翼及仿生微型飞行器。

关键词：几何重构；弯度—扭转耦合；时空参数化；弧长守恒；动态网格。

附录:构建弯度-扭转翼型翼型

本文以平板翼作为刚性基准翼面，初始平板翼型任意展长 y 处的截面对应为薄平板截面，其长度等于该位置处的弦长$c(y)$，经变形后，展向站位 y 处的局部薄平板截面演化为同时具有弦向弯度与局部扭转的弯度－扭转耦合截面。

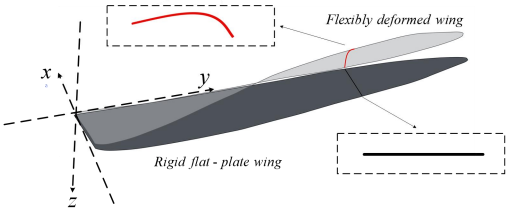


图 1（a）翼型弯度－扭转耦合变形模型示意图

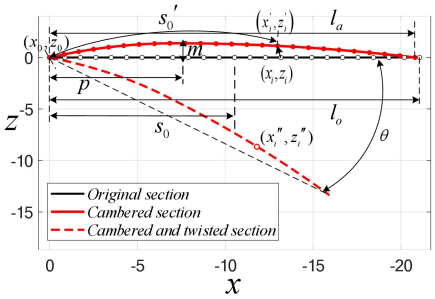


图 1（b）初始平直展向截面，弯曲后的几面，弯扭组合变形后的截面

对于初始薄平板截面，可等价表征为沿厚度方向连续堆叠的一族弦向直线。每条线均由局部前缘延伸至后缘，所有弦向直线的连续集合共同构成具有有限厚度的初始平板截面，如图 2（b）所示。为避免截面几何重构引入非物理的弦向拉伸，本问假设局部弦向直线在弯曲过程中不可伸长，对其施加弧长守恒约束。在任意展向站位 y 处，假定局部弦向参考线在弯度变形过程中不可伸长。因此，变形前平直线的长度l_0与变形后 NACA 型中弧线的弧长保持一致，其弧长守恒条件表示为：

$$\int_0^{l_a}\sqrt{1+\left(\frac{\partial n(x,z)}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = l_o \tag{1}$$

其中，l_a为变形截面的投影弦长，$n(x,y)$为变形后 NACA 型中弧线的法向坐标。对于给定的最大弯度 m 及其弦向位置 p，投影弦长l_a不再作为独立参数，而是由式（1）所定义的弧长守恒条件隐式确定。本文采用具有区间约束的二分法求解该非线性标量方程，直至相对弧长残差满足预设收敛容限。由此获得的投影弦长通常满足$l_a < l_0$，表明弯度变形仅缩短截面的弦向投影，而不改变原始直线的实际长度。设$P_i=(x_i,z_i)$为初始直线上的任意点，其弯曲变形后的对应位置为。分别以$s_i^{\,0}$和s_i'表示变形前后该点至前缘的直线距离和累计弧长。为满足弦向不可伸长约束，要求$s_i' = s_i^{\,0}$，该关系构成式（1）的点态形式，并用于确定弯曲后点之间的坐标映射。

在完成弦向弯度重构并满足弧长守恒约束后，需要对弯曲截面施加扭转变换，从而构建同时具有弯度与扭转特征的三维变形翼面。基于蝗虫后翼前缘翼脉复合结构所形成的主承载翼梁，并考虑前缘翼脉

扭转与翼面弯度之间的力学耦合关系[1-2]，本文将局部扭转运动等效为翼型截面绕前缘结构参考线的旋转。如图 2（b）所示，在弯曲变形的基础上，以各截面的前缘点(x_0, z_0)为旋转中心施加扭转变形。对于弯曲变形后截面线上任意点$(x_i^{'}, z_i^{'})$，首先将其转换至以前缘点为原点的局部坐标系，随后按照确定的截面扭转角进行旋转，并将旋转后的坐标转换回全局坐标系，最终得到弯扭耦合变形后的点$(x_i^{''}, y_i^{''})$。相应的坐标变换关系表示为：

$$\begin{bmatrix} x_i^{''} \\ z_i^{''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{'} - x_0 \\ z_i^{'} - z_0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

通过式（1）、（2），翼面在任意时刻的瞬时几何构型可被完全确定。需要说明的是，该方法侧重于表征翼面的主导变形模态，即展向扭转和弦向弯曲，而未显式考虑真实昆虫翅翼表面的局部褶皱、翅脉诱导的起伏以及其他细观结构特征。通过该方法获得翼型截面在特征时刻对比 Walker 等[3]测量如图 2 所示，定量比较表明，大多数外翼段截面与重构翼型截面具有较高一致性，而内翼段及强变形时相存在较明显的局部偏差。此类偏差主要表现为翼脉位置附近的局部折曲或高阶波动，反映了真实昆虫翼所具有的非 NACA 几何特征。上述结果验证了采用$m(r,t)$、$p(r,t)$、和等效投影弦长表征动态弯度的合理性，并为后续弯度－扭转消融分析提供了低维几何基础。

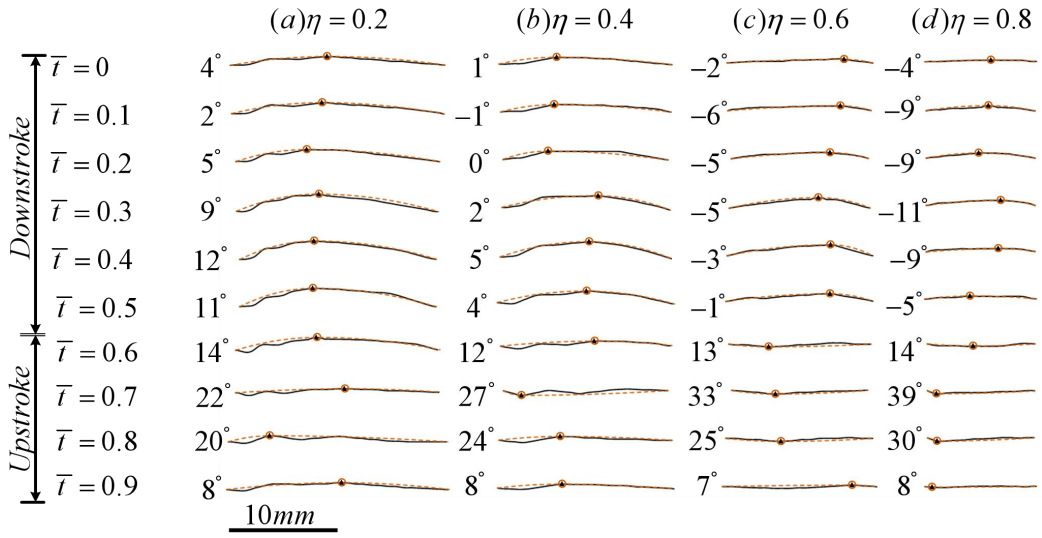


图 2 展示了蝗虫后翅（a-d）=在整个扑动周期内及沿翼展不同位置处的翼型截面[3]以及采取弦向弯度重构翼型截面的对比。四列分别对应不同归一化展向位置，所有截面前缘均位于左侧。实线对应原始真实截面，虚线对应采取弦向弯度重构翼型截面，实心三角形和空心圆圈对应真实截面与重构翼型截面的最大弯度位置，左侧角度表示局部瞬时迎角。

参 考 文 献:

[1] Walker SM, Thomas ALR, Taylor GK. 2009. Deformable wing kinematics in the desert locust: how and why do camber, twist and topography vary through the stroke? Journal of the Royal Society Interface 6(38):735-747. doi:10.1098/rsif.2008.0435.

[2] WOOTTON R J, EVANS K E, HERBERT R, et al. The hind wing of the desert locust (Schistocerca gregaria Forskål): I. Functional morphology and mode of operation[J]. Journal of Experimental Biology, 2000, 203(19): 2921–2931. DOI: 10.1242/jeb.203.19.2921.

[3]ISHIHARA D, ONISHI M, SUGIKAWA K. Vein–membrane interaction in cambering of flapping insect wings[J]. Biomimetics, 2023, 8(8): 571. DOI: 10.3390/biomimetics8080571.

基于IDW算法网格自动生成与深度学习模型的离心压气机性能优化设计

李俊逸，俞建阳，徐东强，武从文

（哈尔滨工业大学，哈尔滨 150001）

摘　要：离心压气机作为现代工业和航空航天领域的核心动力部件，其性能的优劣直接影响到整个系统的效率和可靠性。随着对压气机性能要求的不断提高，传统的设计方法已难以满足复杂气动性能优化的需求。特别是在多目标优化设计中，如何高效、精确地处理叶片几何的复杂性和流场网格的生成，成为制约优化效率的关键因素。本文旨在深入探讨离心压气机叶片气动优化中网格参数化和网格自动化生成的核心技术，特别是自由变形（Free-Form Deformation, FFD）方法在叶片几何参数化中的应用，以及反距离加权（Inverse Distance Weighting, IDW）网格变形算法在实现网格自动化更新方面的优势。

关键词：网格自动生成，结构网格，反距离加权，几何参数化

0 引　言

离心压气机广泛应用于航空发动机、燃气轮机、制冷设备和工业压缩机等领域，其紧凑的结构、高单级压比和轻量化特点使其在微型发动机和无人系统等新兴领域具有重要应用前景。然而，离心压气机内部复杂的三维非定常流动特性，以及叶片几何参数与气动性能之间强耦合关系，使得其气动优化设计面临巨大挑战。

传统的叶片设计和优化方法往往依赖于经验和试错，效率低下且难以达到全局最优。随着计算流体力学（CFD）方法和数值优化理论的发展，基于代理模型的优化设计方法应运而生，旨在降低计算成本并提高优化效率。这种“代理模型+优化算法”的体系已成为气动优化设计的主流。在该体系中，叶片几何的有效参数化和高质量的网格生成是实现高效优化的前提。传统的参数化方法，如使用样条曲线描述叶片几何，该方法通常涉及大量设计变量，导致优化空间庞大、计算资源消耗高，从而降低了优化效率]。此外，在优化迭代过程中，每次几何变化都需要重新生成网格，这不仅耗时，还可能引入网格畸变和拓扑结构改变带来的数值误差。因此，开发能够灵活控制叶片几何、同时实现高效高质量网格自动化生成的技术，对于离心压气机叶片气动优化具有重要意义。

1　叶片几何参数化：自由变形(FFD)方法

为了克服传统参数化方法的局限性，自由变形（Free-Form Deformation, FFD）方法被广泛应用于复杂三维叶片的几何参数化。FFD 技术的核心思想是通过一个包裹几何体的三维控制体来间接控制几何

体的形状。通过移动控制体上的控制点，可以实现几何体的高灵活性变形，同时保持其表面光滑性和拓扑结构不变。

1.1 FFD 参数化原理

FFD 算法的核心思想是将待变形网格嵌入一个由控制点张成的参数化控制体中，通过操纵控制点位移间接驱动网格变形。其数学基础建立在 Bézier 体或 B 样条的三变量张量积映射之上。几何模型上的任意一点 X 在控制体局部坐标系 $O^{'}-STU$ 中的位置可以表示为：

$$X = X_0 + sS + tT + uU$$

其中，X_0 是局部坐标系原点的坐标向量，S,T,U 是沿坐标轴的单位向量，s,t,u 是局部坐标值，且 $0 \le s,t,u \le 1$。当控制体中的控制点 $P_{i,j,k}$ 发生位移 $\Delta P_{i,j,k}$ 时，几何模型上对应点的位移 ΔX 可以通过三维 Bernstein 基函数的张量积来计算：

$$\Delta \vec{X}(s,t,u) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\Delta \vec{P}_{i,j,k}B_l^i(s)B_m^j(t)B_n^k(u)$$

其中，$B_l^i(s)$、$B_m^j(t)$ 和 $B_n^k(u)$ 分别是 l,m,n 阶的 Bernstein 基函数。这些基函数定义如下：

$$\begin{cases} B_l^i(s) = \dfrac{l!}{i!(l-i)!}s^i(1-s)^{l-i} \\ B_m^i(t) = \dfrac{m!}{j!(m-j)!}t^j(1-t)^{m-j} \\ B_n^k(u) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}u^j(1-u)^{n-k} \end{cases}$$

通过这种方式，叶片几何的复杂变形可以通过控制少数几个 FFD 控制点的位移来实现，大大减少了设计变量的数量，从而有效缩小了优化空间，提高了优化效率。

1.2 FFD 在自动化网格生成中的应用

FFD 在气动外形优化、涡轮机械叶片参数化和船型优化等领域得到了广泛应用。在气动外形优化中，FFD 可将翼型表面变形参数化为少量控制点的位移，从而大幅缩减设计变量空间。在船舶水动力学优化中，将 FFD 与降阶模型（ROM）结合，实现了巡航船型阻力的实时优化，通过 FFD 定义设计空间、POD-GPR 代理模型加速性能评估、遗传算法驱动优化收敛，展示了 FFD 在工业级复杂几何中的适用性。

然而，FFD 在处理大变形时面临网格质量退化的挑战。当控制点位移过大时，网格单元的正交性显著下降，尤其在近壁面边界层区域，网格偏斜可能导致 CFD 求解器收敛失败。针对这一问题，多层 FFD 策略通过在不同空间尺度上设置嵌套控制体，将大变形分解为多级渐进变形，有效缓解了网格质量退化。此外，局部 FFD 细化技术允许在几何敏感区域（如翼型前缘）增加控制点密度，同时保持其他区域的控

制点稀疏性，兼顾了变形精度与计算效率。如图 2 所示，FFD 的自动化网格变形流程涵盖了从控制体嵌入到变形网格输出的完整管线。

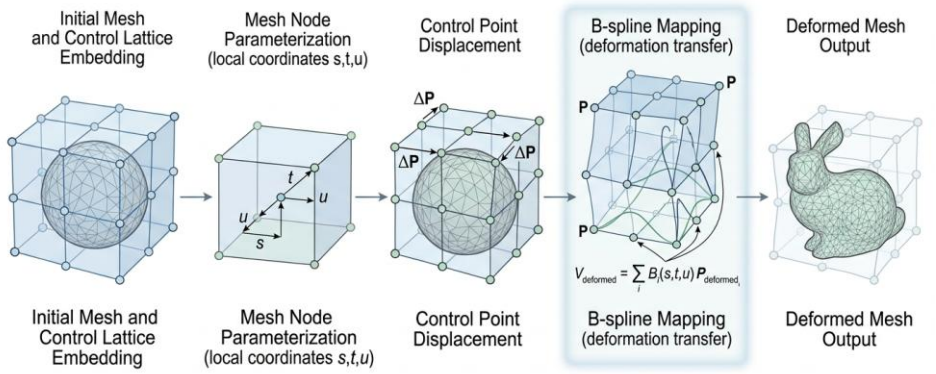


图1 FFD 网格变形示意图

1.3 FFD 控制点布置策略

在离心压气机叶片的气动优化中，FFD 控制点的布置策略对于实现有效的几何变形至关重要。针对我们团队设计的一款离心压气机，本研究提出一种的 FFD 控制点布置策略，以适应离心压气机叶片复杂的曲面几何特征。首先确定叶片的轮廓线，将叶根和叶尖轮廓的平均弧线沿流线方向等分为 l 份。根据等分点，在叶片的吸力面和压力面上获取对应的点。将这些表面点沿流动方向和局部厚度方向向外偏移，以确保 FFD 控制体能够完全包裹整个叶片。在厚度方向上，通常布置两层控制点（即 $n=l$ ），分别贴近吸力面和压力面。最后，将叶高方向等分为 m 份，从而生成一个具有 $(l+1)\times(m+1)\times(n+1)$ 个控制点的紧密包裹叶片的控制体。



图1 叶片控制点分布

具体而言，在主叶片周围布置了 7×5×2 个控制点（流向×展向×厚度方向），分流叶片周围布置了 5×5×2 个控制点。在优化过程中，为了避免产生不合理的几何畸变，控制点的移动方向被限制为沿吸力面和压力面对应控制点之间的连线方向。通过这种参数化方法，主叶片和分流叶片的几何变形由总

共 120 个控制点的位移来控制，这些位移作为优化设计变量，在保证局部几何精确控制的同时，有效缩小了寻优空间。这种方法在保证几何灵活性的同时，也有效地管理了设计变量的数量，为后续的优化算法提供了便利。

2 网格自动化生成与变形：反距离加权（IDW）算法

在基于代理模型的优化设计中，需要生成大量的几何样本进行数值模拟以构建代理模型。传统的网格生成方法，即每次几何变化都重新划分网格，不仅耗时巨大，而且容易引入网格质量问题，如局部畸变和拓扑结构改变，这些都会影响数值计算的精度和可靠性。为了解决这一问题，网格变形技术被引入，它能够在不改变网格拓扑结构和数量的前提下，根据几何变化对现有网格进行变形，从而保持网格质量并显著提高效率。

2.1 IDW 网格变形算法原理

反距离加权（Inverse Distance Weighting, IDW）网格变形算法是实现网格自动化更新的有效方法之一。IDW 算法的核心思想是，流场内部体网格节点的位移可以通过其与叶片表面节点（已发生变形）的距离进行加权平均来计算。具体而言，体网格节点 x 的位移 $f(x)$可以表示为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\phi(r_i)f(x_i)}{\sum_{i=1}^{N}\phi(r_i)} & (r_i\neq 0)\\ f(x_i), & (r_i=0)\end{cases}$$

其中，$f(x_i)$ 是第 i 个叶片表面节点的位移，N 是表面节点的总数，$r_i=\left|x-x_i\right|$ 是体网格节点 x 与表面节点 x_i 之间的欧几里得距离。$\phi(r_i)=r_i^{-c}$ 是权重函数，其中 c 是一个系数，用于控制表面节点对体网格节点变形的影响范围，当 c 值较大时，待插值点主要受邻近边界点的影响；当 c 值较小时，待插值点受较大范围边界点的影响。

2.2 自动化求解网格流场

本研究设计了一套叶片优化方案，该方案包含 FFD 参数化与 IDW 网格变形技术的耦合，使得其在维持可靠性的同时，大大降低了样本集的生成时间，实现从几何参数化到网格划分的自动化流程，具体流程如图 1 所示。

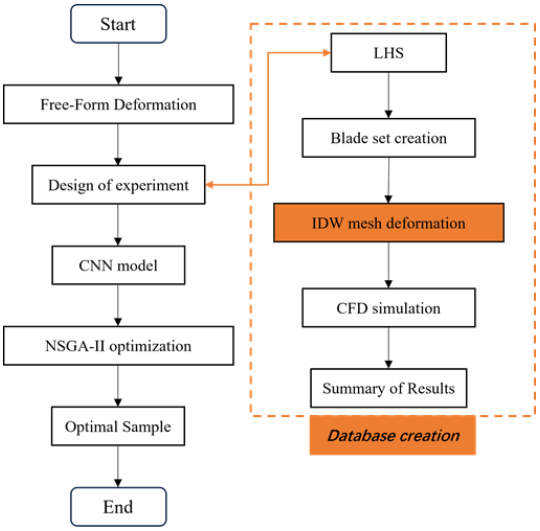


图1 自动化流程框图

整个通过 Python 脚本和 BAT 代码实现自动化控制，使得 CFD 求解器能够在批处理模式下运行。这种自动化流程显著提高了获取气动性能数据的效率，为后续的代理模型构建和优化设计提供了可靠的数据支撑。通过这种方式，可以高效地生成大量的几何样本，并获取其对应的气动性能数据，为后续深度学习模型的训练提供高质量高保真的输入。

3 结　论

本文基于上述方法对某型离心压气机叶片开展了自动化网格变形与气动优化设计。通过耦合 FFD 进行叶片型面参数化与 IDW 实现计算域网格更新，在保持网格正交性和近壁面 y^+分布的前提下，实现了叶轮通道的几何重构。数值模拟结果表明，经过优化后，在设计点处的总压力比和绝热效率分别提高了 4.03%和 1.21 个百分点。优化结果表明，本文提出的优化设计框架能够有效提高离心式压缩机的性能，并为压缩机的气动优化设计提供支持。验证了 FFD-IDW 联合方法在叶轮机械气动优化中的工程可行性与有效性。系统对比了 FFD 和 IDW 两种算法在自动化网格生成中的数学原理、工程应用和性能边界。

当前研究仍面临若干关键挑战。第一，大变形下网格质量退化问题尚未根本解决：FFD 在控制点位移过大时正交性下降，IDW 在远场区域易产生网格拉伸，两种方法均缺乏面向非均匀大变形的自适应控制机制。第二，自动化控制体构建仍是 FFD 在工业级复杂几何中推广的主要瓶颈：控制体的形状、控制点数量和层级结构目前依赖人工经验设定，缺乏面向任意几何拓扑的自动化生成方法。第三，跨学科耦合模拟（如流固耦合、热流固耦合）对网格变形提出了实时性和双向耦合的新需求，现有方法在计算效率和变形鲁棒性之间难以兼顾。

基于参数化搜索的自适应网格并行生成负载均衡算法

陆翰林，龚春叶，郭晓威，李　超，高　翔*

高端装备数字化软件湖南省重点实验室 国防科技大学计算机学院，湖南长沙，410073

摘　要：自适应网格并行生成过程需将网格生成子任务划分给各处理器进程，当前主流框架如 p4est、AMReX 等在该环节多采用启发式算法进行一维序列化的负载均衡。启发式算法实现简单、快速，但往往不能达到最佳负载均衡效果。针对该问题，本文构建了一个完整的自适应笛卡尔网格并行生成框架，并在此基础上提出了一种基于参数化搜索的最优负载均衡算法：以 Morton 编码生成粗网格，按空间填充曲线顺序将三维权重网格映射为一维权重序列，再以参数化搜索求解该序列的最优划分，并利用 CCP 问题特性压缩验证开销。以经典二分贪心算法和 Zoltan 库中 HSFC 划分方法为基准的测试表明，本文算法在划分效率与划分质量上同时占优：与经典二分贪心算法相比，在序列长度与划分段数之比较大时，本文算法耗时在大多数组合上更低；与 HSFC 划分方法相比，在四个典型三维模型的 12 组配置、96 种测试参数上，本文算法耗时远低于 HSFC，负载不均衡因子均不超过 HSFC。

关键词：网格生成，自适应笛卡尔网格，负载均衡，参数化搜索

0 引　言

笛卡尔网格由笛卡尔坐标系自然延伸而来，1965 年 Harlow & Welch 开创了 MAC 方法，该方法采取标记粒子间接标记自由表面，首次在二维均匀非贴体笛卡尔网格上求解不可压 NS 方程[1]。1983 年 Yerry 和 Shephard 首次将四叉树应用于几何自适应网格生成[2]。2005 年 Tu 等首次实现了基于 SFC 划分八叉树叶子节点的自适应笛卡尔网格并行生成[3]，2008 年 Burstedde 等引入森林八叉树，实现了支持球面等复杂几何的动态自适应笛卡尔生成，为 p4est 奠定了算法基础[4]。迄今为止，笛卡尔网格的研究方向十分丰富，本文内容将主要涉及 h 型自适应笛卡尔网格，并聚焦其中负载均衡环节。

在数值计算领域，主流的负载均衡方法可分为两大类，几何划分方法和图划分方法。其中几何划分有递归坐标对分法、递归惯性对分法、空间填充曲线法即 SFC 方法等，图划分方法有多层谱对分方法、多层图剖分方法、超图剖分方法、多约束多目标图划分法等[5]。图划分方法将问题抽象为带顶点权重、边权重的图，以最小化最大子域负载为约束，以最小化边割、最小化通信体积等作为优化目标，将权重图剖分为 K 个不相交子域[6]。该问题属于 NP 难问题，即便是启发式的图划分算法时间开销亦不容小觑，故在自适应笛卡尔网格生成领域，几何划分方法更为常见。递归坐标对分法、递归惯性对分法基于坐标轴或几何惯性主轴，将当前域划分为两个权重近似相等的子域，并递归上述过程，直至获得目标数量划分子域[7-8]。SFC 方法使用空间填充曲线将高维问题域中的研究对象映射为一维权重序列，而后设计划分算法对该一维序列进行划分。SFC 方法速度快于几何划分方法中其他两种，在处理负载空间分布不均的问题域时，分区质量亦优于其他两种。当前笛卡尔网格通常基于 SFC 框架生成，无需二次构建 SFC，且自适应加密时其负载空间分布不均，故在自适应笛卡尔网格生成多采取 SFC 方法作为负载均衡策略。

目前主流 h 型自适应笛卡尔网格生成框架可以分为三类，cell-base AMR(CAMR), block-based AMR(BAMR), patch-based AMR(PAMR)[9]，其代表性项目依次有 p4est、AMReX、Uintah。就并行过程中的负载均衡而言，p4est 在网格单元的 Morton 序列上，采用一种分布式的启发算法，以理想负载来指导序列划分，从而实现负载均衡[10]。AMReX 提供了多种负载均衡策略，如比例跟踪策略、画家分区策略等，该

*通讯作者，gaoxiang12@nudt.edu.cn 资助项目：国家重点研发计划项目 2025YFB3003605

二者均以笛卡尔网格单元的全局 Morton 序列为基础，采取不同策略划分。AMReX 的比例跟踪策略也是一种启发式算法，以理想负载作为划分阈值，同时要求当前处理器已分配的负载与总负载之比不超过已分配处理器与总处理数之比，从而最大化数据局部性。画家分区策略则是结合了二分搜索和贪心思想，通过全局迭代求解实现最优负载均衡划分[11]。Uintah 提出了一种基于 SFC 的二段式负载均衡策略。在首次负载均衡时，Uintah 并行生成 HSFC 序列，以启发式阈值作为单个进程最大权重，实现初步划分；在迭代求解过程中，使用预测成本模型基于历史执行时间来预测未来负载，提升重划分质量[12]。除了框架内部实现的负载均衡算法外，自适应笛卡尔网格生成过程中也可以利用如 Zoltan、ParMETIS 等第三方库实现负载均衡。

上述生成框架中的负载均衡过程可简要描述如下：根据网格单元的 SFC 编码，将单元的目标权重属性进行排序，获得一维 SFC 序列，而后设计划分算法划分该序列。获取一维 SFC 序列是直接且容易的，核心部分在于对该序列进行 K 划分，该过程等同于 CCP (Chain-on-Chain Partitioning)问题：以最小化最大子段和为优化目标，将包含 N 个元素的一维序列划分为 P 个子段[14]。该问题的求解算法可分为启发式算法与精确算法两大类，后者又可细分为动态规划算法与参数化搜索算法。启发式算法速度最快，但不能保证实现优化目标；动态规划算法为精确求解算法，可保证实现优化目标，但是耗时长；参数化搜索算法兼具二者特性，精确求解的同时亦有较快的运行速度，但算法相对复杂。上述三种笛卡尔网格生成框架中的负载均衡算法除了 AMReX 的画家分区策略为参数化搜索类算法外，其他算法都是启发式算法。

针对当前主流自适应笛卡尔网格并行生成过程中负载均衡环节多采用启发式算法的现状，本文首先实现了基于 Morton 编码的自适应笛卡尔网格并行生成框架，然后提出了一种改进的参数化搜索算法用于并行生成过程中的负载均衡环节，并在实际网格生成场景以及一维序列划分场景下将该算法与经典二分贪心算法（即朴素参数化搜索算法）、Zoltan 中 HSFC 负载均衡方法分别进行了对比实验。文章余下部分组织如下，第一节简要介绍本文所实现的网格生成框架；第二节描述改进的参数化搜索算法；第三节对实验结果进行分析。

1 自适应笛卡尔网格并行生成框架

前文已提到 h 型自适应笛卡尔网格可分为三类，其中 CAMR 使用树结构管理数据，相对其他两种自适应能力更强，同等条件下产生网格单元数目少[9]。本文实现的自适应笛卡尔网格并行生成框架，设计思路即以 CAMR 为基础，引入几何相交性自适应判据，采取 Morton 编码作为底层数据结构，设计为分阶段式并行自适应加密，并采用 HDF5 结合 XDMF 保存网格文件。

1.1 整体流程

本生成框架可分为三个阶段，分别是 IO 阶段、粗网格生成、并行自适应加密，流程见图 1。其中 IO 阶段包括 STL 格式的几何模型文件输入和网格文件输出，在几何模型文件输入阶段，程序解析、提取三角面片数据，并将计算面片中心点作为几何表征，同时将中心点以设定的最大层级进行编码，得到一组中心点 Morton 编码；在网格文件输出阶段，将最终网格数据并行保存为 h5 文件，同时输出对应 XDMF 文件便于后续可视化、求解等操作。

粗网格生成阶段根据输入的几何模型，自动确定对应尺寸的网格空间，而后在该基础上通过相交性几何自适应判据进行自适应加密，加密至初始层级即粗网格生成完毕。初始加密结束后，将粗网格网格单元以 Morton 序划分，以进行并行加密。并行自适应加密阶段与粗网格自适应加密流程核心部分相似，除开在进程内进行 4:1 平衡外，还需额外考虑涟漪效应对邻居进程拥有的边界单元的影响。粗网格划分阶段即为笛卡尔网格并行生成过程中的负载均衡环节。

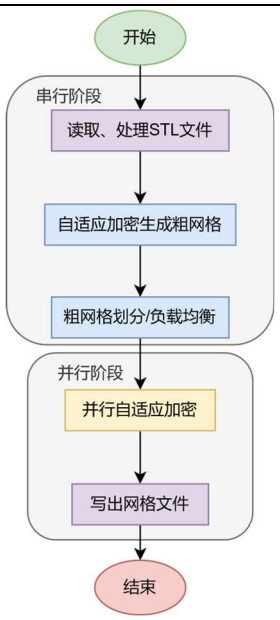


图 1 自适应笛卡尔网格并行生成流程图

1.2 Morton 编码

空间填充曲线是指从一维紧致区间到高维空间的连续映射，其像集（即曲线经过的全部点集）具有非零的若尔当含量，即占据正的面积或体积[15]。通俗而言，这是一条以“线”的形态生成，却能像“面”或“体”一样铺满某一有界区域的连续轨迹，在该区域内部，任意一点都可被该曲线遍历。常见的空间填充曲线有希尔伯特曲线、皮亚诺曲线等，Morton 曲线在许多文献中虽然也被称为空间填充曲线，但据 Michael Bader 描述[15]，因其映射不满足连续性要求，并不被视为真正的空间填充曲线，而是一种离散化的降阶替代方案。不过由于 Morton 曲线仅涉及位运算，计算开销极低，在工程实践中依然得到了广泛应用。本文实现框架同样选用 Morton 曲线，需要指出的是其他空间填充曲线例如希尔伯特曲线，可直接替换 Morton 曲线，仅需修改部分涉及 Morton 特性的、笛卡尔网格生成相关的工程实现即可，不影响本文关注的负载均衡环节讨论结果。

不同于希尔伯特曲线等是基于递归几何变换（将目标域逐级细分，当前层的局部形态取决于上一层对应子域形态），Morton 曲线是直接将坐标位交错从而构造得到（直接将各维度坐标的二进制位按维度顺序交替穿插）。由于该特性，Morton 曲线的计算开销很低，且在查询网格单元表亲关系、父子关系、相交性检测等场景下，均可利用该特性优化，二维 Morton 编码原理图见图 2。

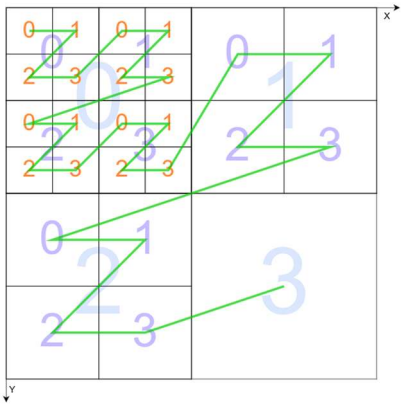


图 2 二维 Morton 编码原理图

1.3 粗网格自适应生成

自适应判据是约束自适应网格如何生成的关键信息，常见的自适应判据可分为基于误差估计、基于特征、面向目标等[16]，在自适应网格生成过程中还常见一种基于几何相交性的简单判据。基于几何相交性判据过程中，网格单元与几何模型相交性检测是难点，常需要借助额外的辅助数据结构（如 BVH、ADT）或额外算法（如分离轴理论）来加速该过程。本文对输入的 STL 三角面片模型进行了简化处理，以面片中心点来表示三角面片，同时以最细粒度 Morton 编码表示该中心点。通过该处理，单次相交性检测可视为一次二分查找开销，为$O(\log M)$，其中 M 为三角面片数。

粗网格的自适应生成过程是常见的 h 型自适应过程，先根据输入几何模型尺寸，定义一个中心点与几何模型中心点重合、各向尺寸大于几何模型包围盒的网格空间，而后循环遍历所有满足几何判据的网格单元，对其进行分裂加密；当所有网格单元分裂加密结束后，进行全局 4:1 平衡。循环该过程，直至当前层级达到初始层级，见图 3。

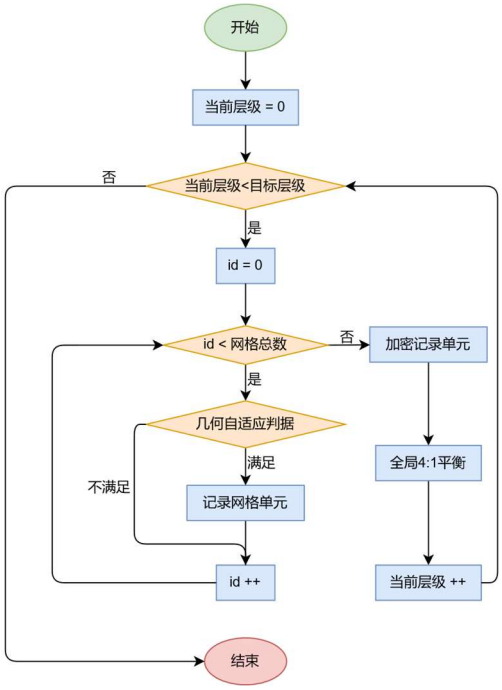


图 3 粗网格自适应生成流程图

在全局 4:1 过程中，网格单元的加密层级、邻居单元等信息的获取是重要环节。对于使用 Morton 编码表示的笛卡尔网格单元，其自身加密层级的获取有两种方式：一种显式地在数据结构中增加数据成员存储加密层级信息，并在迭代加密过程中维护每个网格单元的加密层级；若数据结构中仅存储叶子节点，则可采用另一种方式，即不显式存储加密层级信息，而由网格单元本身及其邻居信息推断。对于一条待判断的 Morton 编码，由细向粗逐层获取该层编码，通过判断是否存在兄弟节点，若存在兄弟节点则该层编码加密层级即为当前层级，否则向更粗层级回溯，直至得到最终层级。

由于 Morton 编码本身的特性就是坐标交错，仅需将对应坐标位翻转即可获取对应邻居单元编码，而后验证该条编码是否存在即可确认邻居信息。

1.4 负载均衡及并行自适应加密

粗网格的自适应生成过程为串行过程，得到粗网格后，需将粗网格划分任务指派给各处理器进程，再由各进程后续进一步自适应加密。粗网格划分即本文关注的负载均衡环节，常见的工程实现是在内部实现某种几何划分方法，再引入如 ParMetis、Zoltan 等第三方库以增加更多方法选择。本文在框架内部串行嵌入了几何划分中的空间填充曲线方法，并引入了 Zoltan 以增强框架可用性。

几何划分中的空间填充曲线方法设计思路为：将所有待划分的网格单元使用空间填充曲线进行编码，而后根据需求为每个网格单元赋权重，形成一组带权空间填充曲线编码序列，而后将该序列划分为多个连续段，每个连续段对应一个进程，从而实现负载均衡。其中的核心问题就是如何将该序列划分为多个连续段，同时最小化所有连续段和中的最大值。

当得到粗网格后，待划分网格单元就是以 Morton 编码进行存储，同时附加了网格单元包含的三角面片中心点数作为权重，形成一组键值对。在划分时，只需按顺序提取出其中权重序列进行划分即可。

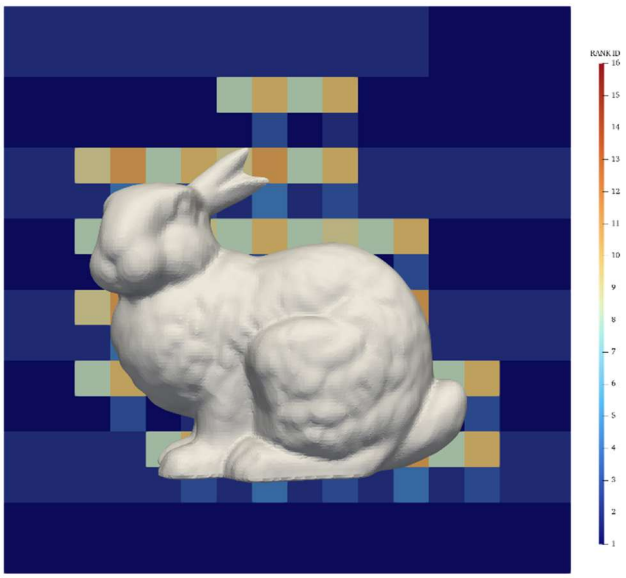


图 4 粗网格划分结果示意图

由于粗网格是全局信息，粗网格划分过程是全局串行，各进程均进行相同划分操作。随后各进程对所属的网格单元进行自适应加密，该自适应加密过程与粗网格自适应过程相似。并行自适应加密时，由于涟漪效应的存在，为保持边界网格单元的 4:1 平衡，各进程需与邻居进程通信。朴素方法是逐进程轮询，本文框架根据全局粗网格划分信息，预处理构建了邻居拓扑关系，加速了该过程。

2 一维负载均衡算法

由前述，本文负载均衡环节的核心问题是将一组有序键值对划分为多个连续段，并最小化所有连续段和中的最大值。该问题可进一步抽象为相同约束下，将一组序列划分为多个连续段，即等同于 CCP 问题。其形式化描述如下：设$T = \langle t_1, t_2, \dots, t_N \rangle$是一组由$N$个任务组成的序列，每个任务$t_i$有非负权重$w_i \geq 0$。给定$P$个同构处理器，CCP 问题即要求将$T$划分为$P$个连续子段，并最小化所有处理器负载的最大值。

设有分隔符序列$\Pi = \langle s_0, s_1, \dots, s_k \rangle$，其中$0 = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k = N$，第$j$个处理器的负载为$W_j = W_{s_{j-1}+1, s_j} = \sum_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} w_i$，则优化目标为:

$$B_{opt} = \min_{0=s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k = N} \max_{1 \leq j \leq P} W_j$$

目前 CCP 问题相关算法研究已十分成熟，可分为启发式算法、精确算法两大类。启发式算法有很多，例如迭代改进法、递归二分法等，该类算法开销低，其典型时间复杂度为$O(N)$、$O(N + P * \log N)$，但无法保证最小化进程负载。精确算法又可分为动态规划、参数化搜索等两类，该两类算法都可保证达成约束目标，但是算法开销普遍高于启发式算法，参数化搜索的典型时间复杂度为$O(N * \log N)$，动态规划典型时间复杂度为$O(P * N^2)$。

由于笛卡尔网格生成过程中，任务负载在空间中分布不均，例如初始网格生成过程中，网格生成负载集中于几何模型边界，空白区域网格生成负载极低；流场仿真模拟过程中，流体计算负载多集中于模型外表面、模型后端湍流部等，其他区域计算负载较低。若采取启发式算法来进行笛卡尔网格的负载均衡操作，难以得到高质量的负载均衡划分，不利于后续网格生成、求解计算等过程。本文基于参数化搜索算法，分析并利用 CCP 问题特质，提出了改进的参数化搜索算法。

2.1 参数化搜索算法

参数化搜索是一种不直接求解优化问题，而是将单变量优化问题转换为对应的决策问题，而后在解空间中多次搜索选值、迭代验证，获取最优解的技术[17]。在理论层面上，该技术要求原优化问题对应的决策问题在其解空间上具有单调性；在应用层面，则需保证转换后的决策问题可解且易于求解。

应用参数化搜索思想求解 CCP 问题，可将之转化为对如下决策问题$D(\lambda)$的求解，给定负载上限λ，$D(\lambda)$判断是否存在一个合法划分Π，令所有P个连续子段的负载均不超过λ：

$$D(\lambda) = True \Leftrightarrow \exists\ \Pi, s.t.\ \max_{1\le j\le P} W_j(\Pi) \le \lambda$$

由于权重非负，易知该决策函数具单调性，由参数化搜索思想，此时原优化目标等价于寻找满足$D(\lambda) = True$的最小λ^*，该最小λ^*即B_{opt}。朴素参数化搜索算法即经典二分贪心算法，采用二分搜索定位该最小负载上限λ^*，其初始化搜索区间为$[L,R] = [\max_{1\le i\le N} w_i, W_{tot}]$，其中$L$为最大任务权重，$R$为权重总和，每轮取中点$\lambda'$进行验证。验证时采用贪心策略，从左至右线性扫描序列，累加当前段权重，若累加下一任务后权重大于λ'，则在此处切割并重置，继续扫描剩余序列直至完成，得到划分Π'。若Π'的划分段数小于等于P，即$S(\Pi') \le P$，则λ'满足决策函数，更新$R = \lambda'$；若Π'的划分段数大于P，即$S(\Pi') > P$，则λ'不满足决策函数，更新$L = \lambda' + 1$。重复该过程直至搜索区间收敛为$L = R$时，得到目标值。单次验证时间复杂度为$O(N)$，总验证次数为$O(\log W_{tot})$，流程图见图 5。

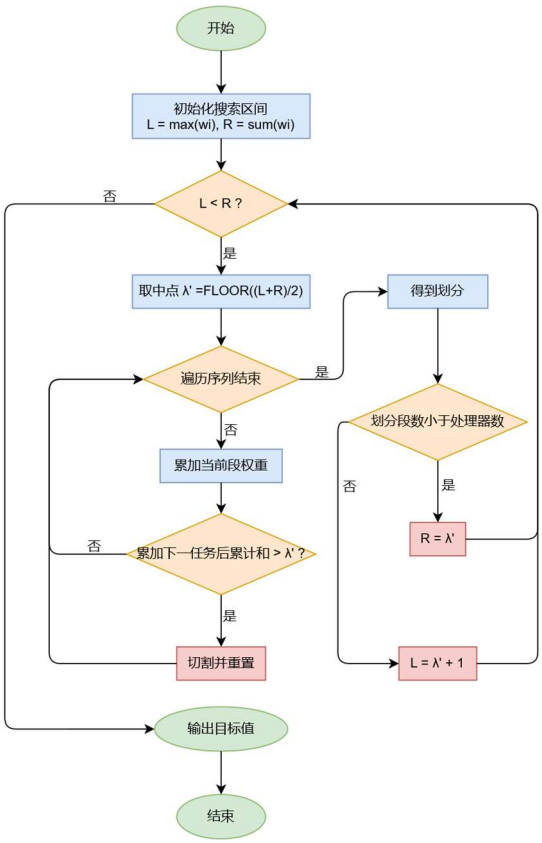


图 5 经典参数化搜索求解算法流程图

针对经典参数化搜索的改进算法研究，其核心方向可归结为两大类：一类是基于动态分隔符边界收缩算法，一类是基于前缀和矩阵离散算法。基于分隔符边界收缩算法思想还可应用于动态规划算法等，本文仅关注其在参数化搜索框架下的应用。

参数化搜索下的基于分隔符边界收缩算法以 Nicol+算法为代表，在基于子链离散的原始 Nicol 算法基础上，为每个分隔符动态维护其索引上下界，在初始状态进一步缩减搜索空间的同时，也可在每次可行性测试后进一步收紧搜索范围。在时间复杂度上，该算法消去了朴素参数化搜索算法中由验证次数引入的对数项因子，虽引入了部分对数项，但该部分开销占比不高[14]。

基于前缀和矩阵离散算法以 PATH1 算法为代表，其将所有子连续段权重处理为一个前缀和矩阵，根据其对应子连续段长度赋予不同合成权重，实现原始搜索空间离散，在搜索过程中优先验证短子连续段，加速搜索解空间的收紧；在验证方面，该算法利用路径粘合设计，将已排除短子连续段进行粘合以避免重复验证，加速验证过程，该算法基于均摊分析的理论时间复杂度是$O(N)$，但是工程实现上可能具较高常数因子[18]。

2.2 改进参数化搜索算法

2.2.1 算法设计

因 CCP 问题最优负载上限必为某子连续段权重和，搜索空间可限定为由所有子连续段权重和构成的离散集合。在此基础上，考虑朴素参数化搜索算法中的某次贪心验证迭代过程，若搜索空间已收紧为$[L', R']$，任务索引以i为开始，以$i+t$结束的子连续段满足$W_{i,i+t} \le L'$，且$R' < W_{i,i+t+1}$，则对于$[L', R']$中的任意验证值的划分结果，若存在任务索引以i为开始的子连续段，其结束位置必为$i+t$，本文称在搜索空间为$[L', R']$时，任务索引i已收敛。

以一组共 8 个任务$\{17, 29, 34, 63, 89, 28, 51, 76\}$，$P=4$为例，以图 6 示意该观察结论。图中横轴为任务排列顺序，最下面一行表示该组任务序列，每个色块表示一个任务，色块中数字表示任务权重；纵坐标为验证值，正向为验证值增大方向；第一象限中每一个色块表示划分结果中的一个连续段，色块中数字表示该连续段权重和。由图可知，当验证值$\lambda' \in [89, 116]$时，其划分段数为 5 段；当验证值$\lambda' \in [117, 126]$时，其划分段数同样为 5 段，即验证值在 89～126 的整个区间内划分段数恒为 5 段；当验证值$\lambda' \in [127, 142]$时，其划分段数为 4 段；当验证值$\lambda' > 142$时，划分段数均小于 4。可知 127 即为最优解。该观察表明，在验证过程中，部分子连续段的对应分隔符可提前确定。

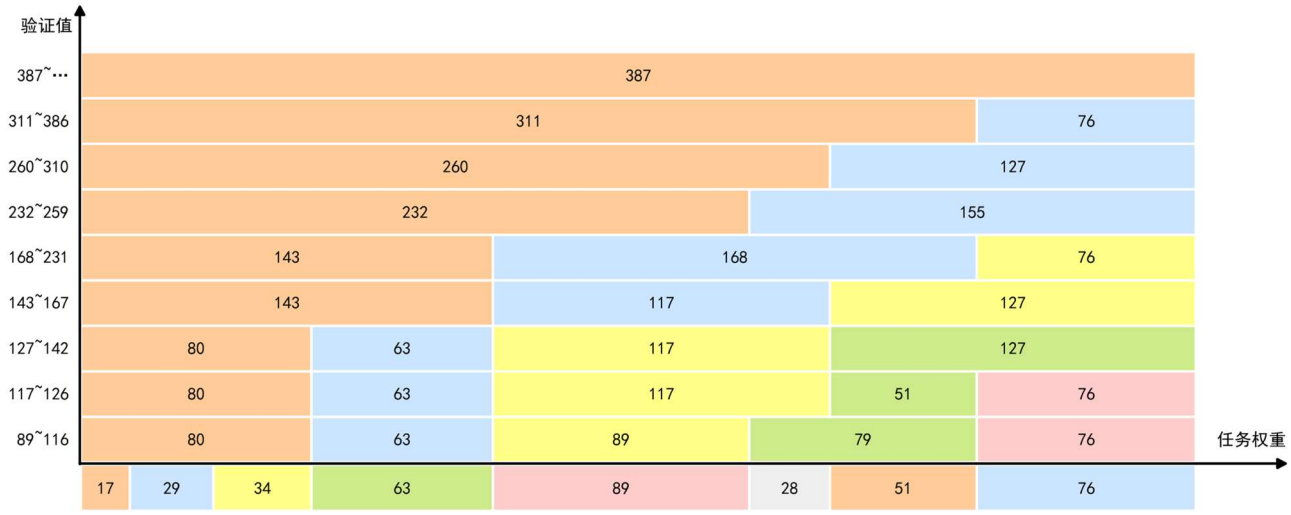


图 6 CCP 问题观察结论原理示意图

基于上述观察，本文维护双分隔符序列，记为 last0、last1，分别表征以当前搜索空间下上界为负载上限进行贪心验证所得的划分结果，例如$last0[j]$表示任务开始索引为j的连续段，其任务结束索引为$last0[j]$，

且$W_{j,last\ [j]} \le L'$，$last1$同理。并使用理论下界$L_{theoretical} = \left\lceil \frac{W_{tot}}{P} \right\rceil$和启发式上界$R_{heuristic} = \max_{1 \le j \le P} W_j(\Pi_{avg})$来初始化该两组分隔符序列，其中$\Pi_{avg}$是直接均分任务数量的划分结果。易知，随着迭代过程的进行，两组分隔符序列将逐渐重合，完全重合时即为最优划分。

初始化完成后，算法定位首个满足$last0[s_j] \neq last1[s_j]$的分隔符索引$s_j$，记为待确定索引$cur$。此时，该索引左侧所有分隔符均收敛，即对于$0 \le m < j$，有$last0[s_m] = last1[s_m] = s_{m+1}$，而索引$s_j$则满足$last0[s_j] \neq last1[s_j]$；该索引右侧分隔符未完全确定，其中部分分隔符可能收敛，其余则无固定规律。

当在搜索空间中搜索时，直接以当前待确定索引cur的可能子连续段权重和作为搜索空间：$\{W_{cur,t} \mid t \in (last0[cur], last1[cur]]\}$。单次验证时，不直接从头开始线性扫描，而是从待确定索引cur开始，依据$last0$、$last1$指示的结束位置逐段推进。若当前未确定索引发生如前述的确定情况，则可直接跳过；否则贪心累加验证；验证结束后，根据验证结果更新上下界以及$last0$、$last1$、cur。该机制随着迭代推进，待确定索引将逐步向序列尾端移动，单次验证范围逐渐缩减，同时待确定索引指示的搜索空间亦随之缩减；在单次验证过程中，未确定索引的可跳过情况将逐渐频繁，进一步加速了验证过程。算法整体流程图见图 7。

本文所设计双分隔符序列，其目的与 Nicol+算法中的动态分隔符一致，都在于将搜索空间在基于子链离散的基础上进一步离散收紧，同时使得搜索空间可以利用历史验证信息随迭代过程进一步缩减，除此之外，本文进一步将双分隔符序列用于加速验证过程，双分隔符序列表征的收敛信息可直接用于跳过部分段的验证过程，实现加速验证。

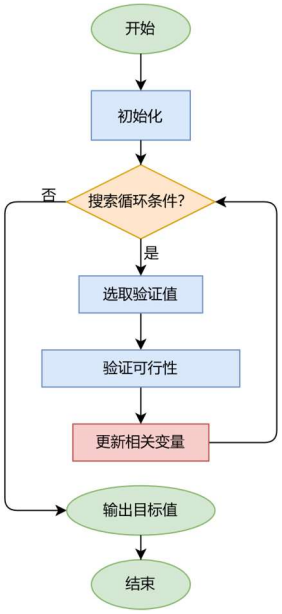


图 7 算法整体流程图

2.2.2 核心算法实现

由于参数化搜索过程涉及多个中间态，本文将算法封装于$SPartitioner$类中，该类以任务权重序列、处理器数P作为构造参数，内部维护搜索空间上下界$L\&R$、双分隔符序列$last0$、$last1$、待确定索引cur等；提供四个核心成员函数$init()$、$partition()$、$pickNum()$、$verify(\lambda')$，其中$init()$负责初始化搜索空间上下界、双分隔符序列、待确定段；$partition()$执行搜索主循环；$pickNum()$负责根据待确定索引选取验证值；$verify(\lambda')$执行搜索循环中验证过程。

$init()$函数在初始化搜索空间时，采取了理论下界$L_{theoretical}$和启发式上界$R_{heuristic}$作为初始搜索空间。其中，理论下界是易知且易得的，该启发式上界需要先将序列按数量划分为P段，而后线性扫描该划分中最大段和即为$R_{heuristic}$。得到上下界后，再次扫描序列，以初始化$last0$、$last1$、待确定段cur。本文实现

的$pickNum()$函数采取朴素做法，直接以离散搜索空间的中间点作为任务结束索引，即$\lambda' = \{W_{cur,t} \mid t = \lceil (last0[cur] + last1[cur])/2 \rceil\}$。

参数化搜索的主循环结构是固定的，本文中$partition()$在判断搜索空间是否收敛的循环条件之外，额外增加了判断待确定索引cur是否推进至序列尾端。单次循环中，首先在当前待确定索引cur对应的搜索空间中选取验证值λ'，而后传入验证函数，验证该值对应划分结果段数，对比划分段数与目标段数P，根据对比结果更新上下界、待确定索引cur。

```
SPartitioner::partition()
     前置条件：L、R、cur、last0[]、last1[] 已由 init() 完成初始化
     输出：最小负载上限λ*
1:   while (L < R && cur < n) do
2:        λ′ ← pickNum()
3:        if (verify(λ′) == true) then
4:             R ← λ′
5:        else
6:             L ← λ′
7:        end if
8:        while (last0[cur] == last1[cur]) do
9:             cur ← last0[cur] + 1
10:            if (cur ≥ n); then
11:                 cur ← n
12:                 break
13:            end if
14:       end while
15:  end while
```

验证过程为充分利用双分隔符序列，从待确定索引cur开始，以$last1$指示的各划分段逐段验证。设当前段起始索引为$start$，其对应上界划分时结束索引为end，另令pre记录前序循环划分中累计剩余任务起始索引。若当前验证段存在$last0[pre] = last1[pre]$，则该索引已收敛，可直接跳过该段验证；否则对当前所有待划分任务区间$[pre, t]$进行二分搜索定位划分位置。由于待划分任务区间$[pre, t]$可能存在多个满足验证值的连续子段，二分搜索定位需多次进行直至剩余待划分任务权重和小于验证值。序列验证结束后，若划分段数不大于目标段数，则更新$last1$且返回$true$，否则更新$last0$且返回$false$。

```
SPartitioner::verify(λ′)
     输入：验证值 λ′
     输出：若序列划分段数不超过 P 段，则返回 true；否则返回 false
1:   start ← cur              // 从当前待确定段起始位置开始扫描
2:   pre ← start              // 当前段起始位置
3:   ncut ← 0                 // 当前已切割段数
4:   temp_last[] ← 空数组      // 临时记录本次划分结果
5:
6:   while (start < n) do
7:       end ← last1[start]
8:       if (last0[pre] == end && pre == start) then
9:           temp_last[pre] ← end
10:          pre ← end + 1
11:          ncut ← ncut + 1
12:      else
13:          while (Weight(pre, end) ≥λ′) do
14:              start0 ← pre
15:              end0 ← end
16:              i ← (start0 + end0) / 2
17:
18:              while (start0 < end0) do
19:                  if (Weight(pre, i) < λ′) then
```

```
                    start0 ← i + 1
                else if (Weight(pre, i) > λ′) then
                    end0 ← i
                else
                    break
                end if
                i ← (start0 + end0) / 2
            end while

            if (Weight(pre, i) == λ′or pre == i) then
                temp_last[pre] ← i
                pre ← i + 1
            else
                temp_last[pre] ← i - 1
                pre ← i
            end if
            ncut ← ncut + 1

        end while
    end if

    start ← end + 1
end while

if (pre < n) then
    ncut ← ncut + 1
    temp_last[pre] ← n - 1
end if

if ncut > P then
    last0 ← temp_last
else
    last1 ← temp_last
end if
return ncut <= P
```

3 测试分析

3.1 测试环境与实验设计

所有实验均在一台双路 Intel Xeon Gold 5117 CPU 的服务器上进行，双路共 28 物理核心，每核 2 线程，共 56 逻辑线程，主频 2.00GHz，内存 251GB，操作系统为 Ubuntu 20.04.1 LTS。所有代码均使用 C++编写，编译器为 GCC 7.5.0，编译优化选项为-O3。并行通信基于 MPI 3.3.2，网格文件输出依赖 HDF5 1.8.16，可视化结果通过 ParaView 5.11.2 展示。

测试分为三类：压力测试、实际案例测试和整体测试。前两类主要评价本文算法性能，以本文算法的实际耗时与经典二分贪心算法实际耗时的比值作为评价指标，该比值越小，则说明本文算法优势越明显。主要控制变量是序列长度与划分段数，其中压力测试选取了一系列序列长度与划分段数的比值，记为R，在固定比值下，改变划分段数，得到对应序列长度，而后根据最大值范围生成测试数据。

实际案例测试以典型三维模型生成的粗网格带权重 Morton 序列作为输入数据，权重为网格单元包含的三角面片中心点数量，改变划分段数，得到测试数据。两类测试中每组测试各重复 10 次，取平均值，消除系统调度等偶然因素影响。

整体测试则以典型三维模型为对象，在同一批运行中同时记录三类指标：一是各阶段的墙钟耗时（串行构造、并行加密、并行写出）；二是本文算法与 Zoltan 中 HSFC 方法的划分耗时，用于对比两种划分算

法的绝对效率，为排除 HSFC 中逆希尔伯特转换的影响，HSFC 中只统计核心划分循环，本文算法则统计*SPartitioner*类生命周期时间；三是各进程实际承担的负载量，用于计算负载不均衡因子，对比两种划分方法的划分质量。其中第二、三项为本文关注的对比重点，端到端耗时仅作参照。整体测试中每组测试各重复 6 次，取平均值，消除系统调度等偶然因素影响。

3.2 压力测试

压力测试具体设计如下：当序列长度与划分段数比值较小时，以较小步长增长比值；当比值较大时，以较大步长增长，最终得到由2增长至$1E+06$共17个比值；随机数最大值则以10倍关系递增，得到由10增长至$1E+08$共8个最大值；划分段数取2，4，…，8192共 13 个 2 的幂次值，并补充$1E+04$，$1E+05$，$1E+06$，$1E+07$等 4 个值，合计 17 个值；序列长度则前密后疏，得到由4增长至$8.192E+08$共123个值。剔除无效组合，最后形成2048组测试，并选取了部分测试数据得到图 8。

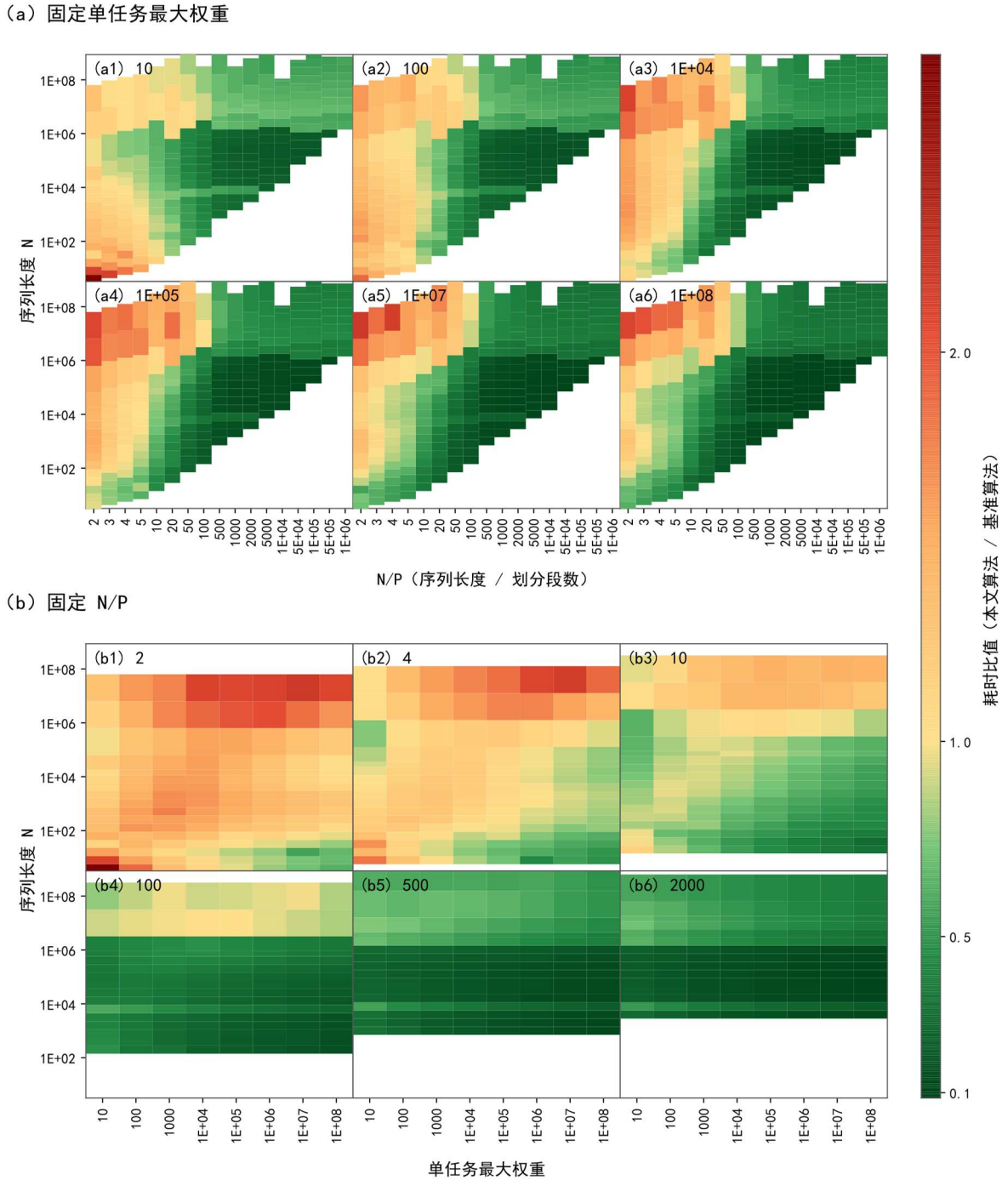


图 8 压力测试对比图

图 8 为压力测试对比结果，图中选取了随机数最大值为$10,\ 100,\ 1E+4,\ 1E+5,\ 1E+7,\ 1E+8$的六种情况，以及$R$为$2,\ 4,\ 10,\ 100,\ 500,\ 2000$的六种情况。当$R$为小值，如$2,3,4,5$时，由于本文算法预处理过程耗时不可忽略，且基于子链离散对搜索空间的缩减效果较差，故本文算法在大部分测试组合下，性能表现均劣于基准算法；当R增长至$10,20$等较大值时，基于子链离散对搜索空间的缩减效果逐步凸显，故仅在部分大数量级的序列长度下表现与基准算法持平或劣于，其余测试组合均优于基准算法；当R增长至100以上时，双分隔符序列对各段搜索空间的缩减效果增加，同时验证过程中加速效果明显增加，此时本文算法在绝大多数测试组合下优于基准算法，且大部分测试组合下耗时仅为基准算法一半及以下；当R达到 500 以上时，全部测试组合均优于基准算法。

综合压力测试数据，本文算法的实际性能表现出明确的规律：在序列长度 N 与划分段数 P 的比值大于 10 时，算法在中小数量级的序列划分场景下加速效果明显，多数测试组合优于基准算法，劣于基准的组合全部集中于序列长度处于大数量级的区间；当R大于 100 时，本文算法加速效果显著，多数情况下是基准算法效率的 2 倍以上；当R一定时，同一序列长度下，耗时比值随单任务最大权重的增加而小幅度下降。

3.3 实际案例测试

实际案例测试选取了四个典型案例分别是斯坦福兔 bunny、中国龙 dragon、圆柱体 cylinder、高升力通用研究模型 CRM-HL，并通过本文实现的笛卡尔网格生成框架得到多组待划分粗网格带权重 Morton 序列，以该序列作为输入，改变划分段数P进行测试，并选取了其中几组测试数据得到图 9。与压力测试的随机数据不同，该序列的权重分布由真实几何与自适应判据共同决定，呈现局部集中的特点，更接近实际使用场景。

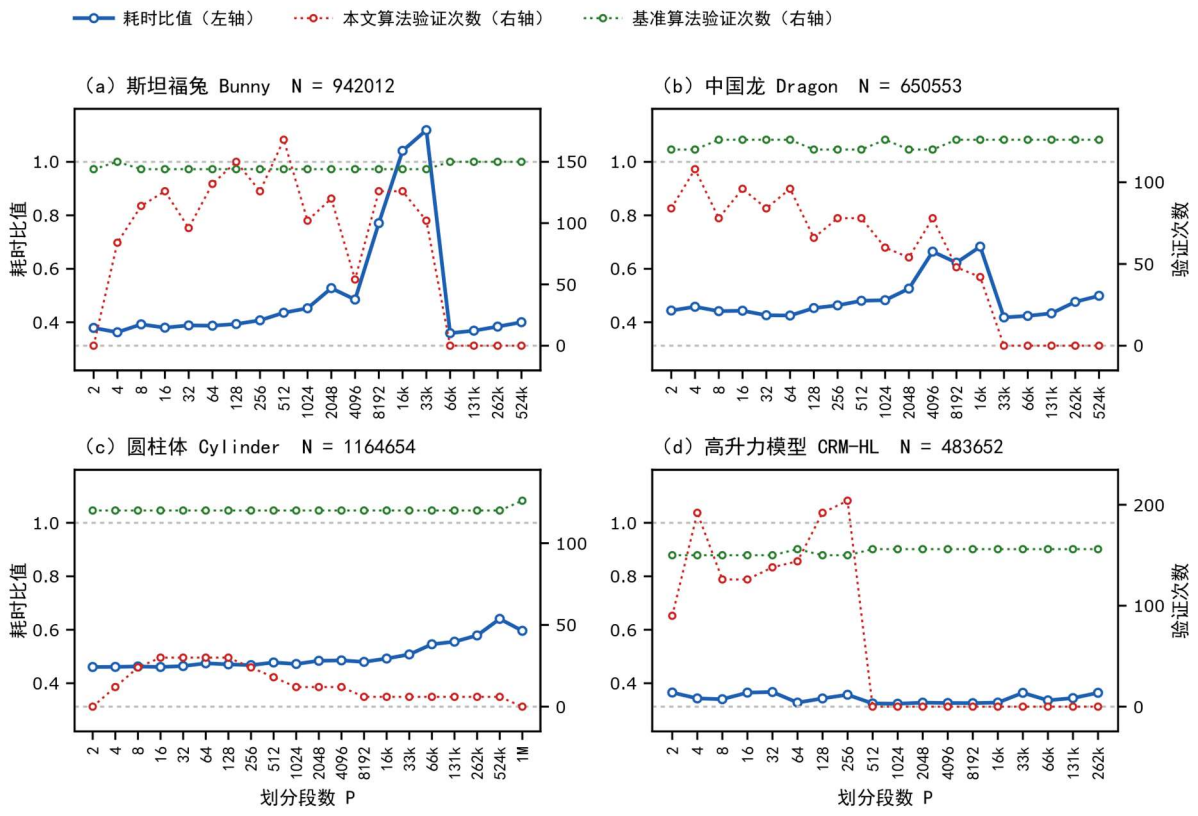


图 9 实际案例的性能测试结果

图 9 中每幅子图的左轴给出本文算法与二分贪心算法的耗时比值，右轴给出两者在划分主循环中调用验证函数的次数，选取的四个算例粗网格单元数分别为 942012、650553、1164654、483652。以斯坦福兔

为例，划分段数为 2~2048 时 R 大于 460，为本文算法的优势区间，耗时比值维持在 0.36~0.53，明显优于二分贪心算法；划分段数增至 4096~32768 时 R 降至 29~230，算法性能迅速退化，耗时比值由 0.485 升至 1.119；划分段数超过 32768 后 R 进一步减小，此时划分段数过多，且由于序列权重呈现局部集中的特性，初始化阶段选取的启发式上界已接近最优负载或就是最优负载，算法直接结束无需验证，耗时比值再度回落至 0.36~0.40。这种“先升后落”的三段式形态由算法自身设计决定，但受算例自身数据分布影响，并非在四个算例上都充分显现。

3.4 整体测试

整体测试所选模型与实际案例测试一致，分别是斯坦福兔 bunny、中国龙 dragon、圆柱体 cylinder、高升力通用研究模型 CRM-HL，对每个模型设置初始加密层级$plv \in \{4, 6, 8\}$、并行加密层级$mlv = 6$，共 12 组配置；每组配置在进程数$n \in \{1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$下各执行 6 次，取平均值，消除系统调度等偶然因素影响。各配置的网格规模如表 1 所示，整体测试实际耗时结果如图 10 所示。

表 1 整体测试网格规模

模型名称	初始加密层级	初始加密单元数	总单元数
斯坦福兔 Bunny	4	911	1,626,654
	6	13,980	6,848,304
	8	208,776	16,777,363
中国龙 Dragon	4	582	1,273,000
	6	9,689	5,638,130
	8	149,752	14,663,517
圆柱体 Cylinder	4	904	458,746
	6	8,730	1,134,981
	8	99,219	2,139,173
高升力模型 CRM-HL	4	337	306,958
	6	2,556	2,066,646
	8	27,399	8,409,710

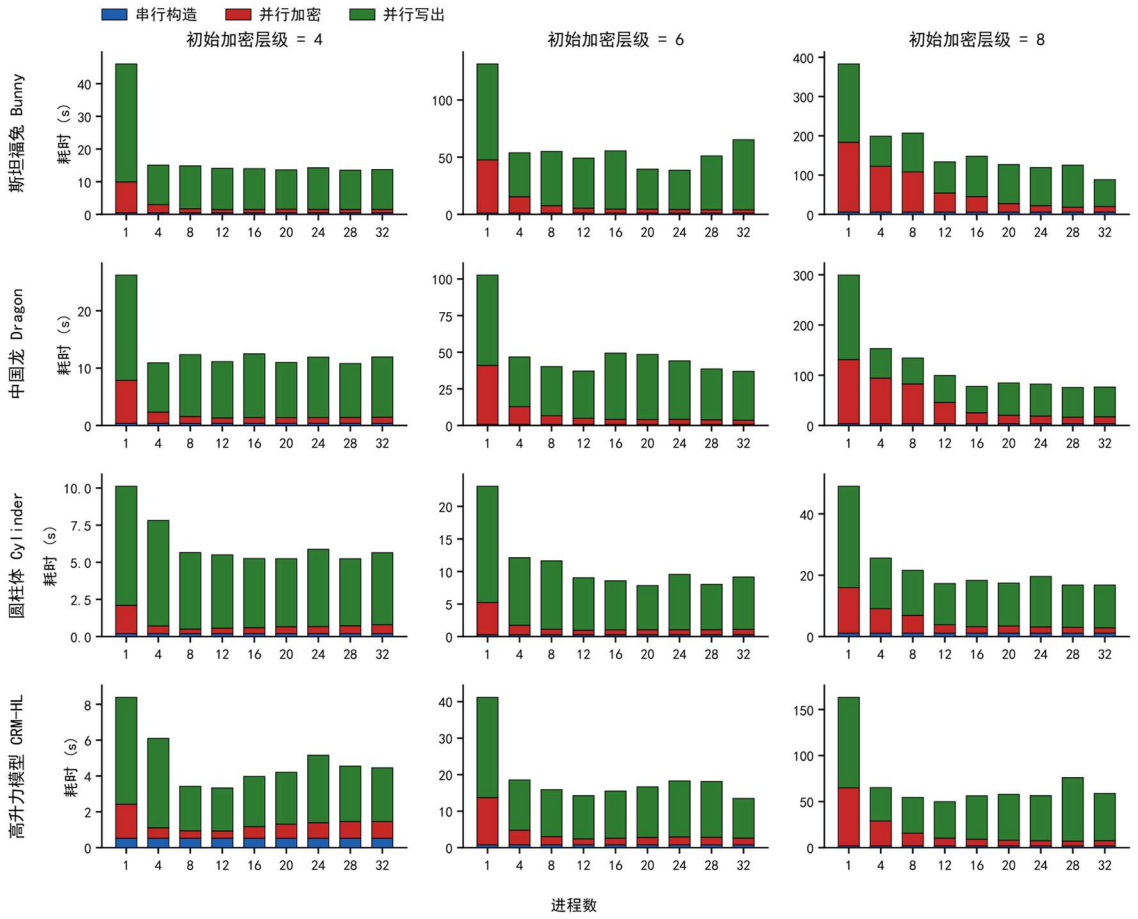


图 10 整体测试实际耗时

图 10 按列给出初始加密层级为 4、6、8 时四个模型各阶段耗时随进程数的变化，柱高为三阶段耗时之和。以圆柱体 $plv=8$（图 10 第三行第三列）为例：$n=1$ 时串行构造、并行加密、并行写出分别为 1.09、14.86、33.05 s，总耗时 50.08 s；n 增至 12 时，串行构造保持 1.09 s 不变，加密降至 2.75 s、为 $n=1$ 时的 19%，写出降至 13.46 s、为 $n=1$ 时的 41%，总耗时降至 17.52 s；n 继续增至 32 时，加密进一步降至 1.73 s，写出反而回升至 13.96 s，总耗时 17.00 s。可见串行构造与进程数无关，占比多在 2%以内（仅 CRM-HL 在 $plv=4$ 时因总耗时较短而占 6.3%）；并行加密可随进程数充分收缩；并行写出占主要份额，且随进程数下降不明显，其占初始耗时的比例由 52%～79%升至 $n=32$ 时的 67%～94%。

表 2 给出以各组 $n=1$ 为基准的整体加速比。以同一算例为例：$n=4$、8、12 时加速比依次为 1.93、2.29、2.86 倍；$n\geq 12$ 后基本不再提高，稳定在 2.52～2.95 倍；进程数由 12 增至 32，加速比仅由 2.86 倍升至 2.95 倍，可见加速比在 12 进程后已趋于稳定。

上述加速比的变化可由 Amdahl 定律解释。串行构造属完全串行阶段，无法通过增加进程数获得加速，但其占比很小，对整体加速比的影响不显著。并行加密与并行写出均含串行分量，区别在于二者内部串行分量所占的比重：前者以并行过程为主，故耗时随进程数持续下降，加速最为显著；后者以串行过程为主，其耗时在进程数较少时即趋于稳定，加速收益有限。

表 2 整体测试加速比

模型名称	初始加密层级	N=1	N=4	N=8	N=12	N=16	N=20	N=24	N=28	N=32
斯坦福兔 Bunny	4	1.00	3.02	3.10	3.28	3.30	3.40	3.25	3.43	3.37
	6	1.00	2.45	2.41	2.70	2.40	3.35	3.45	2.60	2.04
	8	1.00	1.93	1.86	2.86	2.60	3.04	3.23	3.07	4.34
中国龙 Dragon	4	1.00	2.41	2.14	2.38	2.12	2.42	2.23	2.46	2.22
	6	1.00	2.20	2.55	2.78	2.10	2.14	2.35	2.68	2.80
	8	1.00	1.96	2.24	3.00	3.86	3.55	3.65	3.97	3.93
圆柱体 Cylinder	4	1.00	1.30	1.84	1.85	1.94	1.94	1.74	1.94	1.81
	6	1.00	1.92	2.00	2.57	2.71	2.97	2.44	2.90	2.55
	8	1.00	1.93	2.29	2.86	2.69	2.83	2.52	2.94	2.95
高升力模型 CRM-HL	4	1.00	1.39	2.42	2.50	2.12	2.00	1.64	1.84	1.90
	6	1.00	2.23	2.62	2.92	2.69	2.51	2.28	2.30	3.09
	8	1.00	2.51	3.00	3.28	2.92	2.85	2.90	2.17	2.79

划分算法是本文的核心工作，故进一步在相同参数下对比本文算法与 Zoltan 中 HSFC 划分方法的划分耗时与划分质量。表 3 给出 12 组配置在 $n = 4\sim32$ 各进程数下的划分耗时比值（HSFC 方法/本文算法）：96 种测试参数的比值均大于 1，范围 1.63～14.54，中位比值为 3.77，98%的比值大于 2，80%大于 3，即绝大多数情况下本文算法的划分耗时不足 HSFC 的一半，其中八成不足其三分之一，即本文算法在时间上相对于 HSFC 方法具有显著优势。

表 3 划分耗时比值

模型名称	初始加密层级	N=4	N=8	N=12	N=16	N=20	N=24	N=28	N=32
斯坦福兔 Bunny	4	6.31	6.59	5.83	6.00	5.79	5.64	5.24	5.17
	6	2.33	2.73	3.03	3.38	3.47	3.58	3.84	3.87
	8	2.14	2.25	1.92	3.89	4.21	3.40	3.43	3.32
中国龙 Dragon	4	5.91	6.00	3.03	5.08	6.06	3.68	3.92	4.50
	6	2.72	2.83	3.32	3.59	3.73	4.01	4.04	4.03
	8	2.36	3.08	3.61	2.84	3.56	4.73	4.55	4.26
圆柱体 Cylinder	4	2.93	2.24	3.59	3.71	3.59	3.69	2.69	2.88
	6	2.08	2.60	3.14	3.40	3.44	3.31	3.77	3.77
	8	1.63	4.01	2.80	3.97	2.73	3.22	3.46	3.34
高升力模型 CRM-HL	4	4.00	6.00	5.45	8.22	10.63	13.55	11.38	10.56
	6	7.18	7.61	6.86	8.59	7.57	14.54	5.07	5.83
	8	2.46	3.08	3.09	4.05	4.14	4.23	3.96	4.13

取各进程耗时平均值；比值 = HSFC 方法耗时/本文算法耗时

划分质量以不均衡因子衡量，该因子按(最大进程负载-理论平均负载) /理论平均负载 × 100%计算：程序在每次运行中记录各进程实际承担的计算量（所属单元负载之和），取其最大值与本次运行的理论平均负载（总负载除以进程数）代入上式，以百分数表示，数值越接近 0 表示越接近理论平均负载。表 4 以高升力模型 CRM-HL 为例对比本文算法与 HSFC 方法的负载不均衡因子，每个加密级下给出三行，分别为本文算法、Zoltan 中 HSFC 划分方法以及两者的差值。

表 4 高升力模型 CRM-HL 负载不均衡因子对比

初始加密层级		N=4	N=8	N=12	N=16	N=20	N=24	N=28	N=32
4	本文算法	6.8	8.8	24.9	64.5	105.6	146.7	187.8	229.0
	HSFC 方法	6.8	9.4	31.7	75.6	105.6	146.7	187.8	229.0
	差值	0.0	**0.6**	**6.8**	**11.1**	0.0	0.0	0.0	0.0
6	本文算法	0.6	1.4	3.7	3.2	3.7	5.6	9.7	13.6
	HSFC 方法	1.0	2.8	6.4	7.3	5.4	13.0	24.7	43.5
	差值	**0.4**	**1.4**	**2.7**	**4.1**	**1.7**	**7.4**	**15.0**	**29.9**
8	本文算法	0.0	0.0	0.2	0.2	0.9	1.0	1.0	0.7
	HSFC 方法	0.1	0.1	0.4	0.7	2.3	1.2	6.1	3.7
	差值	**0.1**	**0.1**	**0.2**	**0.5**	**1.4**	**0.2**	**5.1**	**3.0**

负载不均衡因子 = （划分方案中最大进程负载 − 理论平均负载）/ 理论平均负载 × 100 %

差值 = HSFC 方法不均衡因子 − 本文算法不均衡因子

可以看出，本文算法在全部 24 种测试参数上的不均衡因子均优于或等于 HSFC 划分方法，其中 19 种本文更低、5 种两者完全相同，平均低 3.81 个百分点；这符合精确算法的特性：本文算法解出的最大进程负载即为当前输入序列的实际最优划分负载。就表 4 而言，初始加密层级为 4 时，此时单个网格单元最大权重过大，网格数过少，故随着进程数增加，受最重单元制约不均衡因子逐步增大，本文算法与 HSFC 方法基本一致；初始加密层级为 6 时，此时权重分布极值合理，无过大权重单元，本文算法精确算法特性突显，不均衡因子明显优于 HSFC 方法，差距最大处为 $plv = 6$、$n = 32$，本文 13.6%、HSFC 43.5%，相差 29.9%；初始加密层级为 8 时，网格较密，无重单元，此时本文算法仅略微优于 HSFC 方法。需要指出，这 24 种测试参数上本文算法的划分耗时同样远低于 HSFC 方法，表 3 中对应比值的中位数为 5.92，且全部大于 2。

综上，本文算法在划分耗时与划分质量两方面均优于 HSFC 划分方法：划分耗时为后者的 6.9%～61.5%，不均衡因子在全部 96 种测试参数上亦不劣于后者。

4 结论

本文围绕并行笛卡尔网格生成过程中的负载均衡问题，提出了一种基于改进参数化搜索的负载均衡算法。该算法将负载均衡问题严格形式化为 CCP 问题，以最小化最大处理器负载为优化目标，充分挖掘了 CCP 问题中权重非负性带来的单调性与子连续段离散特性，利用理论下界与启发式上界构造紧致的初始搜索空间，引入动态更新的双分隔符序列，将验证过程中的线性扫描局部化至尚未收敛的索引区间。该设计在保持参数化搜索精确求解能力的同时，有效降低了实际运行中的验证开销，克服了经典参数化搜索算法在大规模序列划分场景下验证次数多、搜索空间广的不足。总体而言，本文算法针对 CCP 问题改进了参数化搜索算法，并将其实际应用于并行笛卡尔网格生成框架的负载均衡环节，在保持最优负载的同时将划分开销压缩至实用水平。

在四个模型 12 组配置、96 种测试参数的实测中，本文算法的优势在两个基准上均成立。与同为精确求解的经典二分贪心算法相比，本文算法通过压缩验证开销，在保持最优性的同时大幅降低实际耗时，76 个组合中 74 个（97.4%）占优，最坏情况仅慢 12%，且优势随序列规模增大而扩大；与启发式的 Zoltan 中 HSFC 划分方法相比，本文算法划分耗时的中位数仅为后者的 26.5%，负载不均衡因子在所有 96 种测试参数上均不劣于后者，以更短的耗时获得了可证明最优的划分质量。

未来工作将针对大规模应用场景对本文算法作进一步扩展。一方面，大规模并行场景中负载本身已分布式存储，应用本文算法需先将其作分布式并行化改造，而当前验证采用贪心策略、过程线性有序且前后

依赖，在保持精确求解的前提下并行化较为困难；另一方面，大规模场景下负载随计算推进而动态变化，动态负载均衡需求普遍，而本文算法目前仅支持静态负载均衡，尚不支持动态负载均衡，有待完善。

参 考 文 献:

[1] Harlow, Francis H.,Welch,et al. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface[J]. Physics of Fluids,1965,Vol.8(12): 2182-2189.

[2] Mark A. Yerry,Mark S. Shephard. A Modified Quadtree Approach To Finite Element Mesh Generation[J]. Computer Graphics and Applications, IEEE,1983,Vol.3(1): 39-46.

[3] Tiankai Tu,DAVID R. O'HALLARON,OMAR GHATTAS. SCALABLE PARALLEL OCTREE MESHING FOR TERASCALE APPLICATIONS[C]//SC '05: Proceedings of the 2005 ACM/IEEE Conference on Supercomputing. 2005.

[4] Burstedde C , Ghattas O , Stadler G ,et al.Towards Adaptive Mesh PDE Simulations on Petascale Computers[J].proceedings of teragrid, 2008.DOI:doi:http://dx.doi.org/.

[5] 唐波. 大规模多区结构网格 CFD 并行计算中的负载平衡算法研究[D]. 国防科学技术大学,2013.

[6] Buluç, Aydın,Meyerhenke,et al. Recent advances in graph partitioning[J]. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics),2016,.

[7] M. J. Berger,S. H. Bokhari. A Partitioning Strategy for Nonuniform Problems on Multiprocessors[J]. IEEE Transactions on Computers,1987,C-36(5): 570-580.

[8] Charbel Farhat,Michel Lesoinne. Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,1993,Vol.36(5): 745-764.

[9] 赵宁,刘剑明,田琳琳,等. 可压缩流动问题笛卡尔网格模拟方法研究进展与展望[J]. 力学学报,2025,57(2): 285-314.

[10] Burstedde, Carsten,Wilcox,et al. : Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2011,Vol.33(3): 1103-1133.

[11] Nanda, Amitash , Chowdhury,et al. Exploring Dynamic Load Balancing Algorithms for Block-Structured Mesh-and-Particle Simulations in AMReX[J]. arXiv,2025,.

[12] Meng Q, Luitjens J, Berzins M. A comparison of load balancing algorithms for amr in uintah[J]. Scientific Computing and Imaging Institute, University of Utah, Tech. Rep. UUSCI-2008-006, 2008.

[13] Benoit, Anne,Robert,et al. A Guide to Algorithm Design : Paradigms, Methods, and Complexity Analysis[M]. Taylor & Francis Group,2013.

[14] Pinar, A.,Aykanat,et al. Fast optimal load balancing algorithms for 1D partitioning[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing,2004,Vol.64(8): 974-996.

[15] Michael Bader. Space-Filling Curves: An Introduction with Applications in Scientific Computing[M]. Springer Berlin Heidelberg,2013.

[16] Mikail Salihoglu. H-P adaptation for k-exact finite volume schemes[D]. Sorbonne Université,2024.

[17] Nimrod Megiddo. Applying Parallel Computation Algorithms in the Design of Serial Algorithms[J]. Journal of the ACM,1983,Vol.30(4): 852-865.

[18] Frederickson, Greg N. , Zhou,et al. Optimal Parametric Search for Path and Tree Partitioning[J]. arXiv,2017.

RESEARCH

Generative AI-Driven Polycube Modeling for Hexahedral Mesh Generation and Volumetric Spline Construction

Yuxuan Yu[1*], Jiashuo Liu[1], Hua Tong[2], Honghua Lou[1] and Yongjie Jessica Zhang[2*]

*Correspondence:
yuyuxuan@dhu.edu.cn;
jessicaz@andrew.cmu.edu
[1] Institute of Artificial Intelligence, School of Information and Intelligent Science, Donghua University, Shanghai, 201620, China
[2] Department of Mechanical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, USA
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

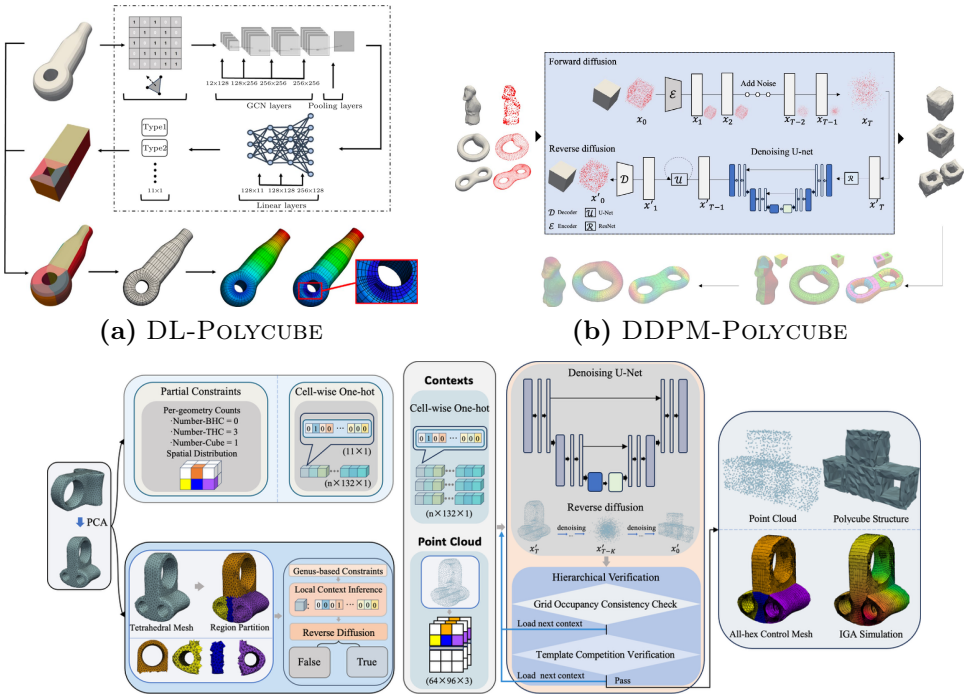
Polycube structures provide structured parametric domains for all-hexahedral mesh generation and analysis-suitable volumetric spline construction. Their practical use for complex CAD geometries, however, is limited by the difficulty of obtaining topology-consistent polycube structures without surface-label correction or user intervention. This paper summarizes a progression of learning-based methods that addresses this bottleneck. DL-Polycube predicts a predefined polycube class and uses the predicted structure to guide surface segmentation. DDPM-Polycube replaces direct template mapping with a generative formulation in which the deformation from an input geometry to a polycube is learned as a denoising process. eDDPM-Polycube further expands the primitive set and grid configuration and introduces genus-guided context generation with hierarchical verification. The generated polycubes are subsequently used for parametric mapping, all-hexahedral control mesh generation, mesh-quality improvement, truncated hierarchical volumetric spline construction, and Bézier extraction for isogeometric analysis. Results across the three studies demonstrate increasing generality and automation, while also revealing a trade-off between direct-prediction efficiency and diffusion-based representational capacity.

Keywords: generative artificial intelligence; CAD/CAE integration; polycube; hexahedral mesh generation; volumetric spline construction; isogeometric analysis

1. Motivation

Isogeometric analysis (IGA) uses unified spline representations to connect geometric design with numerical analysis, providing a framework for CAD/CAE integration. Constructing a high-quality volumetric spline parameterization from given boundary surfaces remains one of the major challenges in IGA. Polycube methods are attractive because a block-structured polycube can serve as a parameter domain for octree subdivision and all-hexahedral control mesh generation. The same control mesh can then support volumetric spline construction and Bézier extraction for isogeometric analysis (IGA). The principal bottleneck is therefore not only mesh generation itself, but the reliable construction of a valid polycube whose topology is compatible with the input geometry.

Our recent work develops three learning-based solutions to this bottleneck, which differ in how the polycube structure is obtained. Figure 1 illustrates the progression from direct template prediction to context-conditioned generative modeling.



(a) DL-POLYCUBE **(b)** DDPM-POLYCUBE

(c) EDDPM-POLYCUBE

Figure 1. Evolution of the learning-based polycube pipelines. (a) Direct prediction of a predefined polycube structure followed by structure-guided segmentation. (b) Denoising diffusion that learns deformation from input geometry to a polycube structure. (c) Extended diffusion with user-guided or automated context generation and hierarchical verification. The panels are adapted from the authors' three published papers [1, 2, 3].

2. From template prediction to generative modeling

DL-Polycube: efficient structure prediction. DL-POLYCUBE establishes a direct mapping from an input triangular surface mesh to one of a predefined set of generalized polycube structures. A graph convolutional network predicts the polycube class, after which the structural information determines the number and organization of surface patches. Unsupervised clustering performs the segmentation, with shortest-path correction used when zigzag boundaries occur. The predicted structure and segmented surface are then passed to parametric mapping and octree-based all-hexahedral meshing. On 15 tested CAD models, the generated meshes had minimum scaled Jacobian values greater than 0.1 and supported volumetric spline construction and IGA. Direct prediction is fast—less than one second for polycube prediction in the reported examples—but its generalization is bounded by the coverage of the predefined template library and training distribution [1].

DDPM-Polycube: deformation learning. DDPM-POLYCUBE reformulates polycube construction as a denoising task. The input geometry is interpreted as a topology-consistent polycube with accumulated small-scale deformations, and reverse diffusion progressively removes these deformations. Instead of enumerating a large library of complete polycube templates, the training set is built from a cube, a through-hole cube, and one combination type on a 2×1 grid. Experiments show

that the method can generate valid polycubes for genus-0, genus-1, and genus-2 geometries, including test cases whose topologies lie outside the training range. This improves flexibility relative to direct template classification, but iterative sampling is slower: the reported rod example takes approximately 32 seconds for 500 reverse-diffusion steps, compared with less than one second for direct prediction [2].

eDDPM-Polycube: richer primitives and automated context generation. eDDPM-Polycube extends the diffusion formulation in three directions. First, it introduces a blind-hole cube primitive for local hole-like features that do not change the global genus. Second, it replaces the restricted 2×1 layout with a three-dimensional $G_{3\times2\times2}$ grid containing 12 cells. Third, it develops genus-guided context generation for both user-guided and automated inference. In automated mode, locally inferred primitive labels are assembled into a global context and evaluated by a two-stage verification procedure: the grid occupancy consistency check rejects candidates with inconsistent cell occupancy or spatial extent, and template competition verification checks primitive category and orientation. This structured context interface makes primitive assembly interpretable while improving the representational capacity of diffusion-based polycube generation [3].

Table 1 Progression of the three learning-based polycube methods.

Method	Polycube formulation	Principal capability	Main limitation
DL-Polycube	Classification over predefined structures	Fast direct inference and structure-guided segmentation	Dependence on template and training coverage
DDPM-Polycube	Denoising deformation with two primitives on a 2×1 grid	Generation for genus 0–2, including unseen topology cases	Restricted primitive/grid representation and iterative inference
eDDPM-Polycube	Context-conditioned denoising with three primitives on $G_{3\times2\times2}$	Blind-hole representation, multi-cell assembly, and hierarchical verification	Fixed grid and primitive set; increasing search cost for complex contexts

3. Hexahedral meshes and volumetric splines

The three methods differ at the polycube-construction stage but converge to a common CAD-to-IGA workflow. Once a valid polycube is available, a bijective correspondence is established between the input surface and the polycube boundary. Octree subdivision in the polycube parameter domain produces an all-hexahedral control mesh, which is mapped to the physical geometry. Pillowing, smoothing, and Jacobian-based optimization improve element quality. Truncated hierarchical volumetric splines are then constructed on the optimized control mesh; the resulting splines are C^2-continuous in regular regions and C^0-continuous around extraordinary points or edges. Finally, trivariate Bézier extraction transfers the spline information to an IGA solver [1, 2, 3].

The eDDPM ablation study quantifies the benefit of explicitly representing blind-hole features. Replacing the blind-hole cube label with a generic cube label increased the average Chamfer distance from 0.0292 to 0.2785 and the maximum deviation

from 0.0842 to 0.9126. The automated inference results also expose the remaining computational challenge. For contexts with 1–3, 4–6, and at least 7 active cells, the reported average inference times were 126.97, 901.48, and 1015.77 seconds, while verified-candidate rates decreased from 23% to 8.4% and 0.031%, respectively. These results show that a richer representation improves geometric coverage, but makes context search and validation increasingly important [3].

4. Discussion and conclusion

Taken together, the three studies demonstrate a gradual shift from *learning a mapping* to *learning a generative deformation*. Direct classification remains attractive when the target structure lies within a curated template space because it is efficient and provides an immediate structural prior for segmentation. Diffusion-based modeling is more suitable when the topology or block assembly cannot be covered economically by explicit template enumeration. The extended model further shows that global genus alone is insufficient for local geometric features, motivating primitive-aware contexts and explicit verification.

The current framework is not yet a universal polycube generator. Diffusion-based inference remains more expensive than direct prediction, eDDPM still uses a fixed grid and finite primitive set, and automated context generation depends on temporary volumetric partitioning. Future work should investigate adaptive or hierarchical grids, richer primitive libraries, generation-time topology constraints, and faster sampling. Nevertheless, the published results establish a coherent generative-AI pipeline in which topology-consistent polycube construction supports all-hexahedral meshing, volumetric spline construction, Bézier extraction, and downstream IGA.

Competing interests
The authors declare that they have no competing interests.

Author details
[1] Institute of Artificial Intelligence, School of Information and Intelligent Science, Donghua University, Shanghai, 201620, China. [2] Department of Mechanical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, USA.

References

1. Yu, Y., Fang, Y., Tong, H., Zhang, Y.J.: DL-Polycube: deep learning enhanced generalized polycube method for high-quality hexahedral mesh generation and volumetric spline construction. Engineering with Computers **41**, 2069–2092 (2025). doi:10.1007/s00366-025-02161-9
2. Yu, Y., Fang, Y., Tong, H., Liu, J., Zhang, Y.J.: DDPM-Polycube: a denoising diffusion probabilistic model for polycube-based hexahedral mesh generation and volumetric spline construction. Engineering with Computers **42**, 1 (2026). doi:10.1007/s00366-025-02248-3
3. Yu, Y., Liu, J., Tong, H., Lou, H., Zhang, Y.J.: eDDPM-Polycube: an extended diffusion-based method for hexahedral mesh and volumetric spline construction. Computer Aided Geometric Design **129**, 102605 (2026). doi:10.1016/j.cagd.2026.102605

ABSTRACT

Angle-Based Metric Adaptation for Quadrangulation

Shuang Wu, Yijun Xu and Jin Huang*

Abstract

We present an angle-based metric optimization method for feature-aware quadrangulation. Unlike methods that directly optimize symmetric positive-definite tensors, our formulation uses triangle corner angles as its primary variables. This representation makes discrete Gaussian curvature and feature-line geodesic curvature linear in the unknowns, while positive frame orientation reduces to simple angle bounds. Logarithmic edge scales are introduced to recover a conforming metric and to support sizing control. The resulting problem consists mostly of quadratic or convex terms and is solved robustly with a sparse null-space Newton method. Experiments on feature-rich CAD models demonstrate stable convergence under perturbed initialization, improved frame-field integrability, and fewer flipped triangles in the downstream parameterization. The same framework also supports conformal and isometric regularization and partial singularity specification.

Keywords: quadrangulation; Riemannian metric; angle optimization; frame fields; feature alignment

Background and motivation

Quadrilateral meshes are widely used in geometric modeling and numerical simulation. Field-guided methods typically construct a cross or frame field and then integrate it into a seamless parameterization from which the quad mesh is extracted [1]. Orthonormal cross fields encode orientation compactly, but cannot express local sizing, anisotropy, or shear. More general frames have therefore been represented using complex polynomials [2], higher-order tensors [3], or a pair consisting of a Riemannian metric g and an orthonormal frame R, with $F = g^{-1/2}R$ [4].

We adopt the metric-based representation because it separates element shape from orientation and is particularly suitable for CAD models with dense feature networks. Our main motivation is integrability: a necessary condition for a frame field to be locally integrable is that its underlying metric be locally flat [5]. Direct tensor optimization, however, makes flatness and feature constraints nonlinear. By optimizing triangle angles instead, we can directly control metric curvature, feature alignment, sizing, and positive orientation in a largely quadratic formulation. Figure 1 summarizes the resulting pipeline.

*Correspondence: JinHuang_cs@163.com
Zhejiang University, Hangzhou, China
Full list of author information is available at the end of the article

Angle-based metric optimization

Let the input be a manifold triangle mesh $\mathcal{M} = (V, E, T)$ with optional feature annotations and sizing targets. We optimize its target corner angles $\theta \in \mathbb{R}^{3|T|}$. The angles satisfy two sets of linear constraints: each triangle remains Euclidean, and the Gaussian curvature at every interior vertex is its angle defect,

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_{ti} = \pi, \qquad K_v = 2\pi - \sum_{t \in \mathcal{N}(v)} \theta_{vt}. \tag{1}$$

Two curvature energies form the core objective. Local flatness is necessary for frame-field integrability, but it cannot generally hold everywhere unless cone singularities are known in advance. We therefore smooth the Gaussian-curvature density $k_v = K_v/|v|$ using

$$E_{\text{gaussian}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{|V|^2} \sum_{t \in T} \frac{|t|}{2} \|\nabla k(t)\|^2, \tag{2}$$

where $|v|$, $|t|$, and $|\mathcal{M}|$ denote the vertex area weight, triangle area, and total surface area. A valence-m singularity can be prescribed linearly by $K_v = 2\pi - m\pi/2$.

Feature curves should be geodesics so that they become straight lines in the parameter domain. We treat each feature as an additional boundary. For every incident triangle fan $\mathcal{F}$, the target angle sum $\hat{\alpha}_{\mathcal{F}}$ is chosen

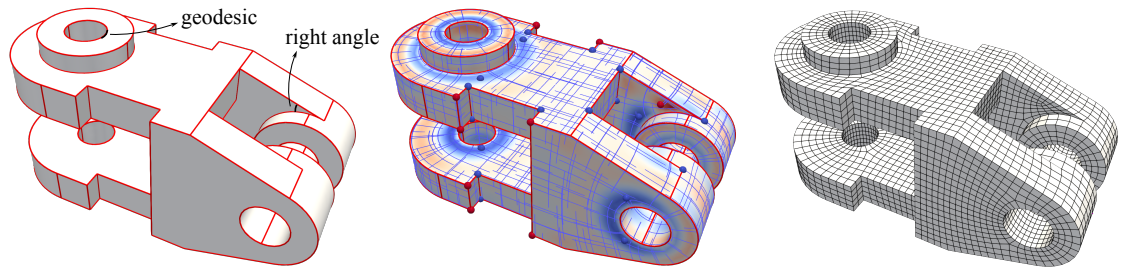


Figure 1 Overview. Sharp features should be geodesics and corner angles should be multiples of 90° under a suitable metric (left). Angle-based metric optimization produces a smooth curvature distribution and an intrinsic cross field (middle), from which an anisotropic quad mesh is extracted (right).

as a positive multiple of $\pi/2$, and we minimize

$$E_{\text{geodesic}} = \frac{1}{N_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \left(\sum_{t \in \mathcal{F}} \theta_{vt} - \hat{\alpha}_{\mathcal{F}} \right)^2 . \tag{3}$$

Both core energies are quadratic because K_v and the fan angle sums are linear in θ.

An optimized angle field alone does not necessarily define a conforming metric: it has no global scale, and neighboring triangles may assign incompatible lengths to their shared edge. We introduce a logarithmic scale u_e on every edge, so that $\ell'_e = \ell_e \exp(u_e)$. Taking logarithms of the sine law gives the residual

$$c_{t,ij} = u_i - u_j - \log \sin \theta_i + \log \sin \theta_j - (\log \ell_j - \log \ell_i), \tag{4}$$

and metric consistency is promoted by

$$E_{\text{conforming}} = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \frac{1}{2} \left(c_{t,ij}^2 + c_{t,jk}^2 + c_{t,ki}^2 \right) . \tag{5}$$

Together with positive angles satisfying Eq. (1), these sine-law relations imply valid triangle inequalities.

The remaining terms regularize or customize the metric. A convex barrier keeps θ in $(0, \pi)$ and preserves positive orientation; sizing terms impose selected target edge lengths; and quadratic isometric and conformal regularizers discourage unnecessary changes in scale and angle. We minimize the weighted sum subject to Eq. (1). Only $E_{\text{conforming}}$ is non-convex, while the main design objectives are quadratic or convex. A sparse null-space basis eliminates the linear constraints, and the reduced problem is solved using Newton and Gauss–Newton steps with line search.

Downstream quadrangulation

The optimized edge lengths define an intrinsic metric. Under this metric we compute a feature-aligned cross field. A seamless Poisson solve then integrates the field into a parameterization, after which the map is quantized and the quad mesh is extracted with libQEx [6]. Using this conventional pipeline isolates the contribution of metric optimization and allows our metric to be combined with other compatible field-generation methods.

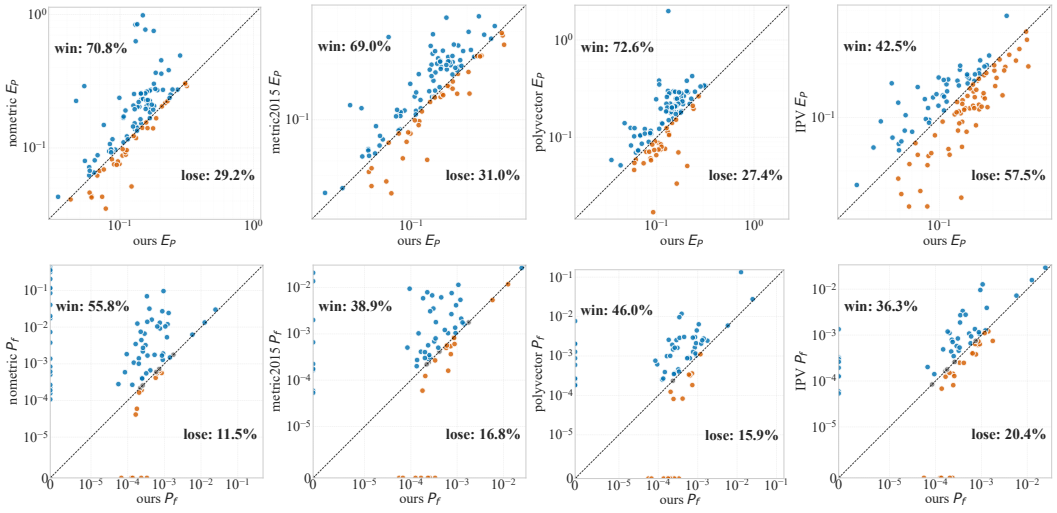
Results

We evaluate robustness, downstream parameterization, and metric customization on a range of feature-rich CAD models. First, despite the non-convex conforming term, the optimization is insensitive to initialization. In a stress test on a planar domain with 20 holes, both the input metric and a strongly perturbed initialization converge to nearly identical solutions. Perturbing vertices by 10% of the bounding-box diagonal and varying the conforming weight from 10^3 to 10^5 changes the final angles by less than 0.1°.

Second, we compare with a uniform-metric ablation, tensor-based metric customization [4], N-PolyVector Fields [2], and Integrable PolyVector Fields (IPV) [7] on 113 MAMBO models [8]. We measure integrability using the normalized Poisson residual

$$E_P = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{t \in T} |t| \| \nabla \phi_t F_t^{-1} - I \|_F , \tag{6}$$

and local injectivity using the proportion of triangles satisfying $\det(\nabla \phi_t) \leq 0$. Figure 2 shows that our method usually lowers the Poisson residual relative to the uniform metric, tensor-based customization, and N-PolyVector. IPV explicitly minimizes curl and therefore achieves the lowest residual, whereas our method



(a) Uniform metric (b) Metric customization (c) N-PolyVector (d) IPV

Figure 2 Comparison on 113 MAMBO models. The top and bottom rows report the Poisson residual and flipped-triangle ratio, respectively. Our method is on the horizontal axis; points above the diagonal favor our method.

produces fewer flipped triangles than all baselines in most cases. This confirms the benefit of optimizing flatness together with positive orientation.

Finally, the optimized edge scales provide direct sizing control. Curvature- adaptive targets concentrate elements near detailed features while maintaining smooth size gradation. Prescribing Gaussian curvature at selected vertices also allows partial control of valence-3 and valence-5 singularities and can resolve otherwise severe global distortion. These examples demonstrate that the same angle-based formulation supports both robust parameterization and practical mesh-design requirements.

Conclusion

We have presented an angle-based method for constructing feature-aware Riemannian metrics for quadrangulation. The representation makes curvature, feature alignment, singularity specification, and positive orientation linear or convex, while auxiliary edge scales restore metric conformity and enable sizing control. The resulting nearly convex optimization is robust in practice and improves the integrability and local injectivity of downstream parameterizations. Its current limitations include non-sparse curvature distributions, soft rather than exact conformity, sensitivity to poor input triangulations, and possible global topological failures. Joint optimization of the metric and singularity layout, as well as extension to volumetric hexahedral meshing, remain promising directions.

Author details
Zhejiang University, Hangzhou, China.

References

1. Bommes, D., Zimmer, H., Kobbelt, L.: Mixed-integer quadrangulation. ACM Trans. Graph. **28**(3) (2009)
2. Diamanti, O., Vaxman, A., Panozzo, D., Sorkine-Hornung, O.: Designing n-polyvector fields with complex polynomials. Comput. Graph. Forum **33**(5), 1–11 (2014)
3. Palmer, D., Bommes, D., Solomon, J.: Algebraic representations for volumetric frame fields. ACM Trans. Graph. **39**(2) (2020)
4. Jiang, T., Fang, X., Huang, J., Bao, H., Tong, Y., Desbrun, M.: Frame field generation through metric customization. ACM Trans. Graph. **34**(4) (2015)
5. Fang, X., Huang, J., Tong, Y., Bao, H.: Metric-driven 3d frame field generation. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **29**(4), 1964–1976 (2023)
6. Ebke, H.-C., Bommes, D., Campen, M., Kobbelt, L.: Qex: robust quad mesh extraction. ACM Trans. Graph. **32**(6) (2013)
7. Diamanti, O., Vaxman, A., Panozzo, D., Sorkine-Hornung, O.: Integrable polyvector fields. ACM Trans. Graph. **34**(4) (2015)
8. Franck Ledoux: MAMBO. `https://gitlab.com/franck.ledoux/mambo`

流向压力梯度作用下基于符号回归的壁面函数建模研究

吴　昊，陈荣钱*，余隆基

（厦门大学航空航天学院，厦门 361102）

摘　要：壁面函数方法能够显著降低数值模拟对边界层网格密度的依赖，但在存在压力梯度的流动问题中表现出较大的局限性。本研究采用基于多种群异步进化算法的符号回归方法进行湍流壁面函数建模，通过引入无量纲压力梯度作为修正项，从流动数据中挖掘考虑压力梯度效应的壁面函数模型。从物理意义、退化性能及泛化能力等多个维度综合评价了模型的可靠性，并与黑箱机器学习方法进行了对比分析。结果表明，所构建的壁面函数模型在各种压力梯度条件下均能获得与数值模拟高度吻合的速度分布，可将第一层网格高度要求放宽两个数量级。与黑箱模型相比，符号回归展现出更优的小样本建模能力和泛化能力，同时有效避免了可信度和可解释性欠缺的问题。

关键词：壁面函数，符号回归，压力梯度，机器学习

0 引　言

计算流体力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）是研究流体运动规律的重要工具，在飞行器设计等领域得到了广泛应用。然而，若想通过 CFD 方法捕捉壁面附近的流动细节，需要在边界层内布置极其细密的网格，这带来了难以承受的计算成本和数值刚性问题。壁面函数方法通过代数公式近似近壁区速度分布，可大幅降低 CFD 对边界层网格密度的依赖，因而在湍流模拟中广泛应用。然而，传统壁面函数模型大多基于零压梯度平板流动建立，当流场存在显著流向压力梯度时，其预测精度明显下降，限制了该方法在复杂流动问题中的应用。

长期以来，研究者们通过理论分析和实验数据不断改进壁面函数，例如 Spalding 提出的统一壁面函数[1]、Nichols 与 Nelson 的压缩性修正[2]，以及 Knopp 等发展的自适应壁面函数等。近年来，随着计算机科学和机器学习的快速发展，亦有学者尝试利用神经网络等黑箱机器学习方法从数据中构建壁模型[3-4]，尽管取得一定进展，但模型可解释性和泛化性仍存在局限。为此，本研究采用符号回归这一白箱建模方法，显式提取包含压力梯度修正的壁面函数表达式并从多维度验证其准确性与可靠性。

1 问题描述

本研究采用基于符号回归的白箱建模方法，利用 PySR 框架实现模型构建。该框架通过多种群异步进化算法，在预定义的运算符和基函数库中自动搜索输入与输出变量间的数学关系，并引入复杂度惩罚项以平衡模型精度与表达式简洁性，最终生成显式解析公式，算法框架如图 1 所示。训练数据集来自二维

凸包流动的高保真 CFD 模拟结果。依据经典壁面函数理论，选取无量纲壁面距离 y^+ 为模型输出，无量纲速度 u^+ 为输入，同时引入无量纲压力梯度参数 p^+ 以表征流向压力梯度对壁面速度分布的影响，将壁面流动表达为由上述三个变量所表征的普适性关系。在与 RANS 方程耦合时，近壁区由所构建的壁面函数建模，外流场通过求解 RANS 方程获得，两者在边界层内交界面处通过摩擦速度建立联系，迭代收敛后即可由壁面函数计算近壁区速度及其他物理量。

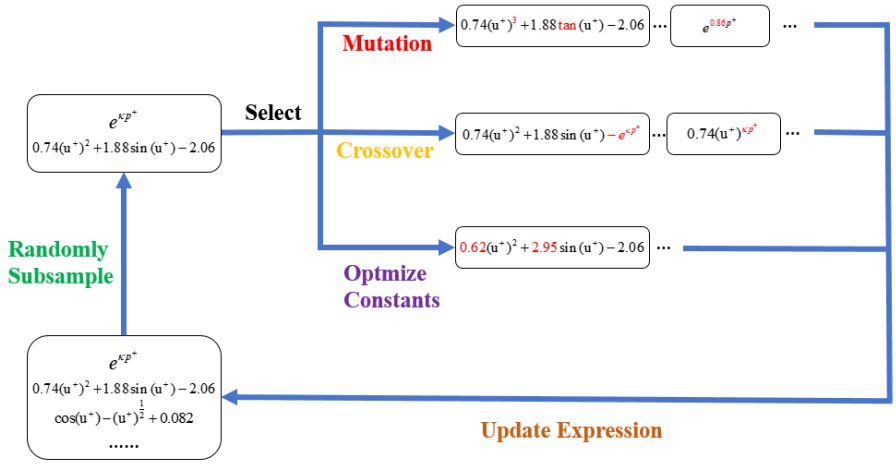


图 1 基于符号回归的壁面函数建模框架

基于符号回归得到的最终壁面函数模型如式（1）所示，研究从多个维度验证了所构建壁面函数模型的性能。零压梯度条件下的亚声速和高超声速平板流动测试表明，部分表达式预测误差与经典 Spalding 壁面函数相当，高超声速条件下甚至略优，说明模型具备一定的可压缩性修正能力。不同雷诺数凸包流动的泛化测试表明，壁面函数预测精度对雷诺数变化不敏感，在较宽的压力梯度范围内均与 CFD 结果吻合良好。NACA0012 翼型和 ONERA M6 机翼跨声速流动验证表明，除激波附近因物理量剧烈变化导致局部偏差外，模型在过渡层和对数律区均能准确捕捉速度分布特征，其误差分布如图 2 所示，误差主要集中于粘性子层。与网络模型相比，符号回归在小样本条件下展现出了更强的泛化能力，并具备良好的可解释性。

$$y^+ = a\left(\frac{u^+}{(\exp(-b(u^+ - C_1)) + (p^+)^{1.014\kappa})^c}\right)^{4\kappa} + C_2 \tag{1}$$

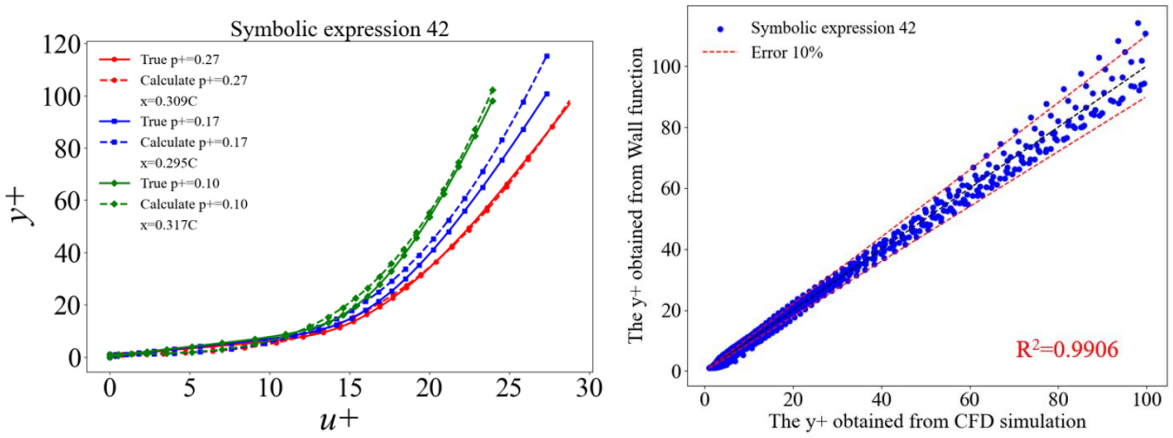


图 2 壁面函数模型的误差分布

2 结　论

本研究提出了一种基于符号回归的湍流壁面函数建模方法，通过引入无量纲压力梯度参数，成功建立了能够表征流向压力梯度影响的壁面函数表达式。该模型在插值测试、零压梯度退化测试以及多种实际流动案例验证中均与 CFD 计算结果吻合良好，表现出较强的泛化能力。所构建的壁面函数可将 CFD 计算中第一层网格高度的要求放宽约两个数量级，显著降低计算资源消耗。

相较于基于神经网络的黑箱建模方法，符号回归在小样本条件下展现出更优的建模能力和更好的跨工况适应性，同时有效避免了传统机器学习模型在可信度和可解释性方面的不足，在复杂流动建模问题中具有更大的应用潜力。未来工作将聚焦于模型精度的进一步提高及其在实际工程算例中的耦合应用，以满足包含复杂物理现象的壁湍流高效高精度模拟需求。

参 考 文 献:

[1] SPALDING D B. "A single formula for the "law of the wall"," Journal of Applied Mechanics, 28(3), (1961)

[2] NICHOLS R H, NELSON C C. "Wall function boundary conditions including heat transfer and compressibility," AIAA Journal, 42(6), (2004)

[3] Z. Zhou, G. He, X. Yang, "Wall model based on neural networks for LES of turbulent flows over periodic hills," Physical Review Fluids. (2021).

[4]. M. Romanelli, S. Beneddine, I. Mary, H. Beaugendre, M. Bergmann, andD. Sipp, "Data-driven wall models for Reynolds Averaged Navier-Stokes simulations," International Journal of Heat and Fluid Flow 99, (2023).

特征保持的流形样条曲面生成

陈富卫，罗钟铉，雷　娜*

（大连理工大学，大连 116620）

摘　要：流形样条将样条曲面的高精度与解析性同处理任意拓扑的能力结合起来，从而避免了传统曲面拼接技术的复杂性。与细分曲面相比，流形样条具有更优越的数学表达，因此是一种稳健高效的几何建模工具。流形样条由此成为几何建模与等几何分析中的有力工具，有效衔接计算机辅助设计与有限元分析。尽管流形样条在任意拓扑曲面的数学定义方面已取得理论成功，现有方法仍难以将其直接转换为标准工业数据格式。为解决这一限制，本文提出一种在任意拓扑四边形网格上构造流形样条曲面的方法。借助极形式，我们在流形样条曲面的局部坐标卡与四边形网格顶点之间建立严格映射。该方法在保持几何特征的同时，实现奇异点周围的光滑连接。进一步地，基于该映射推导所构造流形样条曲面的 NURBS 表示。实验结果表明，所提方法能够高效地将任意拓扑四边形网格转换为高质量流形样条曲面。在具有多样拓扑结构和复杂几何特征的多类模型上的测试验证了该方法的有效性。

关键词：流形样条，极形式，G^1连续，特征保持，NURBS 表示

0 引　言

在几何建模与等几何分析（IGA）领域，建立兼具高数学精度与拓扑灵活性的曲面表示，是衔接计算机辅助设计（CAD）与有限元分析（FEA）的关键。流形样条为这一问题提供了有力方案。它把样条曲面的解析性和高精度与处理任意拓扑的能力相结合，有效避免了传统曲面拼接技术的复杂性。此外，与细分曲面相比，流形样条具有更优越的数学表达，并能缓解非常规点相关问题。因此，流形样条日益成为统一设计与分析流程的稳健工具。尽管流形样条在任意拓扑曲面的数学定义方面取得了理论成功，其工业应用仍受到限制。主要瓶颈在于现有流形样条方法与广泛使用的工业标准数据格式，尤其是非均匀有理 B 样条（NURBS）不兼容。已有构造技术往往产生非标准数学表示，难以直接转换为主流 CAD/CAE 软件所需的格式。先进理论模型与标准工业流程之间的这种脱节，阻碍了流形样条的广泛应用。为克服这一限制，亟需一种既能处理任意拓扑、又符合标准数据表示的构造方法。为此，本文提出一种在任意拓扑四边形网格上构造流形样条曲面的方法。借助极形式[1]，我们在流形样条曲面的局部坐标卡与四边形网格顶点之间建立严格映射，所提方法在准确保持几何特征的同时，实现了奇异点周围的光滑连接。基于所建立的映射，本文给出所构造流形样条曲面的 NURBS 表示，从而保证与标准工业系统兼容。

1 相关工作

在 CAD 与 IGA 中，如何在任意拓扑网格上构造高阶连续参数曲面，仍是一个核心研究问题。按照基本构造逻辑，现有方法大体可分为两类：基于曲面片的方法和基于流形的方法。

基于曲面片的方法通过拼接定义在规则参数域上的多个多项式片来覆盖任意拓扑网格。为保证跨片边界的光滑过渡，特别是在非奇异点（EP）附近，这类方法通常施加复杂的几何连续约束。Catmull--Clark

细分曲面[2]等经典工作有效解决了任意拓扑表示问题，但在奇异点附近往往缺少显式解析表达。为获得完全解析的曲面，研究者提出了多种在奇异点处构造连续曲面片的方法，例如采用退化曲面片[3]，或通过调整控制点施加约束[4][5]。针对非结构化网格中的不规则结构，已有研究对相关样条构造方法及其光滑性处理进行了系统梳理与总结[6]。这些方法在一定程度上解决了光滑性问题，但往往受特定网格布局限制。此外，复杂的拼接约束使构造过程繁琐，难以在保持全局光滑性的同时实现高效局部加密和几何特征保持。

为克服拼接技术的数学复杂性，基于流形的方法引入微分几何中的流形概念。通过定义局部图册与坐标卡，这类方法把样条曲面的定义域从平面扩展到任意拓扑流形。根据构造策略，又可进一步分为基于单位分解的方法和基于仿射图册的方法。在基于单位分解的曲面构造方法中，早期研究开创了基于流形的任意拓扑曲面建模框架，通过采用与控制网格拓扑一致的流形作为参数域，实现了带边界任意拓扑上的连续曲面构造[7]；然而，其构造过程较为复杂，在一定程度上限制了实际应用。随后，相关研究进一步建立了较为完整的数学框架，从理论上论证了任意拓扑网格上构造连续曲面的可行性，但较高的计算代价和非标准的数学表示使其更偏向理论构造，距离工程应用仍存在一定差距[8]。在此基础上，局部坐标卡的构造得到了进一步简化，并通过指数函数混合实现任意阶光滑曲面的生成[9]。然而，由此得到的曲面既不具有多项式形式，也不属于有理分式形式，因而难以在不经过离散逼近的情况下被现有 CAD 系统直接表示、读取和编辑。此后，基于流形的曲面构造又被进一步扩展至带边界模型和具有尖锐特征的几何模型[10][11]。总体而言，这类基于单位分解的方法具有处理任意拓扑和复杂几何特征的能力，但其基函数通常缺乏标准 B 样条的解析形式，也难以与标准结点向量和控制网格建立直接对应关系，因此在与主流 CAD/CAE 几何表示及设计分析流程的集成方面仍存在一定局限。另一类研究从流形样条理论出发，利用全局共形参数化在任意拓扑流形上构造仿射图册，并指出在流形上构造样条曲面可转化为相应仿射图册的构造问题[12]。为进一步简化流形的拓扑与参数化结构，后续工作利用里奇流调整曲面度量，将曲率集中到单个奇异点，从而构造出除该奇异点外局部平坦的仿射图册[13]。然而，这类方法主要建立在三角 B 样条表示之上，其基函数组织形式和控制结构与工业 CAD 系统中广泛采用的张量积 NURBS 表示存在较大差异，因此与现有标准几何表示及交换流程的直接兼容性有限。为进一步引入张量积样条结构，相关研究提出了流形 T 样条，在规则区域能够自然恢复局部张量积参数结构[14]。但对于一般拓扑曲面，受拓扑约束影响，参数方向场不可避免地包含奇异结构，使得全局一致的张量积参数化难以建立；在奇异区域需要采用特殊处理，从而增加了曲面构造及其全局一致表示的复杂性。

因此，已有构造技术面临两难：基于曲面片的方法难以在保证光滑性的同时灵活处理几何特征；现有基于流形的方法则采用与工业 CAD 不兼容的非标准形式（如指数混合或三角样条），或在奇异点处缺少完整定义。针对上述局限，本文提出一种基于极形式的流形样条构造方法。不同于已有工作，本文在保持任

意拓扑适应能力的同时，能够有效保持指定几何特征，打通从流形样条到标准 NURBS 表示的路径。通过在局部坐标卡与四边形网格顶点之间建立严格映射，不仅保证曲面的全局定义和奇异点处的光滑连接，还给出了流形样条曲面的 NURBS 表示，从而衔接了先进几何理论与工业数据标准。

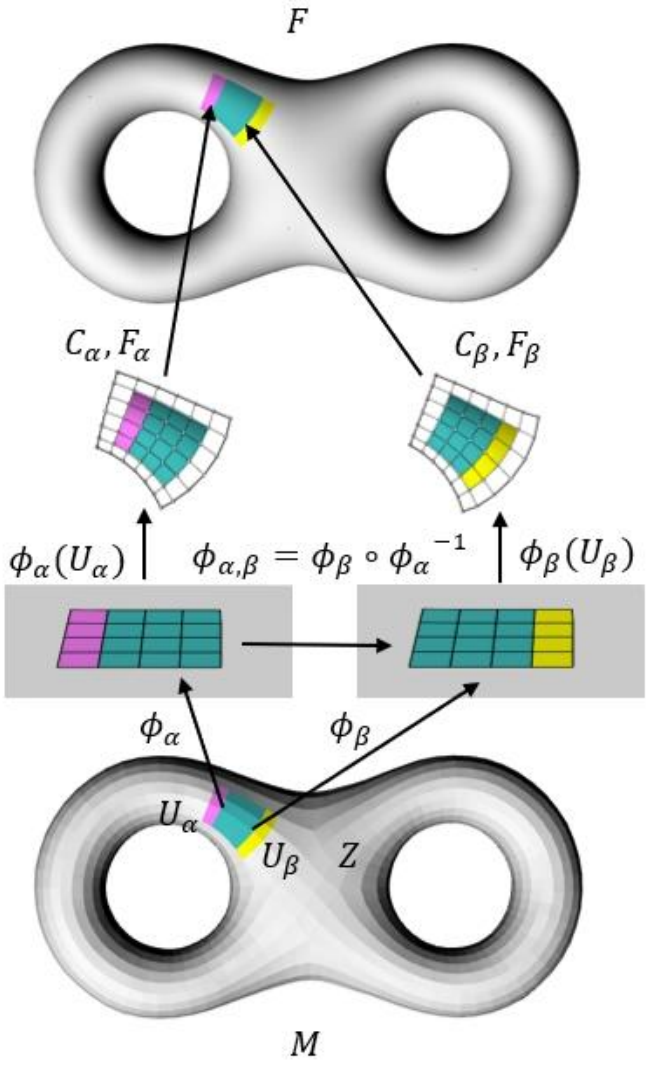


图 1　流形样条、局部坐标卡及其转移映射

2　特征保持的流形样条构造理论

如图 1 所示，k次流形样条是三元组M, C, F，其中M是带图册$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$的定义域流形；$F: M \to \mathbb{R}^3$表示完整样条曲面；$C$是控制点集合，每个控制点$c_\alpha^i$关联一组节点$X_\alpha^i = \{x_\alpha^{ij}, j = 1, \dots, k\}$。对每个坐标卡$(U_\alpha, \phi_\alpha)$，$F$在$U_\alpha$上的限制记为$F_\alpha = F \circ \phi_\alpha^{-1}$，可从$C$中选出控制点子集$C_\alpha$，使$\{\phi_\alpha(U_\alpha), C_\alpha, F_\alpha\}$构成$k$次样条片。$F$的求值与局部坐标卡的选择无关：若$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$，则$F_\alpha = F_\beta \circ \phi_{\alpha\beta}$，其中$\phi_{\alpha\beta}$为坐标卡转移函数。

去除奇异点及其$k-1$邻域后的四边形网格自然在M上诱导图册$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$。四边形网格顶点的$k-1$邻域对应图册中的$U_\alpha$，$\phi_\alpha$是由四边形网格诱导的参数化。参数化方式随$k$的奇偶性而变化，本文仅考

虑k为奇数的情况。四边形网格顶点构成流形样条的控制点集合C，图册中的参数化 ϕ_α为C中每个控制点给出相应节点集$X^i=\{x^{ij},j=1,\dots,k\}$。

F在U_α上的限制F_α是次数为k,k的双多项式曲面，$F_\alpha:A_\alpha\times A_\alpha\to E_\alpha$，其中$A_\alpha$为仿射空间，$E_\alpha$为三维仿射空间。存在多仿射映射$f_\alpha:(A_\alpha)^k\times(A_\alpha)^k\to E_\alpha$，它关于前$k$个自变量和后$k$个自变量分别对称，并对任意$\bar{u}_\alpha,\bar{v}_\alpha\in A_\alpha$满足$F_\alpha(\bar{u}_\alpha,\bar{v}_\alpha)=f_\alpha\left(\underbrace{\bar{u}_\alpha,\dots,\bar{u}_\alpha}_{k},\underbrace{\bar{v}_\alpha,\dots,\bar{v}_\alpha}_{k}\right)$。

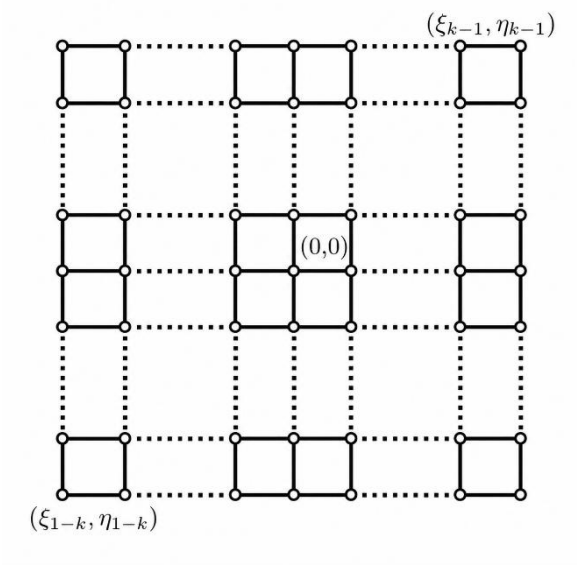


图 2　规则内部点的$k-1$邻域对应的坐标卡

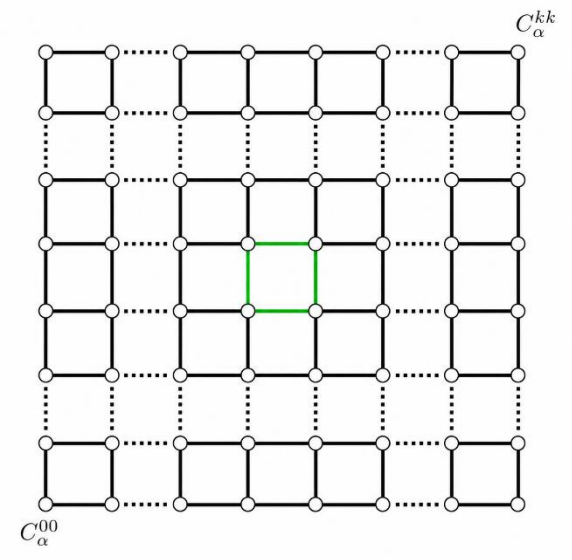


图 3　奇异点$k-1$邻域之外的非特征、非边界面所关联的控制点

F_α的具体构造如下。首先确定ϕ_α。对于不含边界、特征和奇异点的规则内部区域，四边形网格中每个点的$k-1$邻域对应一个坐标卡。把该顶点的参数坐标设为$(\xi_0,\eta_0)=(0,0)$，并沿两个参数方向分别引入严格递增的非均匀节点序列

$$\xi_{1-k}<\cdots<\xi_{-1}<\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{k-1}<\xi_k,$$
$$\eta_{1-k}<\cdots<\eta_{-1}<\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_{k-1}<\eta_k.$$

记相邻节点间隔为$d_r = \xi_{r+1} - \xi_r$，$e_r = \eta_{r+1} - \eta_r$，$r = 1-k, \ldots, k-1$，其中$d_r > 0$、$e_r > 0$。于是图 2 中坐标卡的参数域为

$$\phi_\alpha(U_\alpha) = [\xi_{1-k}, \xi_{k-1}] \times [\eta_{1-k}, \eta_{k-1}],$$

且以中心节点为原点时，四个端点坐标可由节点间隔的累加得到：

$$\xi_{1-k}\& = -\sum_{r=1-k}^{-1} d_r,\ \ \xi_{k-1} = \sum_{r=0}^{k-2} d_r,\ \ \eta_{1-k}\& = -\sum_{r=1-k}^{-1} e_r,\ \ \eta_{k-1} = \sum_{r=0}^{k-2} e_r.$$

在等距节点条件$d_r = e_r = 1$下，两个角点的坐标分别为$(1-k, 1-k)$和$(k-1, k-1)$。

不失一般性，选取规则内部目标网格面的参数域为$[\xi_0, \xi_1] \times [\eta_0, \eta_1]$，即$(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha) \in [\xi_0, \xi_1] \times [\eta_0, \eta_1]$。

设图 3 中绿色线框围成的曲面片是位于奇异点$k-1$邻域之外的非特征、非边界面。与该曲面片关联的控制点数为$k^2 + 2k + 1$。根据前述非均匀参数化，每个控制点C_α^{ij}所关联的节点为$(\xi_{i-k+1}, \ldots, \xi_i; \eta_{j-k+1}, \ldots, \eta_j)$，其中$i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$，即$C_\alpha^{ij} = f_\alpha(\xi_{i-k+1}, \ldots, \xi_i; \eta_{j-k+1}, \ldots, \eta_j)$。于是对任意$\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha$，有：

$$\begin{aligned} F_\alpha(\bar{u}_\alpha, \bar{v}_\alpha) &= f_\alpha\left(\underbrace{\bar{u}_\alpha, \ldots, \bar{u}_\alpha}_{k}; \underbrace{\bar{v}_\alpha, \ldots, \bar{v}_\alpha}_{k}\right) \\ &= \sum_{i,j} b_\alpha^{ij} f_\alpha(\xi_{i-k+1}, \ldots, \xi_i; \eta_{j-k+1}, \ldots, \eta_j) \\ &= \sum_{i,j} b_\alpha^{ij} C_\alpha^{ij}. \end{aligned}$$

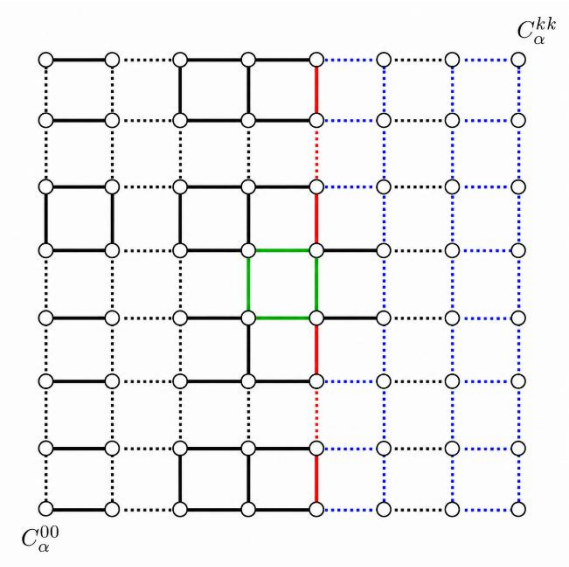


图 4　奇异点$k-1$邻域之外的边界面所关联的控制点

如图 4 中的红色线框为边界边，绿色线框围成的曲面片是位于奇异点$k-1$邻域之外的边界面。此时边界线右侧不存在控制点。尽管与该曲面片关联的控制点数仍为$k^2 + 2k + 1$，其中$\frac{k^2-1}{2}$个控制点实际上由$k+1$个边界点各重复$\frac{k-1}{2}$次得到。

进一步地，根据前述参数化，边界面仍以ξ_1作为重复边界节点。控制点C_α^{ij}所关联的节点为

$$(\xi_{i-k+1},\dots,\xi_0,\ \underbrace{\xi_1,\dots,\xi_1}_{i};\ \eta_{j-k+1},\dots,\eta_j),\ \ i,j\in\{0,1,\dots,k\},$$

即$C_\alpha^{ij}=f_\alpha\left(\xi_{i-k+1},\dots,\xi_0,\underbrace{\xi_1,\dots,\xi_1}_{i};\eta_{j-k+1},\dots,\eta_j\right)$.

因此，对任意$\bar{u}_\alpha,\bar{v}_\alpha$，有：

$$\begin{aligned}F_\alpha(\bar{u}_\alpha,\bar{v}_\alpha)&=f_\alpha\left(\underbrace{\bar{u}_\alpha,\dots,\bar{u}_\alpha}_{k};\underbrace{\bar{v}_\alpha,\dots,\bar{v}_\alpha}_{k}\right)\\&=\sum_{i,j}b_{ij}\,f_\alpha\left(\xi_{i-k+1},\dots,\xi_0,\underbrace{\xi_1,\dots,\xi_1}_{i};\eta_{j-k+1},\dots,\eta_j\right)\\&=\sum_{i,j}b_\alpha^{ij}\,C_\alpha^{ij}.\end{aligned}$$

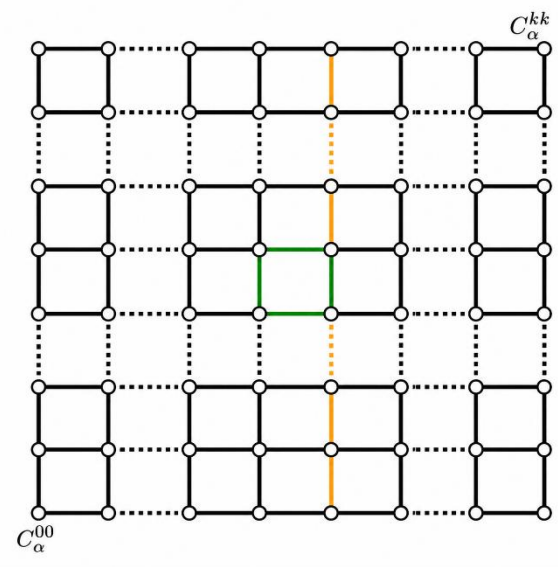


图 5　奇异点$k-1$邻域之外的特征面所关联的控制点

如图 5 中的黄色线框为特征边，绿色线框围成的曲面片是位于奇异点$k-1$邻域之外的特征面。虽然特征线右侧存在控制点，但与该曲面片关联的k^2+2k+1个控制点中，有$\frac{k^2-1}{2}$个实际上由$k+1$个特征点各重复 $\frac{k-1}{2}$ 次得到。因此，F_α 在特征面上的表示与其在边界面上的表示完全相同。

至此，根据极形式的性质[1]，奇异点$k-1$邻域之外的非边界、非特征流形样条曲面可达到 C^{k-1}连续，而边界和特征流形样条曲面可达到C^0连续。对奇异点$k-1$邻域内的曲面片，首先将其转换为相同的极形式表示。如图 6 所示，设绿色线框围成的曲面片位于奇异点$k-1$邻域内。在每个曲面片中构造k^2+2k+1个新控制点A_α^{ij}，其中$i,j\in\{0,\dots,k\}$。目标曲面片在两个参数方向的端点分别记为(ξ_0,ξ_1)和 (η_0,η_1)，对应的极形式表示为

$$\left(\underbrace{\xi_0,\dots,\xi_0}_{k-i},\underbrace{\xi_1,\dots,\xi_1}_{i};\underbrace{\eta_0,\dots,\eta_0}_{k-j},\underbrace{\eta_1,\dots,\eta_1}_{j}\right),$$

即

$$A_\alpha^{ij}=f_\alpha\left(\underbrace{\xi_0,\dots,\xi_0}_{k-i},\underbrace{\xi_1,\dots,\xi_1}_{i};\underbrace{\eta_0,\dots,\eta_0}_{k-j},\underbrace{\eta_1,\dots,\eta_1}_{j}\right).$$

此时，对任意$\bar{u}_\alpha,\bar{v}_\alpha$，有：

$$\begin{aligned}F_\alpha(\bar{u}_\alpha,\bar{v}_\alpha)&=f_\alpha\left(\underbrace{\bar{u}_\alpha,\dots,\bar{u}_\alpha}_{k};\underbrace{\bar{v}_\alpha,\dots,\bar{v}_\alpha}_{k}\right)\\&=\sum_{i,j}a_{ij}\,f_\alpha\left(\underbrace{\xi_0,\dots,\xi_0}_{k-i},\underbrace{\xi_1,\dots,\xi_1}_{i};\underbrace{\eta_0,\dots,\eta_0}_{k-j},\underbrace{\eta_1,\dots,\eta_1}_{j}\right)\\&=\sum_{i,j}a_\alpha^{ij}\,A_\alpha^{ij}.\end{aligned}$$

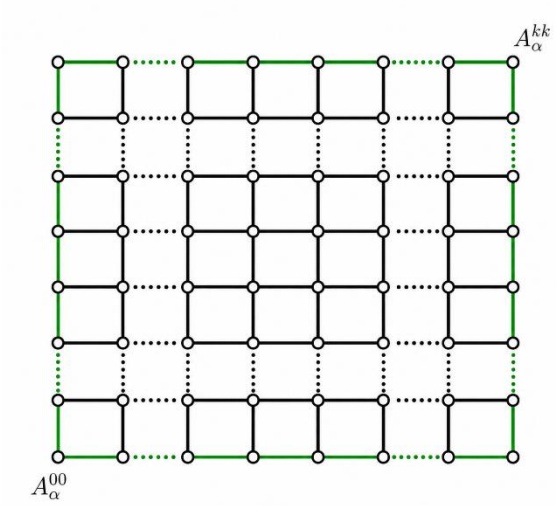
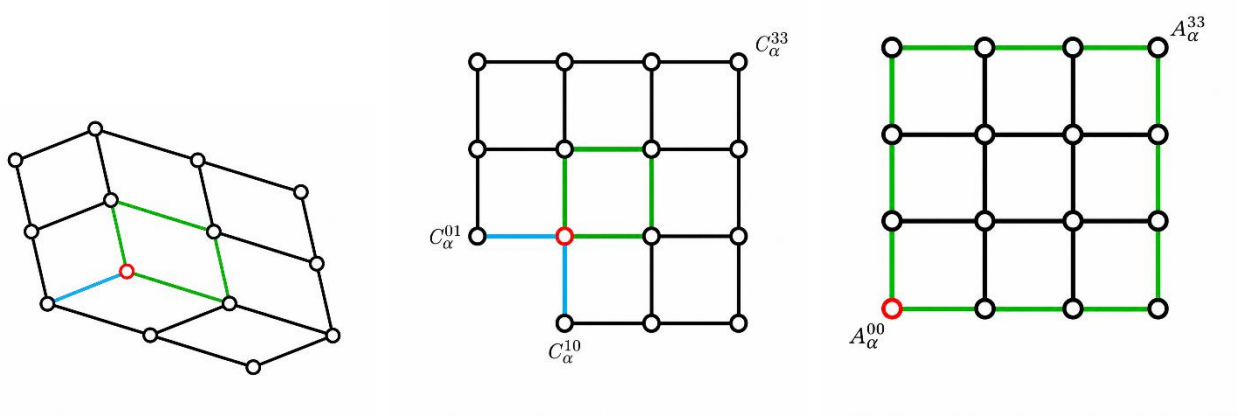


图 6　奇异点$k-1$邻域内曲面片中的新控制点A_α^{ij}



(a)　奇异点 1-邻域内的一个曲面片 (b) 奇异点 1-邻域内曲面片所关联的控制点 (c) 奇异点 1-邻域内曲面片中的新控制点

图 7　奇异点 1-邻域内曲面片及控制点示意图（红色空心点为奇异点）

下面建立新控制点A_α^{ij}与C_α^{ij}之间的关系。为便于讨论，令$k=3$。如图 7(a)所示，红色点为奇异点，绿色线框围成的曲面片位于奇异点 1-邻域之外、2-邻域之内，则有：$C_\alpha^{ij}=f_\alpha\left(\xi_{i-2},\dots,\xi_i;\eta_{j-2},\dots,\eta_j\right),\quad i,j\in\{0,1,2,3\}$。根据极形式的性质，可得到 A_α^{ij}（图 7(c)）与 C_α^{ij} （图 7(b)）之间的关系。对不含边界、特征和奇异点的规则局部区域，非均匀节点间隔下的统一关系见附录 A。对于 A_α^{00}，取奇异点 1-邻域内各曲面片的 $A_{\alpha s}^{11}$（$s=0,\dots,n-1$）的平均值，即：$A_\alpha^{00}=\frac{1}{n}\sum_s^n A_{\alpha s}^{11}$,其中$n$是与奇异点相邻的曲面片数，也称为奇异点的价数（或度数）。上述关系允许单个曲面片包含多个奇异点。

至此确定了F在每个坐标卡(U_α,ϕ_α)上的限制F_α。但此时奇异点 1-邻域内各曲面片之间只能达到G^0连续。由于艺术设计和工业应用均不能接受仅有G^0连续，因此需要调整奇异点 1-邻域内曲面片的控制点，使片间至少达到G^1连续。设N个曲面片$F^{(0)},F^{(1)},\dots,F^{(N-1)}$ 按逆时针方向围绕奇异点V_0排列（$N\neq4$）。第i个曲面片的局部参数域记为$\left[\xi_0^{(i)},\xi_1^{(i)}\right]\times\left[\eta_0^{(i)},\eta_1^{(i)}\right]$，并令

$$a_i=\xi_1^{(i)}-\xi_0^{(i)}=d_0^{(i)},\qquad b_i=\eta_1^{(i+1)}-\eta_0^{(i+1)}=e_0^{(i+1)},$$

分别表示公共边两侧的跨边节点间隔。相邻曲面片$F^{(i)}$与$F^{(i+1)}$ 共享一条从V_0出发的公共边界，其沿边节点间隔为

$$h_i=\eta_1^{(i)}-\eta_0^{(i)}\ =\xi_1^{(i+1)}-\xi_0^{(i+1)}>0.$$

以$s\in[0,1]$表示公共边的归一化参数，记$t_i(s)=\eta_0^{(i)}+h_is$、$\tilde{t}_i(s)=\xi_0^{(i+1)}+h_is$，则

$$\begin{aligned}E_i(s)&=F^{(i)}\left(\xi_0^{(i)},t_i(s)\right)\\&=F^{(i+1)}\left(\tilde{t}_i(s),\eta_0^{(i+1)}\right),\qquad E_i(0)=V_0,\end{aligned}$$

为在曲面片环内实现全局G^1连续，任意两个相邻曲面片必须沿公共边界处处共享切平面。在实际非均匀参数坐标下，两侧跨边导数与公共边切向导数满足

$$F_u^{(i)}\left(\xi_0^{(i)},t_i(s)\right)+F_v^{(i+1)}\left(\tilde{t}_i(s),\eta_0^{(i+1)}\right)=\beta_i(s)\frac{1}{h_i}E'_i(s),\qquad s\in[0,1],\tag{1}$$

其中标量扭转函数$\beta_i(s)$控制切平面沿边界的倾斜速率，$E'_i(s)/h_i$是关于实际沿边参数的切向导数。由于这些曲面片共享中心顶点V_0，上述局部约束不仅沿边界成立，还在$s=0$处相互耦合，形成全局耦合代数系统。在公共顶点$s=0$处，对公式(1)关于实际沿边参数求导并应用乘积法则。令

$$\boldsymbol{\Theta}_i^-=F_{uv}^{(i)}\left(\xi_0^{(i)},\eta_0^{(i)}\right),\qquad \boldsymbol{\Theta}_i^+=F_{uv}^{(i+1)}\left(\xi_0^{(i+1)},\eta_0^{(i+1)}\right),$$

则非均匀节点间隔下的顶点扭曲关系为

$$\boldsymbol{\Theta}_i^-+\boldsymbol{\Theta}_i^+=\frac{\beta_i'(0)}{h_i^2}E_i'(0)+\frac{\beta_i(0)}{h_i^2}E_i''(0).$$

这里撇号均表示对归一化参数s求导；因而式中h_i^{-2}同时计入一阶切向导数和外层求导的参数尺度。把等式右端由边界曲线形状决定的已知向量记为$\mathbf{R}_i$。进一步令

$$\rho_i^- = \frac{h_i}{a_i}, \qquad \rho_i^+ = \frac{h_i}{b_i},$$

则采用控制网格中的未缩放扭曲向量$\hat{\mathbf{T}}_i$表示时，环绕奇异点的顶点封闭系统写为

$$\rho_i^- \hat{\mathbf{T}}_i + \beta_i(0)\rho_i^+ \hat{\mathbf{T}}_{i+1} = \mathbf{R}_i, \qquad i = 0, \dots, N-1. \tag{2}$$

为保证一阶边界切向量在节点间隔归一化后共面且对称分布，应对归一化扭转函数施加 $\hat{\beta}_i(0) = 2\cos(2\pi/N)$。由公式(2)中两个扭曲向量的尺度可得，实际参数坐标中的端点系数为

$$\beta_i(0) = \frac{\rho_i^-}{\rho_i^+}\hat{\beta}_i(0) = \frac{b_i}{a_i}\, 2\cos\frac{2\pi}{N},$$

因此，各边的端点系数取决于其局部节点跨度。β_0和β_1分别按公共边两个端点处的价数及相应跨度比确定。当$a_i = b_i = h_i$时，有$\rho_i^- = \rho_i^+ = 1$，对应单位跨度比情形。在复杂非结构网格中，公共边界$E_i(s)$的两个端点（$s = 0$ 与 $s = 1$）常连接不同的奇异顶点。此时若尝试用标准双三次曲面片闭合网格，会导致称为“顶点封闭问题”（或双重封闭问题）的代数超定危机：

一个双三次曲面片有$4 \times 4 = 16$个控制点，其中只有 4 个内部控制点（$P_{1,1}, P_{2,1}, P_{1,2}, P_{2,2}$）可在不改变边界形状的前提下自由调节扭曲向量。在三维空间中，这只提供$4 \times 3 = 12$个标量自由度；而曲面片的 4 条边都可能需要在两端奇异顶点处满足上述“顶点封闭”循环方程。这会产生$4 \times 2 = 8$个独立向量方程，即 $8 \times 3 = 24$个标量代数约束。由于$12 \ll 24$，双三次曲面片没有足够的内部控制点同时解决四个角点引起的非对称扭曲向量冲突。强行求解该超定系统会导致曲面内部畸变和法向跳变，彻底破坏G^1连续性。为切断奇异点之间的代数耦合，必须把多项式次数提升为双五次。升阶的核心目的不是盲目追求更高阶光滑性，而是获得实现扭曲向量解耦所需的最小内部自由度空间。在双五次构型下，跨边导数关于公共边参数s为 5 次多项式，边界切向导数为 4 次多项式。为匹配G^1方程(1)两侧的次数，标量函数取为$\beta_i(s) = (1-s)\beta_0 + s\beta_1$。记$\mathbf{U}_j = \mathbf{P}_{1,j}^{(i)} - \mathbf{B}_j$、$\mathbf{W}_j = \mathbf{P}_{j,1}^{(i+1)} - \mathbf{B}_j$和$\mathbf{T}_k = \mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_k$。由于双五次曲面在跨边方向的导数分别含因子$5/a_i$和$5/b_i$，而公共边导数含因子$5/h_i$，比较 Bernstein 系数后得到

$$\rho_i^- \boldsymbol{U}_0 + \rho_i^+ \boldsymbol{W}_0 = \beta_0 \boldsymbol{T}_0, \tag{3}$$

$$\rho_i^- \mathbf{U}_1 + \rho_i^+ \mathbf{W}_1 = \frac{4}{5}\beta_0 \mathbf{T}_1 + \frac{1}{5}\beta_1 \mathbf{T}_0, \tag{4}$$

$$\rho_i^- \mathbf{U}_2 + \rho_i^+ \mathbf{W}_2 = \frac{3}{5}\beta_0 \mathbf{T}_2 + \frac{2}{5}\beta_1 \mathbf{T}_1, \tag{5}$$

$$\rho_i^- \mathbf{U}_3 + \rho_i^+ \mathbf{W}_3 = \frac{2}{5}\beta_0 \mathbf{T}_3 + \frac{3}{5}\beta_1 \mathbf{T}_2, \tag{6}$$

$$\rho_i^- \mathbf{U}_4 + \rho_i^+ \mathbf{W}_4 = \frac{1}{5}\beta_0 \mathbf{T}_4 + \frac{4}{5}\beta_1 \mathbf{T}_3, \tag{7}$$

$$\rho_i^- \mathbf{U}_5 + \rho_i^+ \mathbf{W}_5 = \beta_1 \mathbf{T}_4, \tag{8}$$

其中$\mathbf{B}_j = \mathbf{P}_{0,j}^{(i)} = \mathbf{P}_{j,0}^{(i+1)}$ $(j = 0, \dots, 5)$为公共边界控制点。式(3)--(8) 的右端系数由一次函数与四次边界导数的 Bernstein 乘积确定，依次包含 $1/5, \dots, 4/5$；节点跨度的影响体现在左端的 ρ_i^- 和ρ_i^+中。在等距节

点条件$a_i = b_i = h_i$下，两个跨度比均为1。

本节建立的四边形网格流形样条构造理论为复杂曲面的表示提供了稳健数学基础。借助样条的极形式，本文定义了局部图册$\mathcal{A}$，使样条求值F_α能够在不同网格区域之间映射一致。本文指出把多项式次数提升为双五次（$\langle 5,5 \rangle$）后，可获得解耦扭曲向量所需的内部自由度，并通过跨边界切向量的对称构型满足全局 G^1 连续要求。在流形样条的数学存在性与连续性得到保证后，下一节给出了整个算法流程的实现以及在多种复杂拓扑模型上的数值测试结果。

算法 1 保特征的 G¹ 流形样条重建

输入：任意四边形网格$M = (V, E, F)$

输出：.igs 格式的 NURBS 曲面表示

初始化约束矩阵$H_{G^1} \leftarrow \emptyset$ 、$H_{C^0} \leftarrow \emptyset$

在M上标记边界边E_{bnd}、特征线E_{feat}和奇异点V_{ext}

令$E_{ext} = \{e \in E \mid e \cap V_{ext} \neq \emptyset\}$

遍历 每个面 $f \in F$

  为f建立局部坐标卡(U_α, ϕ_α)

  根据拓扑构型（图 3--7）提取初始双三次控制点C^{ij}

  在规则区域利用极形式及局部节点间隔计算A^{ij}（附录 A）

  升阶为双五次，得到控制点变量$\hat{A}_f^{ij}$（附录 B）

结束 遍历

遍历 每条至少一个端点为奇异点的非特征内部边$e \in E_{ext} \setminus (E_{bnd} \cup E_{feat})$

  建立线性G^1连续约束（公式(3)--(8)）并追加到H_{G^1}

结束 遍历

遍历 每条边$e \in E_{feat} \cup E_{bnd}$

  建立C^0位置约束并追加到H_{C^0}

结束 遍历

为每个数据拟合顶点$v \in V$分配局部参数(u, v)

构造目标函数$E(\mathbf{P}) = E_{dist}(\mathbf{P}) + \lambda E_{thin_plate}(\mathbf{P})$

求解$\min_{\mathbf{P}} E(\mathbf{P})$，满足$H_{G^1}\mathbf{P} = 0$且$H_{C^0}\mathbf{P} = 0$

在M上追踪摩托车图，将网格划分为矩形宏区域

把优化后的双五次曲面片组装为标准 NURBS 格式

返回 .igs 文件

3 算法与实现

上一节详细讨论了四边形网格上流形样条的构造理论，说明如何利用极形式和双五次多项式的内部自由度克服奇异点处的“顶点封闭问题”，从而为全局G^1连续提供理论保证。但要把这一理论框架转化为稳健的几何建模工具，还必须解决若干计算与工程问题，包括从复杂离散网格中提取拓扑特征、基于能量优化的全局形状逼近，以及与现代工业 CAD 系统的数据格式兼容。

为此，本节给出所提理论的数值与算法实现，并构建端到端流形样条重建流程。该流程可自动对齐边

界与特征线，实现特征保持重建；同时引入薄板能量[15]建立约束全局拟合模型，在严格满足混合G^1与 C^0 边界约束的同时最大化曲面的几何保真度。进一步地，为衔接复杂流形拓扑与工业标准，本文引入摩托车图技术[16]，将流形样条无缝转换为标准 NURBS 曲面片（.igs 格式）。该流形样条曲面重建系统的核心逻辑见算法 1。

算法预处理阶段需要自动提取网格的拓扑边界和几何特征。开放边界可由半边数据结构直接识别，即没有配对半边的边。对内部几何特征线，采用简单高效的二面角阈值法自动标记。具体而言，对任意内部公共边e，设其相邻四边形面为f_1, f_2，单位面法向分别为$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$，计算两法向夹角$\theta = \arccos(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)$。若 θ 超过用户给定阈值$\theta_{threshold}$（工业 CAD 模型通常取 40°--60°），则认为该边存在显著法向不连续并将其标为特征线。式(3)--(8) 的线性G^1约束仅施加于至少一个端点为奇异点且不属于$E_{feat} \cup E_{bnd}$的内部边；其余规则内部边的连续性由局部样条参数化保证，无需重复加入该约束。对特征线仅施加C^0位置重合约束。该显式阈值标记策略使所得流形样条在大部分区域保持全局光滑，同时高保真地保留原网格的尖锐折痕。

为实现全局拟合，把所有双五次控制点$\hat{A}^{ij}$展平为全局状态向量$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3|\hat{A}|}$，其中$|\hat{A}|$为控制点总数。目标函数由数据拟合项和薄板光顺能量项组成：

$$E(\mathbf{P}) = E_{dist}(\mathbf{P}) + \lambda E_{thin_plate}(\mathbf{P}), \tag{9}$$

$$E_{dist}(\mathbf{P}) = \sum_{v \in V} \|F(u, v; \mathbf{P}) - \mathbf{v}\|^2, \tag{10}$$

$$E_{thin_plate}(\mathbf{P}) = \iint (F_{uu}^2 + 2F_{uv}^2 + F_{vv}^2)\, dudv. \tag{11}$$

将其转换为二次矩阵形式：

$$E(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}^T\mathbf{Q}\mathbf{P} - \mathbf{b}^T\mathbf{P}, \tag{12}$$

其中$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{dist} + \lambda\mathbf{Q}_{thin}$为对称半正定矩阵。$\mathbf{Q}_{dist}$由网格顶点（采样点）相应参数坐标$(u, v)$处的基函数值构造；$\mathbf{Q}_{thin}$通过积分双五次基函数的二阶偏导得到，用于离散近似式(11)。同时，把步骤 3 中的G^1和 C^0约束合并为线性系统$\mathbf{H}\mathbf{P} = \mathbf{c}$，其中$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{G^1} \\ \mathbf{H}_{C^0}\end{bmatrix}$是高度稀疏的约束矩阵。由于$G^1$连续是必须严格满足的硬约束，引入拉格朗日乘子向量$\boldsymbol{\mu}$，把约束优化问题转化为求解相应的 Karush--Kuhn--Tucker（KKT）系统：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P} \\ \boldsymbol{\mu}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}\end{bmatrix}.$$

左侧大型分块矩阵对称且高度稀疏。在 C++ 实现中可使用 Eigen 库的稀疏矩阵模块构造双精度稀疏矩阵，并调用直接稀疏求解器，从而高效同步求得全局控制点$\mathbf{P}$和乘子$\boldsymbol{\mu}$。更新后的控制点直接构成逼近原网格且全局G^1连续的流形样条。

完成全局控制点优化后，虽然在数学上得到了全局G^1连续的高阶流形样条曲面，现代工业 CAD 软件（例如使用.igs 或.step 格式的系统）通常不接受内部含非常规点的单一曲面，而要求标准张量积 NURBS 曲面片。为衔接复杂拓扑与标准 CAD 格式，需要把整个网格划分为若干内部完全规则、即不含非常规点的

矩形子域。摩托车图算法正是实现该宏观四边形分区的高效拓扑工具。算法把奇异点、边界角点和特征线交点作为“源”。在每个源处，沿每条相连网格边生成一个追踪粒子（即“摩托车”）。在半边数据结构中，每个摩托车绑定一个初始半边指针并赋予恒定“行驶速度”。所有摩托车在四边形网格上以均匀速度同步前进。对纯四边形网格，“前进”严格定义为穿过当前面到达其对边。摩托车图的核心机制是由相交触发终止。当摩托车在行进中遇到以下三种情况之一时即停止（发生“碰撞”）：

越界：到达网格的开放边界；

障碍碰撞：直接遇到另一个非常规点；

轨迹相交：撞上另一摩托车留下的轨迹或自身轨迹。由于所有摩托车同步更新，最先到达某条边的摩托车留下实体轨迹，后到者停止；若同时到达，则按预定义索引优先级打破平局。

当所有摩托车停止后，所得轨迹网络（即摩托车图）把原复杂四边形网格精确划分为一组互不相交的矩形参数子域。每个子域内部只包含规则四价顶点。同一矩形子域内的所有双五次曲面片按照其u--v 参数方向排列并拼接。由于片间连续性已在上一节的全局拟合中得到保证，因此可无缝合并为一个大型标准 NURBS 曲面片。最后，把这些独立 NURBS 曲面片连同控制点网格和结点向量打包写入 IGES（.igs）文件。

为验证最终组装 NURBS 曲面的连续性，本文沿非特征公共边内部取样，以相邻曲面片对应点之间、经输入网格包围盒对角线归一化的距离衡量位置连续性，并在统一法向方向后统计法向夹角。特征边仅要求 C^0 位置连续，其法向不连续不计入 G^1 统计；开放边界不参与片间连续性评价。

4 结果分析

将四边形网格拟合为 NURBS 曲面时，输入数据质量决定实验结果的上限。本节实验所采用的四边形网格数据来源于已有研究所提供的数据集[17]。该数据集兼具丰富性与可靠性，为验证流形样条拟合算法的稳健性提供了优秀基准。表 1 汇总了具有代表性四边形网格模型的几何、拓扑、分区和误差统计。为消除模型尺度差异的影响，记输入网格轴对齐包围盒的对角线长度为D_{bbox}，并采用无量纲误差$e_{\mathrm{norm}} = e/D_{\mathrm{bbox}}$进行比较，其中$e$为点到重建曲面的几何距离。各模型的$D_{\mathrm{bbox}}$由对应的顶点坐标计算得到，其范围为 1.1271--168.9667。测试算例覆盖较宽的几何复杂度与拓扑跨度：网格规模从 2745 个面（异形齿轮，图 8(a3)）增加到 35927 个面（复杂多孔体，图 8(a5)），拓扑亏格g从 0 增加到 133，单个模型最多包含 2379 个奇异点和 8741 个特征点。对于光滑有机形体、具有密集刚性特征线的工业零件，以及由高亏格和大量奇异点构成的复杂多连通模型，所提G^1连续约束求解器和基于摩托车图的流形重构机制均能稳定完成计算，测试过程中未出现线性系统失效或拓扑撕裂。

表 1　不同模型的拓扑复杂度、NURBS 分片数与几何误差

模型名称	网格属性					分区结果	几何误差	
	面数 (F)	亏格 (g)	奇异点 (I)	特征点 (C)	包围盒对角线	NURBS 片数	最大值 (L^{∞})	平均值 (L^{1})
甲虫	9,625	0	34	42	168.9667	135	0.002779	0.000118
狮身人面像	12,252	0	52	72	1.1271	108	0.004358	0.000271
异形齿轮	2,745	0	56	562	59.0698	88	0.003151	0.000382
多孔板	13,130	9	238	2,440	112.6637	537	0.003465	0.000096
复杂多孔体	35,927	133	2,379	8,741	69.9266	5,710	0.011210	0.000715

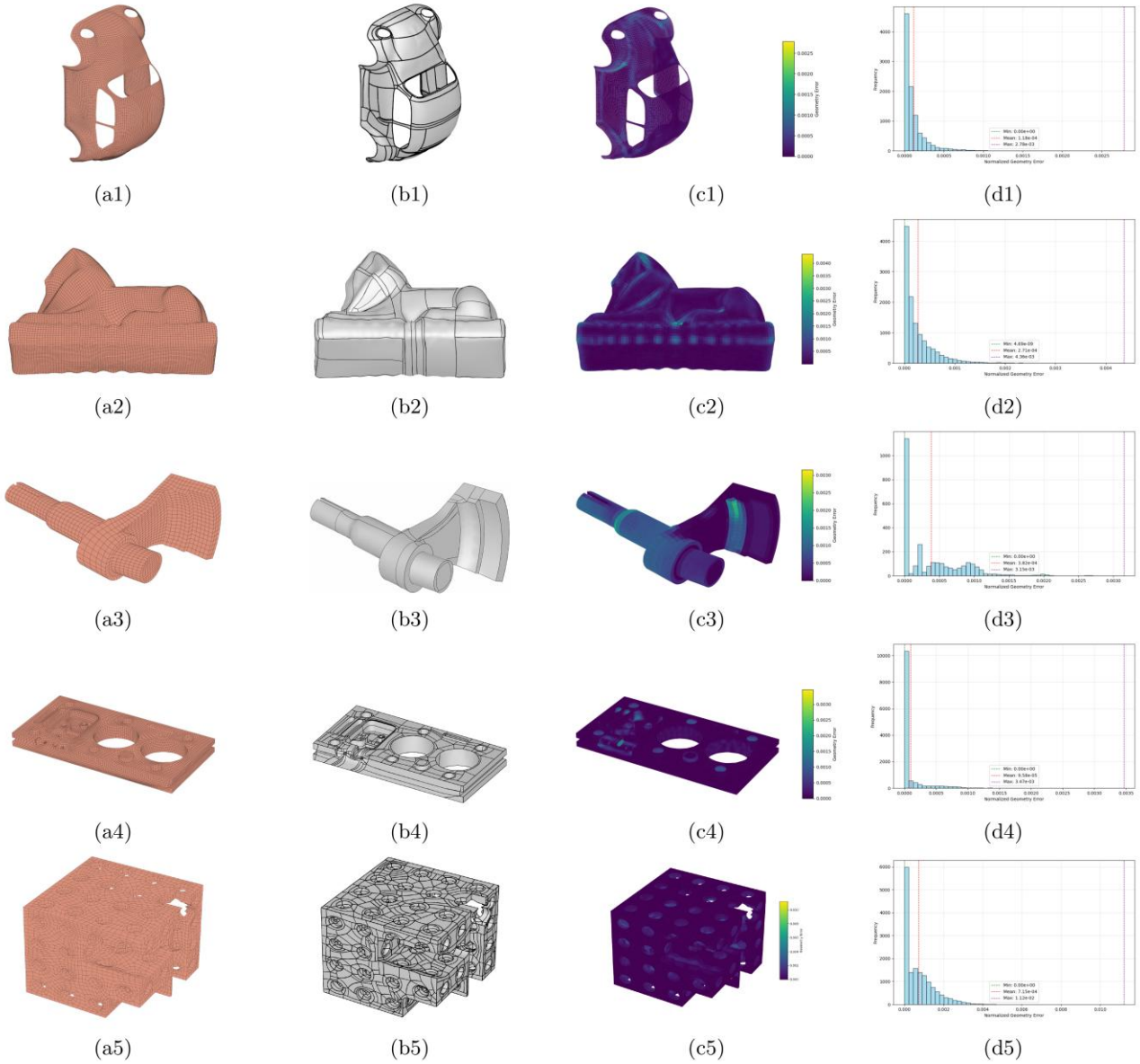


图 8　不同模型的几何重建与归一化结果对比。（a）初始四边形网格；（b）NURBS 曲面；（c）归一化几何误差三维可视化；（d）归一化几何误差分布

从归一化几何误差看，狮身人面像（图 8(c2--d2)）的平均误差和最大误差分别为 0.000271 和 0.004358，说明该方法能够高精度重建光滑自由形曲面；异形齿轮（图 8(a3--d3)）虽仅含 2745 个面却包含 562 个特征点，其平均误差和最大误差仍分别控制在 0.000382 和 0.003151，表明特征附近未产生严重的局部振荡。对于多孔板（$g = 9, I = 238$，图 8(a4--d4)）和复杂多孔体（$g = 133, I = 2379$，图 8(a5--d5)），两者的平均

误差分别为 0.000096 和 0.000715，最大误差分别为 0.003465 和 0.011210。结合图 8(c1--d5) 可见，较大误差主要局限于少量高曲率或复杂特征区域，而大部分曲面区域的归一化误差保持在较低水平，说明该方法在多连通域与密集奇异点网络中仍能避免全局映射失效和严重的局部曲面畸变。

表 1 中的 NURBS 曲面片数量进一步反映了分区策略对不同模型复杂度的适应能力：甲虫、狮身人面像和异形齿轮分别由 9625、12252 和 2745 个网格面重构为 135、108 和 88 个 NURBS 曲面片（图 8(b1--b3)），多孔板和复杂多孔体则分别生成 537 和 5710 个曲面片（图 8(b4--b5)）。这些结果表明，摩托车图能够根据奇异点分布和拓扑复杂度形成闭合的分区线与有效的四边形参数域，所提方法可在不同类型的复杂模型上稳定生成误差有界、拓扑有效且适于标准 CAD 系统处理的 NURBS 曲面。

表 2 给出了最终组装 NURBS 曲面的连续性检测结果。非特征公共边最大归一化位置误差为 8.80×10^{-17} 至 3.61×10^{-16}，处于双精度浮点运算的舍入误差量级，说明组装后的相邻曲面片共享同一条边界曲线。法向夹角的单位均为度（°）。光滑公共边内部的平均法向夹角为 1.83×10^{-7} 至 7.99×10^{-4}，最大法向夹角不超过 4.47×10^{-2}。其中最大值出现在甲虫模型的局部高曲率接缝处，而该模型的平均法向夹角仅为 7.99×10^{-4}；狮身人面像模型的平均值和最大值分别为 2.09×10^{-4} 和 3.18×10^{-2}。这些数值表明，法向偏差仅表现为局部浮点与离散求值误差，没有形成系统性的切平面跳变，验证了从流形样条优化、摩托车图分区到标准 NURBS 组装后的 C^0 位置连续性和非特征接缝 G^1 连续性。

表 2 最终组装 NURBS 曲面的连续性检测结果

模型	公共边最大归一化位置误差	法向夹角平均值 (°)	法向夹角最大值 (°)
甲虫	1.74×10^{-16}	0.000799266	0.04466468
狮身人面像	1.58×10^{-16}	0.000208623	0.03180232
异形齿轮	3.61×10^{-16}	0.000000183	0.00000148
多孔板	1.41×10^{-16}	0.000003850	0.00041181
复杂多孔体	8.80×10^{-17}	0.000125426	0.00461988

5 结　论

本文提出了完整稳健的四边形网格到保特征的流形样条曲面重建流程，可从任意拓扑四边形网格直接构造高质量流形样条曲面。该方法在数学上衔接先进流形样条理论与工业数据标准，把高度复杂的非结构离散几何转换为标准张量积 NURBS 表示。通过极形式与双五次升阶，在不引起严重局部曲面畸变的情况下，保证密集奇异点周围严格的G^1几何连续。阈值特征提取机制与摩托车图分区算法相结合，使尖锐几何特征与光滑自由形区域都能得到保持，并无缝输出为通用 CAD 格式。从基本零亏格模型到含数千奇异点的高度复杂结构，大量跨极端拓扑跨度的数据实验表明，该方法具有数值稳定性、可扩展性和工业应用能力。对最终组装 NURBS 曲面的连续性检测进一步表明，非特征公共边两侧的切平面保持一致，特征边处预期

的法向不连续得到保留，验证了完整重建流程对光滑性与尖锐特征的协调保持能力。

然而，尽管全局拟合已获得较高总体保真度，在流形结构上集成层次 B 样条或 T 样条以支持自适应局部加密，可显著降低含局部高频几何细节模型的数据规模。其次，需要进一步提高流程对原始扫描直接产生的高度缺陷、非结构网格的处理稳健性，这类网格通常含拓扑噪声或病态网格面。最后，把生成的水密 NURBS 曲面直接接入等几何分析求解器，将是后续工作的重点，以全面验证从几何设计到物理仿真的端到端效率。

附录 A 非均匀节点间隔下的新旧控制点关系

设目标曲面片的参数域为$[\xi_0,\xi_1]\times[\eta_0,\eta_1]$，两个方向的局部节点序列为

$$\xi_{-2}<\xi_{-1}<\xi_0<\xi_1<\xi_2<\xi_3,$$
$$\eta_{-2}<\eta_{-1}<\eta_0<\eta_1<\eta_2<\eta_3.$$

记$d_r=\xi_{r+1}-\xi_r,\quad e_r=\eta_{r+1}-\eta_r,\quad r=-2,\dots,2$，其中所有节点间隔均为正。

原控制点写为

$$C_\alpha^{pq}=f_\alpha(\xi_{p-2},\xi_{p-1},\xi_p;\ \eta_{q-2},\eta_{q-1},\eta_q),\quad p,q=0,\dots,3.$$

令$H_d=d_{-1}+d_0+d_1,\quad H_e=e_{-1}+e_0+e_1$。

u参数方向的非均匀系数为

$$u_0=\frac{d_0^2}{(d_{-1}+d_0)(d_{-2}+d_{-1}+d_0)},\quad u_1=1-u_0-u_2,\quad u_2=\frac{d_{-1}^2}{(d_{-1}+d_0)H_d},\quad u_3=\frac{d_0+d_1}{H_d},$$
$$u_4=\frac{d_{-1}}{H_d},\quad u_5=\frac{d_1}{H_d},\quad u_6=\frac{d_{-1}+d_0}{H_d},$$
$$u_7=\frac{d_1^2}{(d_0+d_1)H_d},\quad u_8=1-u_7-u_9,\quad u_9=\frac{d_0^2}{(d_0+d_1)(d_0+d_1+d_2)}.$$

同理，v参数方向的系数为

$$v_0=\frac{e_0^2}{(e_{-1}+e_0)(e_{-2}+e_{-1}+e_0)},\quad v_1=1-v_0-v_2,\quad v_2=\frac{e_{-1}^2}{(e_{-1}+e_0)H_e},\quad v_3=\frac{e_0+e_1}{H_e},$$
$$v_4=\frac{e_{-1}}{H_e},\quad v_5=\frac{e_1}{H_e},\quad v_6=\frac{e_{-1}+e_0}{H_e},$$
$$v_7=\frac{e_1^2}{(e_0+e_1)H_e},\quad v_8=1-v_7-v_9,\quad v_9=\frac{e_0^2}{(e_0+e_1)(e_0+e_1+e_2)}.$$

左下角新控制点为

$$A_\alpha^{00}=f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_0;\eta_0,\eta_0,\eta_0)=u_0v_0C_\alpha^{00}+u_0v_1C_\alpha^{01}+u_0v_2C_\alpha^{02}$$
$$+u_1v_0C_\alpha^{10}+u_1v_1C_\alpha^{11}+u_1v_2C_\alpha^{12}\quad+u_2v_0C_\alpha^{20}+u_2v_1C_\alpha^{21}+u_2v_2C_\alpha^{22}.$$

其余新控制点与原控制点的关系为

$$
\begin{aligned}
A_\alpha^{01} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_0;\eta_0,\eta_0,\eta_1)\\
&= u_0v_3C_\alpha^{01} + u_0v_4C_\alpha^{02} + u_1v_3C_\alpha^{11} + u_1v_4C_\alpha^{12} \quad + u_2v_3C_\alpha^{21} + u_2v_4C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{02} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_0;\eta_0,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_0v_5C_\alpha^{01} + u_0v_6C_\alpha^{02} + u_1v_5C_\alpha^{11} + u_1v_6C_\alpha^{12} \quad + u_2v_5C_\alpha^{21} + u_2v_6C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{03} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_0;\eta_1,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_0v_7C_\alpha^{01} + u_0v_8C_\alpha^{02} + u_0v_9C_\alpha^{03} \quad + u_1v_7C_\alpha^{11} + u_1v_8C_\alpha^{12} + u_1v_9C_\alpha^{13} \quad + u_2v_7C_\alpha^{21} + u_2v_8C_\alpha^{22} + u_2v_9C_\alpha^{23},\\
A_\alpha^{10} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_1;\eta_0,\eta_0,\eta_0)\\
&= u_3v_0C_\alpha^{10} + u_3v_1C_\alpha^{11} + u_3v_2C_\alpha^{12} \quad + u_4v_0C_\alpha^{20} + u_4v_1C_\alpha^{21} + u_4v_2C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{11} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_1;\eta_0,\eta_0,\eta_1)\\
&= u_3v_3C_\alpha^{11} + u_3v_4C_\alpha^{12} + u_4v_3C_\alpha^{21} + u_4v_4C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{12} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_1;\eta_0,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_3v_5C_\alpha^{11} + u_3v_6C_\alpha^{12} + u_4v_5C_\alpha^{21} + u_4v_6C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{13} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_0,\xi_1;\eta_1,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_3v_7C_\alpha^{11} + u_3v_8C_\alpha^{12} + u_3v_9C_\alpha^{13} \quad + u_4v_7C_\alpha^{21} + u_4v_8C_\alpha^{22} + u_4v_9C_\alpha^{23},\\
A_\alpha^{20} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_1,\xi_1;\eta_0,\eta_0,\eta_0)\\
&= u_5v_0C_\alpha^{10} + u_5v_1C_\alpha^{11} + u_5v_2C_\alpha^{12} \quad + u_6v_0C_\alpha^{20} + u_6v_1C_\alpha^{21} + u_6v_2C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{21} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_1,\xi_1;\eta_0,\eta_0,\eta_1)\\
&= u_5v_3C_\alpha^{11} + u_5v_4C_\alpha^{12} + u_6v_3C_\alpha^{21} + u_6v_4C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{22} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_1,\xi_1;\eta_0,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_5v_5C_\alpha^{11} + u_5v_6C_\alpha^{12} + u_6v_5C_\alpha^{21} + u_6v_6C_\alpha^{22},\\
A_\alpha^{23} &= f_\alpha(\xi_0,\xi_1,\xi_1;\eta_1,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_5v_7C_\alpha^{11} + u_5v_8C_\alpha^{12} + u_5v_9C_\alpha^{13} \quad + u_6v_7C_\alpha^{21} + u_6v_8C_\alpha^{22} + u_6v_9C_\alpha^{23},\\
A_\alpha^{30} &= f_\alpha(\xi_1,\xi_1,\xi_1;\eta_0,\eta_0,\eta_0)\\
&= u_7v_0C_\alpha^{10} + u_7v_1C_\alpha^{11} + u_7v_2C_\alpha^{12} \quad + u_8v_0C_\alpha^{20} + u_8v_1C_\alpha^{21} + u_8v_2C_\alpha^{22} \quad + u_9v_0C_\alpha^{30} + u_9v_1C_\alpha^{31} + u_9v_2C_\alpha^{32},\\
A_\alpha^{31} &= f_\alpha(\xi_1,\xi_1,\xi_1;\eta_0,\eta_0,\eta_1)\\
&= u_7v_3C_\alpha^{11} + u_7v_4C_\alpha^{12} + u_8v_3C_\alpha^{21} + u_8v_4C_\alpha^{22} \quad + u_9v_3C_\alpha^{31} + u_9v_4C_\alpha^{32},\\
A_\alpha^{32} &= f_\alpha(\xi_1,\xi_1,\xi_1;\eta_0,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_7v_5C_\alpha^{11} + u_7v_6C_\alpha^{12} + u_8v_5C_\alpha^{21} + u_8v_6C_\alpha^{22} \quad + u_9v_5C_\alpha^{31} + u_9v_6C_\alpha^{32},\\
A_\alpha^{33} &= f_\alpha(\xi_1,\xi_1,\xi_1;\eta_1,\eta_1,\eta_1)\\
&= u_7v_7C_\alpha^{11} + u_7v_8C_\alpha^{12} + u_7v_9C_\alpha^{13} \quad + u_8v_7C_\alpha^{21} + u_8v_8C_\alpha^{22} + u_8v_9C_\alpha^{23} \quad + u_9v_7C_\alpha^{31} + u_9v_8C_\alpha^{32} + u_9v_9C_\alpha^{33}.
\end{aligned}
$$

附录 B 从双三次到双五次的升阶公式

在局部曲面片初始化阶段，需要把双三次样条曲面提升为双五次。对单变量三次曲线，升阶矩阵M_{34}和M_{45}分别为

$$
M_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad M_{45} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

因此，从 3 次直接升至 5 次的复合升阶矩阵M_{35}可由M_{45}与M_{34}相乘得到：

$$
M_{35} = M_{45}M_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

由于流形样条片F_α是张量积曲面，升阶必须同时沿u和v两个参数方向进行。设$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4\times4}$为原双三次控制点矩阵，则新的双五次控制点矩阵$\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{6\times6}$为：

$$\hat{\mathbf{A}} = M_{35}\mathbf{C}M_{35}^{T}.$$

参 考 文 献:

[1] Gallier J H. Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms. Morgan Kaufmann, 2000.

[2] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. Computer-Aided Design, 1978, 10(6): 350－355.

[3] Reif U. A refineable space of smooth spline surfaces of arbitrary topological genus. Journal of Approximation Theory, 1997, 90(2): 174－199.

[4] Höllig K, Mögerle H. G-splines. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(1): 197－207.

[5] Wen Z, Faruque M S, Li X, et al. Isogeometric analysis using G-spline surfaces with arbitrary unstructured quadrilateral layout. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 408: 115965.

[6] Peters J. Splines for meshes with irregularities. The SMAI Journal of Computational Mathematics, 2020, S5: 161－183.

[7] Grimm C M, Hughes J F. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds. ACM Transactions on Graphics, 1995, 14(2): 35－44.

[8] Navau J C, Garcia N P. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(7): 643－671.

[9] Ying L, Zorin D. A simple manifold-based construction of surfaces of arbitrary smoothness. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 271－275.

[10] Tosun E, Zorin D. Manifold-based surfaces with boundaries. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(1): 1－22.

[11] Zhang Q, Cirak F. Manifold-based isogeometric analysis basis functions with prescribed sharp features. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 361: 112659.

[12] Gu X, He Y, Qin H. Manifold splines. Graphical Models, 2006, 68(3): 237－254.

[13] Gu X, He Y, Jin M, et al. Manifold splines with a single extraordinary point. Computer-Aided Design, 2008, 40(6): 676－690.

[14] He Y, Wang K, Wang H, et al. Manifold T-spline. International Conference on Geometric Modeling and Processing. Springer, 2006: 409－422.

[15] Greiner G. Variational design and fairing of spline surfaces. Computer Graphics Forum, 1994, 13(3): 143－154.

[16] Eppstein D, Goodrich M T, Kim E, Tamstorf R. Motorcycle graphs: canonical quad mesh partitioning. Computer Graphics Forum, 2008, 27(5): 1477－1486.

[17] Pietroni N, Nuvoli S, Alderighi T, et al. Reliable feature-line driven quad-remeshing. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): 1－17.

任务需求驱动的网格价值场神经算子方法

楼　昊*，张仕元，马浩元，覃建秀，朱德华，禹　旻

（中国航天空气动力技术研究院，北京 100074）

摘　要：飞行器 CFD 中，表面网格分布直接影响计算精度与成本。传统网格主要依赖几何特征和经验设置，自适应方法虽可依据压力或误差信息优化网格，但通常需要预先进行 CFD 或代理模型求解，在多工况分析中成本较高。针对这一问题，本文提出一种任务需求驱动的网格价值场神经算子方法。不同于传统方法直接依据当前压力变化或局部误差判断加密区域，本文将局部网格加密进一步表述为有限资源条件下的边际收益问题，以单位新增网格资源所带来的压力误差下降量定义网格价值，并构造随总网格预算变化的预算条件化价值场 V(x;N)。同时，引入任务工况权重描述飞行包线内不同运行状态的重要程度，将多个工况下的局部网格价值聚合为统一的任务价值场 $V_{mission}(x;N)$。为将网格资源决策前移至正式 CFD 求解之前，本文利用深度学习表面压力模型预测结果作为冻结物理先验，并构建 Grid Value Neural Operator，学习压力响应、运行工况、网格预算与局部加密收益之间的函数映射。模型仅输出飞行器表面“哪里值得加密”的连续价值场，具体网格尺寸、拓扑调整和质量控制仍由成熟传统网格器完成。该方法将飞行器表面网格优化从“基于已有解的误差适配”进一步转化为“任务需求和有限计算资源约束下的网格资源价值预测”，为多工况飞行器 CFD 在正式求解前进行表面网格资源配置提供了一种新的技术思路。

关键词：网格价值场；神经算子；表面压力预测；自适应网格

0　引　言

飞行器计算流体力学分析中，网格是连续几何与流动控制方程离散化的基础，其空间分布直接影响数值计算精度和计算成本。对于给定的网格规模，如果能够将更多离散自由度配置于激波、强压力梯度以及对目标气动量敏感的区域，通常能够比基于几何外形的全局均匀加密获得更高的计算效率。针对这一问题，传统自适应网格技术已形成较为系统的研究体系，包括基于流场梯度或 Hessian 的特征加密、基于残差的误差估计以及基于伴随方法的目标导向网格适配等。Park 将伴随误差估计用于三维 CFD 网格自适应，通过原始流场与伴随问题估计升力、阻力等目标量的离散误差，并据此调整网格分布[1]。后续研究进一步将 primal solution 与 adjoint solution 共同用于各向异性 metric field 的构造，实现了针对气动力目标函数的高效网格适配[2]。

上述方法已经证明了一个重要事实：不存在脱离具体物理状态和计算目标的绝对最优网格，有限网格资源应优先配置到能够显著降低目标误差的空间区域。 但传统方法通常需要首先在已有网格上完成 CFD 求解，随后根据流场解或误差估计结果重新调整网格，再进行下一轮求解。因此，其典型流程仍然表现为“CFD 求解—误差估计—网格适配—再次 CFD 求解”的迭代过程。对于需要覆盖大量 Mach 数、攻角等状态的飞行包线分析，如果针对不同运行工况分别执行这一过程，将带来较大的前处理和数值计算成本。[1-2]

随着机器学习和神经算子的发展，研究者开始尝试学习物理解与网格适配之间的映射关系。Hu 等提出 Data-free Mesh Mover（DMM），将从 PDE solution 到 adaptive mesh 的关系表示为神经算子，并通过 Monge‑Ampère 方程进行无需最优网格标签的训练。DMM 通过移动已有节点而不是增加或删除节点实现动态网格调整，其本质属于 solution-driven 的 r-adaptation[3]。该工作说明“物理解到适配网格”的映射具有可学习性，为利用人工智能加速网格自适应提供了重要依据。

另一方面，Wallwork 等提出 Error Estimation Networks（E2N），利用局部网格几何和问题物理特征预测各单元对目标误差估计量的贡献，以机器学习模型部分替代传统目标导向自适应中成本较高的 enriched adjoint error estimation[4]。这一研究进一步说明，局部物理状态与局部离散误差之间的关系可以由数据驱动模型进行近似。 然而，DMM 和 E2N 仍主要关注已经获得物理解之后如何进行网格移动或误差估计：DMM 回答的是“已有一个物理解后网格应该如何移动”，E2N 回答的是“当前哪些单元对目标误差贡献较大”。二者均未直接回答在正式 CFD 求解之前、计算资源已经给定的情况下，“下一份网格资源配置在哪里最有价值”这一问题。

针对多运行工况问题，Dornier 等进一步提出 Mean Mesh Adaptation（MMA），不再针对每一个 operating condition 分别建立独立的适配网格，而是根据有限采样工况上的局部平均误差，迭代构造一张面向连续工况集合的公共网格，其目标是在工况分布上降低平均计算误差[5]。该方法在 Burgers 方程和二维 Euler scramjet 激波流动问题上进行了验证，说明多工况网格需求可以在统一的误差目标下进行聚合。

Mean Mesh Adaptation 与本文关注的问题最为接近，但仍存在三个方面的差异。首先，其公共网格构造仍依赖采样工况下已经获得的数值解和局部误差估计，尚未摆脱“先求解、后适配”的基本范式；其次，其主要目标是工况集合上的平均误差，而实际飞行任务中不同运行状态的重要程度往往并不相同；最后，局部平均误差描述的是“当前哪里误差较大”，并未显式描述在给定总网格资源条件下“继续向某一区域投入网格能够获得多少额外收益”[5]。

因此，本文进一步将飞行器表面网格优化问题从传统的误差驱动网格适配重新表述为任务需求和有限资源约束下的网格资源价值预测问题。本文不改变已有成熟网格生成器，也不直接预测网格节点、连接关系或具体单元尺寸，而是在传统网格器之前增加一个智能决策层：根据飞行器几何、飞行任务、运行工况以及给定网格预算，在正式 CFD 求解之前预测飞行器表面不同位置的网格投入价值，并将其表示为连续的网格价值场（Grid Value Field）。进一步利用神经算子的函数映射能力学习该价值场，形成任务需求驱动的气动网格价值场神经算子，为多工况飞行器 CFD 网格自动化提供新的技术路径。

1 问题描述

1.1 哪里值得继续加密

设飞行器表面为$\Gamma \subset R^3$，飞行工况表示为$\mu = (Ma, \alpha, Re, \ldots) \in \Omega_\mu$，其中$\Omega_\mu$表示给定飞行任务所涉及的工况空间。

传统基于压力场特征的网格适配通常使用压力梯度、Hessian、激波检测量或其他局部误差指标作为 refinement indicator。这类指标能够识别压力快速变化或当前误差较大的区域，但它们本质上描述的是当前状态。类似地，E2N 所学习的是各单元对目标误差估计量的贡献[4]，DMM 中的 monitor function 则根据已有 PDE solution 的空间特征重新配置节点密度[3]。

本文关注的问题向前推进一步。对于表面区域（i），如果把下一份有限网格资源投入这里，能够获得多少压力计算精度收益。

因此定义局部网格边际价值$V_i(N) = \frac{E_p(T_N) - E_p(T_{N,i}^+)}{\Delta N_i}$，其中，$T_N$表示当前总网格预算为 N 时的基础网格，$T_{N,i}^+$表示在局部区域（i）进一步增加分辨率后的网格，$E_p$表示相对于高精度参考结果的压力场误差，$\Delta N_i$表示此次局部加密增加的网格资源。因此，$V_i(N)$表示单位新增网格资源能够带来的压力误差下降量。

1.2 网格预算条件化

局部网格价值还应显式依赖总网格预算 N。当总体网格数量较少时，激波、前缘和强压力梯度区域通常具有较高的优先级；随着这些区域已经获得较高分辨率，继续投入网格的边际收益可能逐渐降低，其他次级压力变化区域的相对价值随之上升。

因此本文研究的不是一个固定的$V(x)$，而是一族预算条件化的价值场$V(x; N)$，不同预算对应$N_1 \to V(x; N_1)$，$N_2 \to V(x; N_2)$，…。

由此，网格预算不再只是传统网格生成器执行阶段的参数，而成为决定空间加密优先级的重要条件变量。这一点也使本文研究目标与 DMM 中保持固定自由度、主要通过移动已有节点实现适配的研究问题形成区别[3]。

1.3 任务需求驱动的多工况价值聚合

对于一个单独工况μ，可以定义$V(x, \mu; N)$。但实际飞行器通常需要同时服务于多个运行状态。随着 Mach 数、攻角等条件变化，激波位置、压力峰值及其他压力特征可能发生迁移，从而使不同工况对有限网格资源产生不同甚至相互竞争的空间需求。

MMA 已经证明，可以将多个连续 operating conditions 下的局部误差信息聚合起来，建立一张面向整个工况集合的公共网格[5]。本文则考虑实际工程任务中的不同工况不应天然具有相同的重要程度，因此引入任务工况权重函数$\rho(\mu) \geq 0$。例如，对主要关注高效巡航性能的飞行任务，可以围绕各 Mach 数下具有高任务价值的运行状态构建较高权重，而降低实际任务中很少出现或不重要状态的权重。

在此基础上，将不同工况的局部价值聚合为任务价值场：$\int_{\Omega_\mu} \rho(\mu) V(x, \mu; N) d\mu$。其离散形式为$\sum_{k=1}^{K} w_k V(x, \mu_k; N)$，$\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$。其中，$\rho(\mu)$ 或w_k标明哪些工况值得重点服务，而$V(x, \mu; N)$ 则是在该工况和当前预算下，哪些空间位置值得投入更多网格。由此，将飞行包线多工况问题转化为任务需求驱动的空间资源配置问题。

1.4 网格价值预测

传统自适应方法以及 MMA 都需要首先获得一定数量的真实数值解[1-2,5]。为使网格资源判断进一步前移至数值求解之前，本文引入深度学习表面压力模型预测结果作为冻结的物理先验$P: (\Gamma, \mu) \to C_p(x, \mu)$，针对给定任务，可快速获得压力场族$\{\widehat{C}_p(x, \mu_k)\}_{k=1}^{K}$，这些预测压力场用于向网格价值模型提供

不同工况下的主要气动压力特征，但并不作为 Grid Value 的监督真值。真正的价值标签仍由离线高可信 CFD 数据通过局部网格干预构造，即比较基础网格与局部加密网格相对于参考压力场的误差变化，计算真实的$\Delta E_p/\Delta N$。因此，该方法利用压力预测形成正式 CFD 前的物理先验，并进一步学习“物理状态—资源预算—加密收益”之间的新映射关系。

1.5 网格价值神经算子

对于固定飞行器外形，本文最终希望学习的核心关系可以表示为：$\mathcal{V}_\theta:(\rho(\mu),N)\mapsto V_{\text{mission}}(x;N)$，模型内部首先利用压力预测器得到不同工况的$C_p(x,\mu)$，进一步预测单工况价值$V(x,\mu;N)$，最后依据任务权重显式形成$V_{\text{mission}}(x;N)$。由于输入中的任务需求$\rho(\mu)$是定义在工况空间上的函数，输出$V_{\text{mission}}(x;N)$，是定义在飞行器曲面上的连续函数，因此该问题可以表示为函数空间之间的映射，并采用 Neural Operator 进行建模。

本文将这一模型称为 Aerodynamic Grid Value Operator（AeroGVO），AeroGVO 输出的只是$V_{\text{mission}}(x;N)$，是表征值得加密区域的连续价值场。具体的局部网格尺寸设定、网格节点生成、拓扑调整、平滑及质量控制仍全部由成熟传统网格器完成。由此可以将本文研究问题概括为$(\textit{任务需求},\textit{飞行包线},\textit{网格预算})\longrightarrow\textit{表面网格价值场}$，其目标是回答，对于当前飞行任务和有限网格资源，每一份额外网格资源最应该配置在飞行器表面的什么位置。

2 结　论

本文针对飞行器多工况 CFD 网格生成中有限网格资源配置的问题，提出了一种任务需求驱动的网格价值场神经算子方法。本文将局部网格加密定义为一个资源边际收益问题，以单位新增网格资源所带来的压力误差下降量描述局部网格价值。在此基础上，本文进一步考虑总网格预算对局部加密收益的影响，将网格价值定义为预算条件化的连续函数 V(x;N)，使不同网格规模能够对应不同的空间加密优先级。同时，通过任务工况权重 ρ（μ）描述飞行包线内不同运行状态的重要程度，并将各工况下的局部网格价值聚合为统一的任务价值场 Vmission(x;N)，从而实现由具体飞行任务驱动的多工况网格资源配置。

为将网格决策进一步前移至正式 CFD 求解之前，本文利用深度学习表面压力预测结果作为冻结的物理先验，并通过 Grid Value Neural Operator 学习压力响应、工况、网格预算与局部加密收益之间的映射关系。与 DMM 从已有 PDE solution 出发直接预测移动网格的思路[3]以及 Mean Mesh Adaptation 基于多工况数值解和平均误差构造公共适配网格的方法[5]相比，本文研究重点进一步转向任务需求、有限计算资源与局部网格边际价值之间的关系。

因此，本文并非利用人工智能替代传统网格生成器，而是在已有成熟网格生成器之前增加一个任务感知、物理感知和预算感知的网格资源决策层。该方法为进行多工况飞行器表面网格资源配置提供了一种新的技术思路，也为后续面向不同任务、不同预算乃至不同飞行器外形的智能网格优化研究提供了基础。

参 考 文 献:

[1] Park M A. Adjoint-Based, Three-Dimensional Error Prediction and Grid Adaptation. AIAA 32nd Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 2002-3286, 2002.

[2] Balan A, Park M A, Anderson W K. Adjoint-Based Anisotropic Mesh Adaptation for a Stabilized Finite-Element Flow Solver. AIAA Aviation 2019 Forum, 2019.

[3] Hu P, Wang Y, Ma Z M. Better Neural PDE Solvers Through Data-Free Mesh Movers. International Conference on Learning Representations (ICLR), 2024.

[4] Wallwork J G, Lu J, Zhang M, Piggott M D. E2N: Error Estimation Networks for Goal-Oriented Mesh Adaptation. 2022.

[5] Dornier H, Le Maître O P, Congedo P M, Salah El Din I, Marty J, Bourasseau S. Mean Mesh Adaptation for Efficient CFD Simulations with Operating Conditions Variability. 2024.

基于 ODE 壁面模型的笛卡尔网格湍流 RANS 模拟方法研究

余隆基[1]，叶艺超[1]，吴昊[1]，陈荣钱[1*]，毕林[2*]

[1]（厦门大学航空航天学院，厦门，361102）

[2]（空天飞行空气动力科学与技术全国重点实验室，四川绵阳 621000）

摘　要：高雷诺数湍流流动的壁面模拟精度与计算效率是笛卡尔网格浸没边界法（IBM）面临的瓶颈问题。本文发展了一套基于常微分方程（ODE）求解的湍流壁面模型方法，并建立了与自适应笛卡尔网格 IBM 的鲁棒耦合框架。首先构建了平衡壁面模型，采用薄边界层假设与混合长度粘度封闭，将 RANS 方程简化为法向一维 ODE 并高效求解；紧接着进一步提出了保留压力梯度与对流项的非平衡壁面模型，引入 SA 湍流方程以拓展复杂流动适用性。通过平板湍流边界层、二维湍流凸包、NACA0012 翼型及 NLR7301/NHLP 多段翼型等算例的系统验证，结果表明：平衡模型在小攻角、对数律层模化高度下具有良好精度，升阻力系数误差小于 10%，计算效率较壁面解析网格提升两个量级以上；非平衡模型在先验测试中能准确捕捉强压力梯度下的湍流粘度非线性衰减。本文方法为笛卡尔网格高雷诺数湍流模拟提供了一条高效、自动化的技术路径。

关键词：笛卡尔网格；浸没边界法；壁面模型；常微分方程；RANS 模拟

0 引　言

在工程实际的高雷诺数湍流模拟中，笛卡尔网格的应用面临诸多挑战，其根本原因在于笛卡尔网格的各向同性加密机制与边界层流动的强各向异性特性之间存在本质矛盾。为精确捕捉边界层流动信息，近壁网格分辨率需随雷诺数增加呈指数级增长，这使得复杂构型下高雷诺数粘性流动模拟的计算成本超出工程可接受范围，严重制约了笛卡尔网格在工业级湍流问题中的适用性[1]。

为缓解高雷诺数壁湍流模拟对近壁网格的苛刻要求，可将贴体网格中成熟的壁面模型方法拓展至笛卡尔网格框架，在保留笛卡尔网格固有优势的同时有效放宽边界层网格尺度要求[2-3]。现有壁面模型主要分为代数壁面函数和基于边界层方程求解两类。前者形式简洁，计算效率高，但依赖平衡边界层假设，在强压力梯度、分离等非平衡流动中精度不足；后者通过求解简化控制方程具有更强物理基础，其中基于常微分方程（ODE）的模型在物理保真度与计算效率间取得良好平衡。然而，在笛卡尔网格浸没边界法（IBM）[4]框架下，网格非贴体特性给壁面模型的耦合实施带来额外困难，国内相关系统研究尚处于起步阶段。

针对上述问题，本文发展了一套基于 ODE 求解的湍流壁面模型方法，重点围绕壁面模型构造、非贴体笛卡尔网格下壁面函数实施、壁面模型与不同湍流模型匹配三个方面开展研究，最终建立一套面向复杂外形绕流的非贴体笛卡尔网格高效湍流附面层处理方法，在保留笛卡尔网格自动化优势的前提下显著

降低高雷诺数壁湍流模拟的计算成本。

1 问题描述

针对笛卡尔网格浸没边界法在高雷诺数湍流模拟中面临的瓶颈问题，现有方法在以下两个层面存在明显不足。

在壁面模型方面，现有方法主要分为代数壁面函数与基于边界层方程求解的壁面模型两类，二者在建模思路与技术路线上各有侧重。代数壁面函数（如 Spalding 公式及其衍生形式）基于普适的壁面律建立壁面物理量之间的经验关联，形式简洁，计算效率高，在平板湍流边界层等满足平衡边界层假设的流动中表现良好，在工程实践中得到了广泛应用[5]。然而，实际飞行器绕流中普遍存在强压力梯度、流动分离、激波-边界层干扰等强非平衡效应，此时边界层内总剪切应力沿壁面法向不再保持恒定，基于平衡假设的代数壁面函数预测精度显著下降，难以满足工程实际需求。

与代数壁面函数方法不同，基于方程求解的壁面模型通过直接求解简化的湍流边界层方程获得近壁物理量的完整剖面，能够将压力梯度、对流等非平衡效应以方程源项的形式纳入求解体系，因而具有更高的物理保真度。其中，基于偏微分方程（PDE）求解的壁面模型在理论上最为完备，但每一时间步均需沿壁面法向求解偏微分方程，计算量显著增加；同时其与主流 RANS 求解器之间的耦合策略复杂，涉及频繁的边界条件传递与变量交换，大幅增加了程序实现难度与计算开销，工程实用潜力受到严重制约[6-8]。

基于常微分方程（ODE）的壁面模型在上述两类方法之间提供了理想的折中方案。通过对 PDE 形式的边界层方程做进一步的量级分析与简化，将其降阶为 ODE 形式，既保留了边界层方程的基本物理框架和对非平衡效应的刻画能力，又大幅降低了求解复杂度，在物理保真度与计算效率之间取得了良好平衡。

在耦合实施方面，贴体网格体系中，壁面模型依托网格与物面的贴合特性，可直接利用无滑移壁面边界条件进行构造，物理边界清晰、数值实现成熟。但在笛卡尔网格浸没边界法（IBM）框架下，网格与物面不再贴合，壁面边界条件通过虚拟单元或直接力等方式施加，壁面模型的耦合实施面临着诸如壁面模型生效范围划定、参考点选取与插值、流场变量重构、湍流输运量模化等关键困难。上述实施层面的关键问题亟待系统研究，以形成一套适用于笛卡尔网格的壁面模型实施框架。

2 结　论

本文针对笛卡尔网格浸没边界法在高雷诺数湍流模拟中面临的近壁解析成本高、网格量激增的瓶颈问题，发展了一套基于 ODE 求解的湍流壁面模型方法，形成了涵盖网格生成、数值离散、壁面模化及复杂流动算例验证的完整 RANS 求解流程。研究结果表明，平衡壁面模型在典型平衡流动条件下具有良好预测精度；非平衡壁面模型在强压力梯度、薄边界层工况下能够准确捕捉湍流粘度非线性衰减，显著拓宽了模型适用范围。平板湍流边界层及系列复杂外形算例的验证表明，本文方法在保持笛卡尔网格自动化

优势的前提下，能够以较低的计算成本有效模拟非贴体网格复杂外形的湍流流动，翼型算例测试结果与实验值及 CFL3D 参考解吻合良好，升阻力系数误差小于 10%，且网格规模减少了 1-2 个量级。

未来工作将聚焦非平衡模型在笛卡尔网格中的鲁棒实施、三维复杂外形及可压缩流动推广，以及非定常流动问题的拓展。

参 考 文 献:

[1] 罗灿炎, 毕林, 徐晶磊, 等. 笛卡尔网格下不同湍流模型的壁面函数方法研究[J]. 工程力学, 2024, 41(8): 11-22.

[2] Chen H, Wang Z, Tian L, et al. Coupling immersed boundary method with wall function for high Reynolds number compressible flows on adaptive Cartesian grids[J]. Physics of Fluids, 2025, 37(1): 016143.

[3] Pu T M, Zhou C H. An immersed boundary/wall modeling method for RANS simulation of compressible turbulent flows[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2018.

[4] 罗灿炎, 周丹, 杜昊, 等. 笛卡儿网格高保真虚拟单元浸入边界法研究与应用[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54(3): 126-137.

[5] SPALDING D B. A single formula for the law of the wall[J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28(3): 455-458.

[6] Yang X I A, Sadique J, Mittal R, et al. Integral wall model for large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows[J]. Physics of Fluids, 2015, 27(2): 1293.

[7] Park G I, Moin P. Numerical aspects and implementation of a two-layer zonal wall model for LES of compressible turbulent flows on unstructured meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 305: 589-603.

[8] Capizzano F. Coupling a Wall Diffusion Model with an Immersed Boundary Technique[J]. AIAA Journal, 2015, 54(2):728-734.

壁面距场驱动的多块结构网格自动生成方法

胡姝瑶，蒋崇文，李椿萱

（北京航空航天大学航空科学与工程学院国家计算流体力学实验室，北京 100191）

摘　要：正交性好、疏密合理的结构网格具有求解精度高、计算效率高的显著优势。然而，复杂外形结构网格生成困难且高度依赖人工经验，导致网格生成耗时可占 CFD 仿真总耗时的 70%以上。结构网格自动生成的主要难点在于：难以确定网格拓扑、难以保证网格正交性、难以合理控制网格疏密。针对这三个难点，本文提出了壁面距场驱动的结构网格自动生成方法，其特点包括：其一，选取等壁面距线及其梯度线作为网格方向，利用壁面距场单值连续的特征，有效避免网格交错等生成失败问题；其二，利用等壁面距线及其梯度线的正交性，确保了近壁区网格的正交性；其三，依据壁面距值、壁面距海森阵的迹分别控制近壁法向与流向的网格疏密，确保了在边界层、大几何曲率处合理加密的要求。数值验证表明，该方法网格生成效率高、算法并行度高，用户仅需设置 6 项参数即可生成结构网格；生成的结构网格具有近壁正交性好、疏密合理的显著优势。

关键词：网格自动生成，结构网格，壁面距场

0 引　言

以 CFD 为代表的流体数值方法需要依托计算网格离散控制方程和存储流场数据。网格质量将直接影响流体仿真的求解精度和计算效率。正交性好、疏密合理的结构网格具有求解精度高、计算效率高的显著优势。然而，复杂外形结构网格生成困难且高度依赖人工经验，导致网格生成耗时可占 CFD 仿真总耗时的 70%以上。因此，现有商业软件普遍采用非结构网格。非结构网格虽生成效率高，但存在软件内存需求大、计算效率低的明显缺点。因此，发展高效的结构网格自动生成方法对提高 CFD 的求解精度与计算效率具有重要意义。

当前，结构网格生成的主流商业软件主要有 Pointwise、ICEM CFD、NNW-GridStar 等。然而，该类软件主要提供交互式结构网格生成功能，拓扑划分、网格分布调整等工作仍需大量强经验人工操作。本文针对结构网格自动生成中网格方向难以确定、网格正交性难以保证、网格疏密难以合理控制等三点问题，提出了壁面距场驱动的多块结构网格自动生成方法（**W**all-distance field **I**nformed multi-block **S**tructued-grid **A**uto-generation method，WISA）。

1　算法效果介绍

图 1 展示了 WISA 方法生成的相交圆柱剖面网格，网格生成耗时 2.1s。对于传统结构网格方法，该外形的圆柱相交处极易出现负体积网格。WISA 方法的特点在于：（1）在壁面法向突变的区域，自动增加角块，提高网格质量；（2）近壁区网格周向为等壁面距线，法向为壁面距场的梯度线，网格正交性好；（3）几何大梯度、边界层区自适应加密。

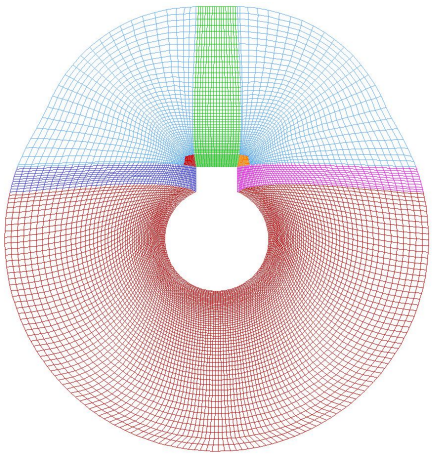


图 1 WISA 方法生成的相交圆柱剖面多块结构网格

图 2 展示了 WISA 方法生成的翼型网格及基于该网格的 CFD 计算结果，网格生成耗时 1.1s。由图可知，该网格在翼型的前、后缘能够自动加密，近壁区网格正交性好，能够为 CFD 高效地提供计算网格。

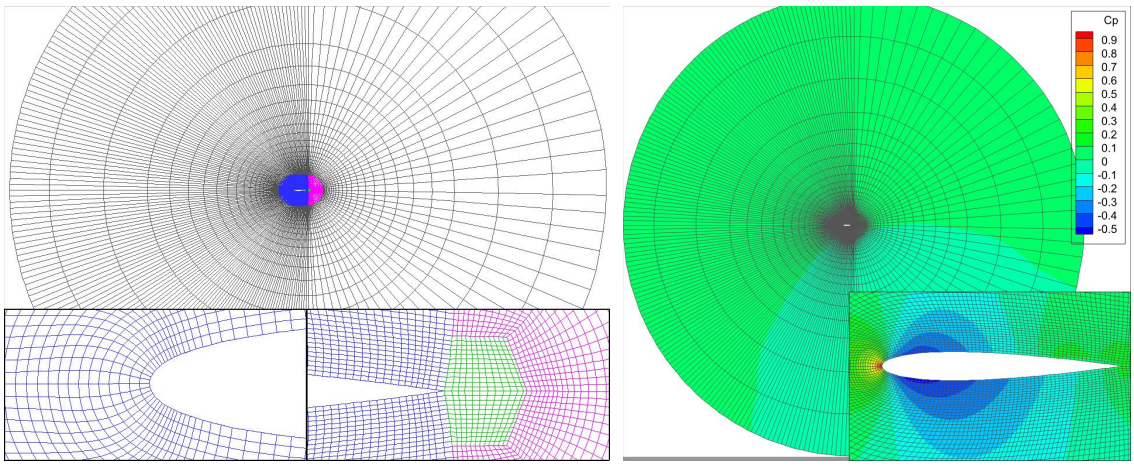


图 2 基于 WISA 方法生成的翼型绕流计算网格及 CFD 计算结果

2 结论

本文提出了壁面距场驱动的结构网格自动生成方法，其具有三点优势：（1）选取等壁面距线及其梯度线作为网格方向，利用壁面距场单值连续的特征，有效避免网格交错等生成失败问题；（2）利用等壁面距线及其梯度线的正交性，确保了近壁区网格的正交性；（3）依据壁面距值、壁面距海森阵的迹分别控制近壁法向与流向的网格疏密，确保了在边界层、大几何曲率处合理加密的要求。数值验证表明，该方法网格生成效率高、算法并行度高，用户仅需设置 6 项参数即可生成结构网格；生成的多块结构网格具有近壁正交性好、疏密合理的显著优势。

面向船舶 CFD 分析的自适应非结构边界层网格生成方法

赵鑫[1]，周凯军*[2]，金周[2]，林达[1]，袁鼎[2]，金奕星[2]，杨静[2]，王墨伟[2]

（1.中国船舶科学研究中心，无锡，214000；

2.中船奥蓝托无锡软件技术有限公司，无锡，214000）

通讯作者：周凯军 wwwnn_good@126.com

摘　要：非结构构造法附面层网格具有适应复杂外形、生成效率高、全局网格质量较高等优势，在飞行器流体力学性能数值模拟中具有较好的工程应用价值。但是，针对船舶螺旋桨这类具有薄几何外形特点、存在锐利特征边/角点的复杂外形曲面模型，按照原始非结构构造法生成边界层顶面，当桨叶表面分片不够合理时，容易出现顶面网格与原始表面相交等问题；在狭窄区域进行碰撞处理时，也容易出现局部网格退化情况。针对此问题，本文在非结构构造法基础上，优化了表面分片和框架线选取方法，改进了边界层碰撞检测与回退策略，通过局部压缩、减层及混合单元过渡，提高复杂区域边界层网格的生成质量和稳定性。螺旋桨算例对比表明，改进方法通过增加框架线和局部压缩解决了候选顶面与壁面相交及生成无效棱柱的问题。

关键词：船舶 CFD 分析；自适应非结构网格；边界层网格生成；碰撞压缩；混合单元过渡

1 相关工作

在水动力学 CFD 分析中，紧贴物面、流体黏性力起主导作用的极薄流动区域被称为边界层（在空气动力学 CFD 分析中习惯称为附面层），高质量边界层网格是船舶 CFD 准确模拟近壁面流动现象的重要基础。传统前沿层进法通常以物面网格为起点，沿局部法向逐层生成边界层网格[1]。在凹槽、狭窄间隙及高曲率过渡区域，相邻生长前沿容易发生交叉，进而产生单元折叠或负体积。通过局部停止生长可以避免部分无效单元，但也可能造成边界层覆盖不连续，并给后续核心区域的体网格生成带来困难[2-3]。

构造法为复杂外形的边界层网格生成提供了另一种思路[2-3]。王永杰[2]、何雨阳[3]等提出非结构构造法边界层网格生成方法，采用先构造顶面、再插值生成内部网格的整体思路。该方法首先对物面网格进行分片，在各分片边界选取支撑点，通过支撑线和抬升后的轮廓线建立框架；随后利用径向基函数插值生成各分片的顶面网格，并对拼接后的顶面进行碰撞检测与压缩回退；最后，根据首层高度、增长率和层数，在物面与顶面之间插值生成各层节点，按拓扑关系连接形成边界层体网格。通过整体构造顶面缓解了逐层推进中的局部自相交问题，并可根据物面网格类型生成相应的边界层单元。

然而，上述方法的顶面构造依赖于适当的曲面分片和框架约束，直接应用于本文面向的船舶螺旋桨复杂曲面时仍存在模型适应性问题。工程模型的初始分片通常由 CAD 建模过程决定，其边界和尺度

未必适合边界层顶面的构造。对于螺旋桨叶片等具有薄壁、高曲率及局部狭窄间隙的几何结构，仅依据初始分片边界选取支撑点，难以充分约束分片内部的局部特征，导致插值生成的顶面与原始壁面相交。因此，有必要结合船舶螺旋桨曲面的几何特征改进分片与支撑框架的选取方法，降低顶面构造对初始分片质量的依赖。

此外，在局部生长空间受限的区域，仅通过压缩回退不能保证三棱柱单元的有效性。当相邻柱列（本文中特指沿某一个法向推进生成的一列三棱柱体单元）需要采用不同的生长高度或提前终止时，单一的三棱柱网格结构难以完成局部减层后的连续过渡，可能造成单元退化或局部网格生成失败。对于船舶水动力学 CFD 软件 MarineFlow 这种支持混合单元的 CFD 求解器，可引入金字塔和四面体等过渡单元，衔接不同生长状态的相邻柱列。

针对上述问题，本文在非结构构造法的基础上，针对船舶螺旋桨复杂曲面改进分片与框架约束，并结合局部碰撞压缩、按列减层及混合单元过渡，提高复杂区域边界层网格生成的适应性和稳定性。通过实际工程算例进行对比验证，表明本文改进方法解决了上述两个问题。

2 本文方法

原始方法以曲面分片、支撑线与轮廓线组成的框架、径向基函数（RBF）顶面插值、碰撞回退及内部插值为主线[2-3]。本文沿用这一构造式框架，针对船舶螺旋桨具有的模型面片数量多、叶根与叶梢曲率变化快、局部间隙狭窄的特点，提出了两阶段构造式边界层生成方法，重点改进表面分片与支撑约束、候选顶面独立构造以及碰撞后体单元的局部退化控制。整体流程分为候选顶面生成和边界层体网格生成四个阶段。

2.1 复杂表面分片与支撑框架计算

作为参考的非结构构造法以几何模型的初始超面分片为起点，再依据特征边调整分片[2-3]。与原始方法不同之处在于，本文基于特征边合并超片分片后，持久化特征边数据，用于后续生成候选顶面时保持几何特征。

在每个计算分片上，沿边界线及特征线选取支撑点，沿用邻域三角面法向加权的方法计算支撑点位移方向，并以支撑线和抬升后的分片边界构成框架。相邻分片的公共边采用一致的支撑点和边界位移约束，避免分别插值时出现顶面裂缝。与仅依赖初始面片边界相比，重组后的分片和支撑约束使叶根、叶梢等局部特征附近的框架位置更可控。

2.2 候选顶面的独立构造与拓扑约束

在确定框架后，仍采用 RBF 插值思想，将框架位移传递至分片内部节点，再拼接各分片得到完整候选顶面。为了便于检查阶段处理效果，本文将这一结果作为独立的阶段输出，因此可以先检查分片边界的连续性、壁面至顶面的位移方向以及顶面三角形相交情况，同时可以引入松弛算法，进一步优

化候选顶面的三角形网格质量。候选顶面允许包含待处理的局部碰撞，其生成成功并不等于最终边界层网格有效。

为使两阶段接口确定，候选顶面与输入壁面保持节点及三角形的一一对应，即节点编号、三角形数量和每个三角形的顶点顺序均不改变。该约束使每个壁面节点都有明确的候选生长位移，便于定位引起相交或单元翻转的柱列；后续局部减层只改变体单元输出，不通过删除候选顶面三角形掩盖几何问题。

2.3 碰撞检测与局部压缩回退

原始方法通过稀疏桩基射线检测顶面碰撞，并将压缩量向邻域扩散[2]。本文保留这一高效的初筛方式，同时对候选顶面的局部自相交、候选顶面与壁面之间的相交以及初筛遗漏的邻近区域进行补充检查。对发生碰撞的柱列，依据局部可用高度限制壁面至顶面的位移，再把回退量沿壁面邻域平滑扩散，使相邻柱列的层高连续变化。压缩后重新检查顶面相交情况；若仍存在冲突，则将受影响的局部柱列交由后续折叠与终止处理，避免少量漏检导致整个边界层生成失败。

压缩只作用于发生冲突及其过渡邻域，不对全局统一减层。因此，远离叶根窄缝和高曲率区的柱列仍可保留原设定层数；局部压缩所改变的实际首层高度应由输出网格重新测量，不能直接以输入参数代替。

2.4 按列减层与混合单元过渡

根据首层高度、增长率和层数确定名义各层厚度，再在壁面与压缩后的外层面之间设置各层节点。对拟生成的单元逐层检查体积和方向；若压缩后仍不能形成有效棱柱，使相应柱列提前终止，并使邻近柱列逐步减层，避免层数在相邻位置突然从完整值降为零。这一处理把不可生成边界层区域限制在局部，同时为剩余体网格留出连续的过渡边界。

在壁面三角形对应的一层中，三列均继续生长时生成棱柱；若有一列或两列提前终止，则分别以金字塔或四面体单元填充过渡；三列均终止时，该处不输出边界层体单元。完全无层的壁面三角形仍作为后续核心四面体网格的边界。由此，局部失败不再强迫整个模型减层，也不需要改变第二阶段输入的候选顶面拓扑。

3 算例结果与分析

3.1 算例与网格设置

选取“育鹏”船舶螺旋桨作为验证对象，分别采用原始方法与本文改进方法进行对比。育鹏轮螺旋桨是一固定螺距 4 叶螺旋桨，是典型的民船螺旋桨推进器。采用同一套“水密”三角形面网格作为两种方法的输入，该网格含 7 081 个节点和 14 158 个三角形。边界层网格控制参数包括：首层高度为 0.5mm，增长率为 1.2，层数为 5。

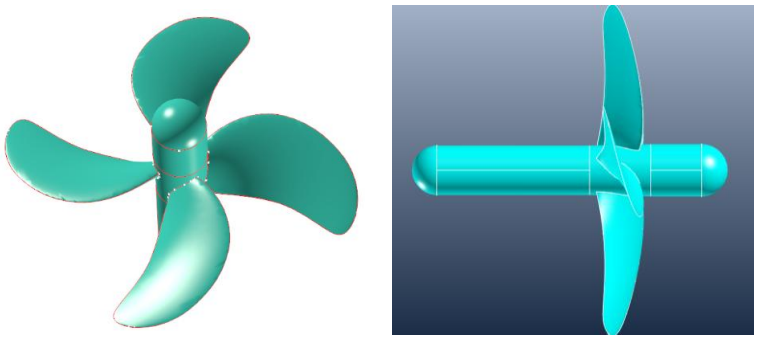


图 1 “育鹏”螺旋桨几何模型

3.2 候选顶面构造对比

候选顶面决定后续边界层柱列的生长方向和边界层厚度。图 2 给出原始方法在叶梢附近的候选顶面，图 3 给出改进后的对应结果。从局部线框可见，原始方法产生结果在叶梢和曲率变化处存在明显的线条交错，统计三角壁面网格存在 624 个三角网格与候选顶面相交，生长方向与壁面法向余弦的均值为 0.5361；改进方法产生的三角壁面网格不再与候选顶面相交，且生长方向与壁面法向余弦的均值提高到 0.6438。

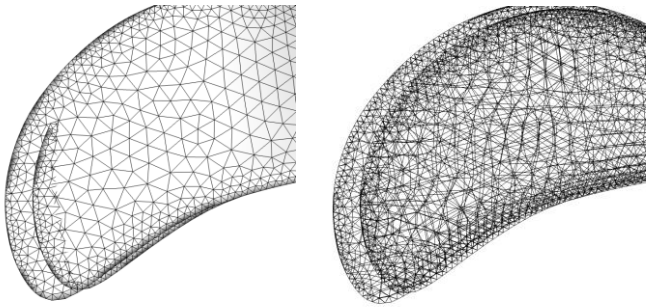


图 2 参考构造法生成的候选顶面及叶梢局部线框

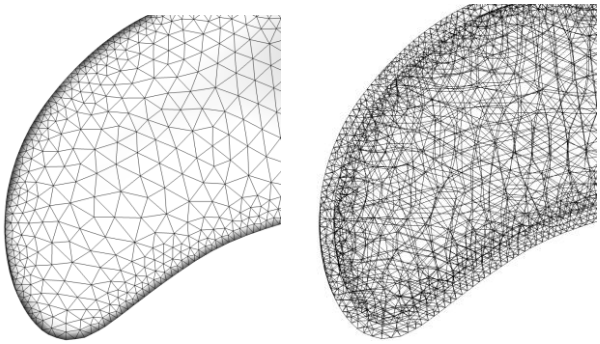


图 3 改进方法生成的候选顶面及叶梢局部线框

3.3 边界层单元与局部失效处理

图 4、图 5 分别展示原始方法与改进方法生成的边界层及局部放大结果。原始方法生成 70 790 个棱柱，同时出现 13 409 个无效棱柱（体积为 0 或负数，程序对于此类棱柱会直接忽略），约占总棱柱数的 18.94%；本文方法生成 69 148 个棱柱、358 个金字塔单元和 257 个边界层四面体单元，所有壁面三角形网格均生成了边界层。

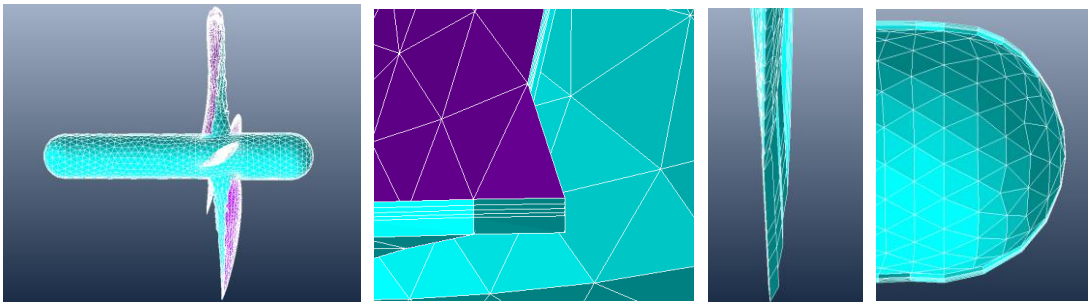


图 4 原始方法生成的边界层及叶根、叶梢、桨毂端部局部结果

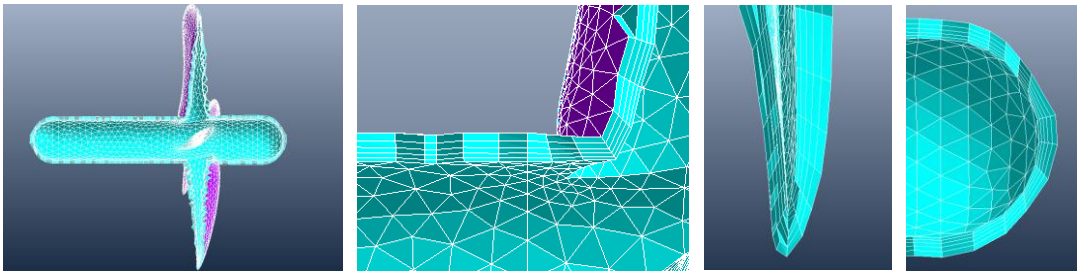


图 5 改进方法生成的边界层及叶根、叶梢、桨毂端部局部结果

4 结论

针对船舶螺旋桨复杂曲面中初始分片适应性不足、局部碰撞及单元退化等问题，本文在非结构构造法基础上，改进了表面分片与支撑框架的选取方法，并结合碰撞检测、局部压缩回退、按列减层及混合单元过渡，提高复杂区域边界层网格生成的适应性。螺旋桨对比算例表明，改进方法能够有效处理候选顶面与壁面相交的问题，改善边界层生长方向与壁面法向的一致性，并通过金字塔和四面体单元完成局部减层区域的过渡，实现全部壁面三角形的边界层覆盖。

目前，该方法生成的边界层网格质量仍有进一步提升的空间。局部过渡区域的平滑处理可能使生长方向偏离壁面法向，影响网格正交性；尖锐几何特征附近也仍存在质量较差的单元。后续将进一步优化生长方向约束与过渡区域的平滑策略，并探索通过引入局部辅助网格，例如在尖锐处填充额外体网格，改善尖锐部位的单元形态，以提高边界层网格的正交性和整体质量。

参考文献

[1] 陈建军，曹 建，徐彦等. 适应复杂外形的三维粘性混合网格生成算法[J]. 计算力学学报，2014.6 Vol.31，No.3.

[2] 王永杰，刘杨，庞宇飞等. 非结构构造法附面层网格生成方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2025，37(10)：1762-1769.

[3] 何雨阳. 基于构造法的面向复杂外形的附面层网格自动生成方法研究. 西南科技大学硕士论文，2022.5.

[4]王永杰. 超高速飞行器仿真模拟中附面层网格生成研究 [D]. 大连：大连理工大学，2022.

[5]曹建. 适应复杂外形粘性流动模拟的混合网格生成算法 [D]. 杭州：浙江大学，2013.

[6] Chen Z B, Jiang X, Zhou Z, et al. Progress in application of CFD techniques[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2008, 51(7): 827-841.

[7] Lu F S, Pang Y F, Jiang X, et al. Automatic generation of structured multiblock boundary layer mesh for aircrafts[J]. Advances in Engineering Software, 2018, 115: 297-313.

本文研究工作得到 ZC25T320070-39 项目支持

面向结构 CAE 分析的船舶结构 CAD 理想化模型自动处理方法

袁鼎*，金周，周凯军，杨静，王墨伟

（中船奥蓝托无锡软件技术有限公司，无锡 214000）

通讯作者：袁鼎 yuanding@cssrc.com.cn

摘 要：船舶详细设计阶段产生的结构 CAD 模型包含大量的工艺细节，无法直接用于结构 CAE 网格生成，必须先进行理想化模型处理。船舶 CAD 软件输出经过 BOM 简化和几何简化的结构 CAD 模型时，由于去除板厚和公差设定，带来短边/碎边、端点漂移、线环未闭合、板梁拼接翘曲等一系列几何问题，影响网格质量与计算精度。针对上述问题，本文提出了船舶结构 CAD 模型的理想化模型自动处理方法，通过边类型分类、平面识别、线环检测、初始闭合、短边合并、C2 曲率切分、共线短边合并、切向连续弧段合并、轴向直线对齐以及线环端点吸合等几何预处理流程，解决了弧段合并中由近重合点引发的最小二乘拟合高频抖动问题、端点强制吸合引起的样条线末端反向翘曲问题，最终输出与原始 CAD 模型几何一致并保证位移协调性的初始三角面片模型，作为面网格重划模块的输入。算例测试结果表明，该方法满足结构求解需求，并已集成到船舶结构 CAE 软件 SAM 中。

关键词：结构 CAE 分析、CAD 理想化模型、结构 CAE 网格生成、几何预处理，几何一致，SAM 软件

0 引言

边界表示（B-Rep）是当前主流的 CAD 几何模型表示方法，通过面、边、点的拓扑关系以及底层曲面、曲线几何来精确描述三维形体。在船体结构设计阶段，几何模型通常由 CATIA、AVEVA Marine、沪东 DPS 等 CAD 软件输出，作为后续网格生成和结构强度校核的输入[1]。然而，由于不同 CAD 系统底层几何内核存在差异、累积浮点误差以及板厚去除过程中的精度损失，针对导出 B-Rep 格式模型进行结构 CAE 分析前处理时，经常出现以下几何缺陷：相邻曲线端点不完全重合、短直线碎片、圆弧段被过度切分、样条线拼接处切向不连续等。这些缺陷会导致后续网格生成出现狭长单元、负雅可比、拓扑裂缝（Topo Gaps），严重影响仿真精度，甚至使求解器无法收敛。

针对上述问题，本文基于开源几何内核 Open CASCADE，提出面向结构 CAE 分析的船舶结构 CAD 理想化模型自动处理方法，通过多阶段递进式修复，显著提升船舶 B-Rep 模型的几何质量，为后续的网格重划模块提供高质量的三角面片模型。

1 问题描述

B-Rep 模型作为船体结构 CAD 到 CAE 转换的中间载体，其几何质量直接决定了后续网格生成和结构强度校核的可行性、精度与效率。在实际应用中，由 CAD 软件导出并经 STEP/IGES 中间格式转换后导入

CAE 前处理的 B-Rep 模型普遍存在几何缺陷，这些缺陷的累积会显著影响仿真可信度，甚至使整个 CAE 分析流程失败。针对B-Rep模型的几何修复问题,前人提出了多种方法,Piegl 和 Tiller 系统总结了 NURBS 曲线曲面的拟合与逼近理论[2]；Open CASCADE 提供了 ShapeHealing 模块，涵盖点合并、边连接、曲面重建等基础功能[3]；Farin 详细讨论了曲线曲面光滑性、连续性阶数（C0/C1/C2）与几何造型工程化的关系[4]。然而，这些通用方法在面向船舶模型这种以大板加骨架特征为主、且要求严格对齐的特定场景时，仍存在如下几类问题：

（1）端点漂移与线环未闭合。受 CAD 软件底层几何内核差异（例如 Parasolid、ACIS、CGM 之间的浮点实现差异）、布尔运算与倒角的累积误差以及 STEP/IGES 中间格式转换时离散化量化损失的影响，B-Rep 模型中相邻曲线的公共端点往往不完全重合。这类间隙对参数化曲面而言视觉上不可见，但在后续网格生成时会被解析为拓扑裂缝，导致网格生成器插入大量狭长退化单元、产生负雅可比单元，甚至无法缝合出封闭的连续面。船体分段因板厚大、结构件密集，对该类缺陷尤为敏感。图 1 为实船模型中的拓扑裂缝。

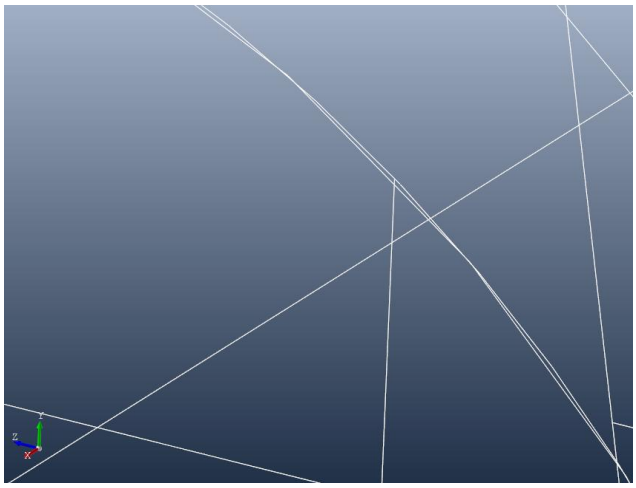


图 1 实际船体模型中的拓扑裂缝

（2）短边碎片与圆弧过度切分。船体结构的外板、甲板、舱壁、纵骨与肋骨等板架结构特征在 CAD 造型时通常由多段操作叠加生成，导出的 B-Rep 模型中存在大量长度在容差附近的短直线碎边串联，以及本应单段表达的圆弧被切分为数十段。短边碎片会显著放大后续网格生成处理的边数规模、降低网格质量并拖慢处理速度；圆弧过度切分则破坏了原几何的二阶连续性（C2）[5]，使得后续基于曲率的网格加密算法失效，且单条弧上的切向、曲率信息无法一致传递，影响表面网格的正交性。图 2 为实船模型中的连续碎边。

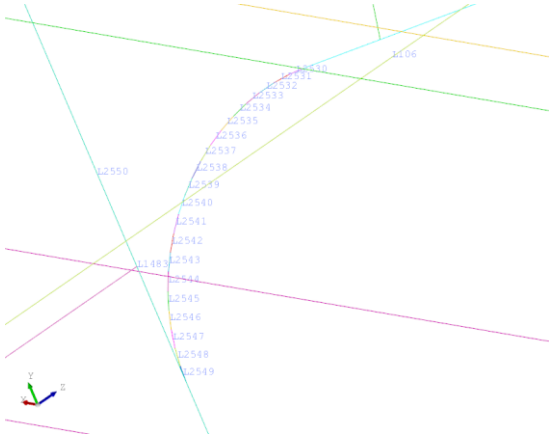


图 2 实船模型中的连续碎边

（3）BSpline 拼接翘曲与末端钩（End-hook）现象。当对 B-Rep 模型中的弧段进行合并或对端点进行吸合以闭合线环时，常规的最小二乘 B 样条拟合在拟合容差下表现出两类典型缺陷：1）若样本集合中存在间距接近拟合容差的近重合点对，拟合器为穿过每一对近重合点会导致高频振荡[6]，输出曲线的弧长可达真实弧长的数十至数百倍，几何形状完全失真；2）当强制端点偏离原曲线的自然包络位置时，移动最小二乘（MLS）平滑会在末端产生与原切向相反的末端钩，造成位置 C0 连续但切向反向的伪连接。

（4）船舶站位线上的线环对齐问题。船体结构的分段缝、坡口线、人孔与减轻孔等工艺特征通常沿船体的 X 或 Y 主轴方向严格对齐，但 B-Rep 模型中由于前述端点漂移的累积，沿站位方向主导的直线边的坐标常常有微小偏移，导致原本应共线的多条直线在放大图上呈现阶梯状错位。这种错位虽单个量级很小，但会在船体站位附近被多段累积放大，最终影响实际网格精度。

现有 Open CASCADE 的 ShapeHealing 模块提供了基础的点合并与边连接功能，但其方法存在局限性。其默认容差为 10e-7，无法稳定处理船舶建造场景中常见的焊缝宽度数量级的间隙；其拟合 API 未针对末端钩现象提供一致性约束，需要工程师进行人工修补。商业 CAD 软件，如 CATIA 的 Healing Assistant、NX 的 Geometry Repair 等虽然功能完备，但属于封闭生态，难以集成到自动化前置处理流水线中；且授权费用高昂，不适合集成到自主 CAE 软件。因此，亟需一套面向船舶结构 CAE 分析的船舶结构 CAD 理想化模型自动处理方法。

2 预处理方法

本文方法基于开源几何内核 Open CASCADE 设计，面向去除板厚后的船体结构 B-Rep 线框与曲面混合模型。第一步进行线框修复，根据原始几何，完成边类型分类与近共线短边链合并，消除碎边；第二步重构闭合线环，依次进行面类型识别、C2 曲率切分、连续弧段合并、直线对齐与端点吸合，输出几何一致的封闭构面线框；第三步执行保证位移协调性的三角化并输出网格原型。各阶段均设置面积守恒与包围盒检查，修复失败时保留原始几何，保证过程单调不劣化。

2.1 边类型分类、平面识别与线环闭合

先用 B-RepAdaptor_Curve 类型枚举快速判定边类型，对非标准参数曲线在参数域采样以二阶差分近似曲率，可识别以低次 B 样条表达的退化直边。对几何面线环采样后，根据偏差判定是否为平面。针对环内部结构缺陷，本文以最近端点优先的贪心策略重建边序；针对未闭合线环，先按端点聚类，开口不小于阈值的直接补建直线边，更大开口则寻找既有边截取部分后补线。补建边与邻环共享底层拓扑，保证后续网格化节点一致。

2.2 短边合并、曲率切分与共线链合并

首先将极短边塌缩为点，随后按长度阈值分级缝合，替换时相邻面同步更新。曲率切分以三点外接圆逐点计算曲率，在类型变化处与曲率相对跳跃处分段，用端点的切向插值逼近 B 样条。近共线短边并以角度、垂直距离、轴向间隙多重判据进行广度搜索，把近共线编组；同时以组外临近点为约束点，防止发生合并越界，合并发生翘曲时进行曲线连续性降级，仍超限则保留分段原几何。

2.3 连续弧段合并与直线对齐

针对原始模型中完整弧线特征退化为圆弧加 B 样条加短直线段的现象，检测同平面内端点距离，对底层完整几何表达均匀采样，并对齐两端锚点拟合为单根 B 样条线，避免对原始几何采样引入高频抖动，恢复弧段单段 C2 表达。轴向直线对齐以被两平面共享的线与相邻长边通过投影分裂并合并顶点，将微距相交转化为拓扑共享，消除站位线附近的锯齿状自由边。

2.4 端点吸合、端钩消除与抖动抑制

端点吸合是短边合并、顶点合并与微缝闭合都需要调用的处理算法，在重建边线时，端点极点与相邻极点同步调整，避免仅移动端点极点产生反向端钩，并在吸合后校验弧长比。拟合时采用多个方法抑制高频抖动，以吸合后的端点作为骨架点，已具有完整连续性的 B 样条不重采样直接复用，出现振荡后自动进行连续性降级后的逼近拟合。

2.5 位移协调性三角化

位移协调性三角化从三个方面保证：1）拓扑层面，重建线框间的几何交线经逐面布尔分裂转化为共享拓扑边，对共享边只离散一次，相邻两面沿交线自动获得相同节点序列；2）网格层面，在三角化进行校验，若仍存在协调性问题，则根据共享边节点链差异逐点插入对齐；3）数据层面，对节点按世界坐标叠加容差后去重，同坐标的节点合并，获得同一索引，保证一次修复在所有引用处同时生效。

3 实例验证

3.1 实验设置

实验平台为 Windows 11 + OpenCASCADE 7.6，算法以 C++实现并集成于船舶结构 CAE 软件 SAM

前处理模块。测试集为 10 个实船结构 CAD 模型，船型覆盖散货船、油船、工程船与集装箱船，均经 STEP/IGES 中间格式从船舶 CAD 软件导出，模型特征尺度 21～55 mm 量级，原始有效面数 145～602。重点考察两项评价指标：1）覆盖率，在原始模型各有效面上采样，统计预处理网格对采样点的覆盖比例，单面覆盖低于 90%计为缺失；2）位移协调性，共享边节点序列逐点比对的不一致边数。

3.2 结果与分析

10 个模型的处理结果见表 1。其中，9 个模型的覆盖率缺失为 0.00%，即预处理后的三角网格完整覆盖全部原始几何面；网格化面数相对原始面数的差异来自相交硬线分裂与共面重叠分区产生的子面，属于为保证位移协调性而进行的必要细分。全部模型共享边节点不一致数为 0。单模型处理耗时 20～160 s，满足工程应用需求。

表 1 实船模型预处理结果

模型	原始面数	网格化面数	三角形数	节点数	缺失占比/%	不一致边数
BC-20WT	588	1086/1087	6453	8229	0.00	0
BC-6WT	231	488/490	3191	4085	0.00	0
CV-10000TEU	276	828/829	3508	5160	0.00	0
CV-2000TEU	169	451/453	2553	3455	0.00	0
OT-10WT	178	258/258	1472	1952	0.00	0
OT-15WT	145	216/216	1150	1570	0.00	0
OT-5WT	200	223/224	1812	2287	0.005	0
OT-VLCC	170	379/379	2130	2858	0.00	0
BC20K	602	1092/1093	5996	7796	0.00	0
OC5K	187	409/409	2326	3130	0.00	0

以缺陷最复杂的 OT-5WT（5 万吨油船）为例，未经修复时其网格覆盖率缺失达 44.5%，主要损失来自多类缺陷，包括带退化标记但有几何长度的假退化边、距曲线真实端点达数毫米的悬空顶点、环内部结构缺陷以及难以修复的边界边丢失。经本文各级修复后，缺失占比降至 0.005%，其中残余部分源于原始导出几何本身的边界缺失，需在 CAD 端进行修复或利用网格编辑模块处理。

与 Open CASCADE ShapeHealing 模块对比表明：ShapeHealing 的默认容差（10e-7 量级）无法处理船体焊缝宽度级的大尺度间隙，其拟合 API 对近重合点与末端钩现象无约束力；本文方法采用船舶尺度自适应容差、端部整体调整与振荡后校验解决上述问题，且全部处理自动化完成，无需人工修补。如图 3 为 OC5K 模型经过预处理后导出的三角化离散模型，图 4 为三角化模型进行网格划分后在 SAM 软件中的网格质量检查结果。

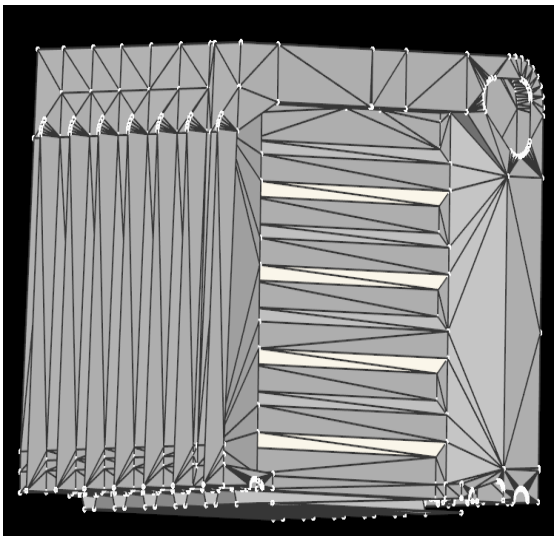


图 3 OC5K 预处理后的三角化离散模型

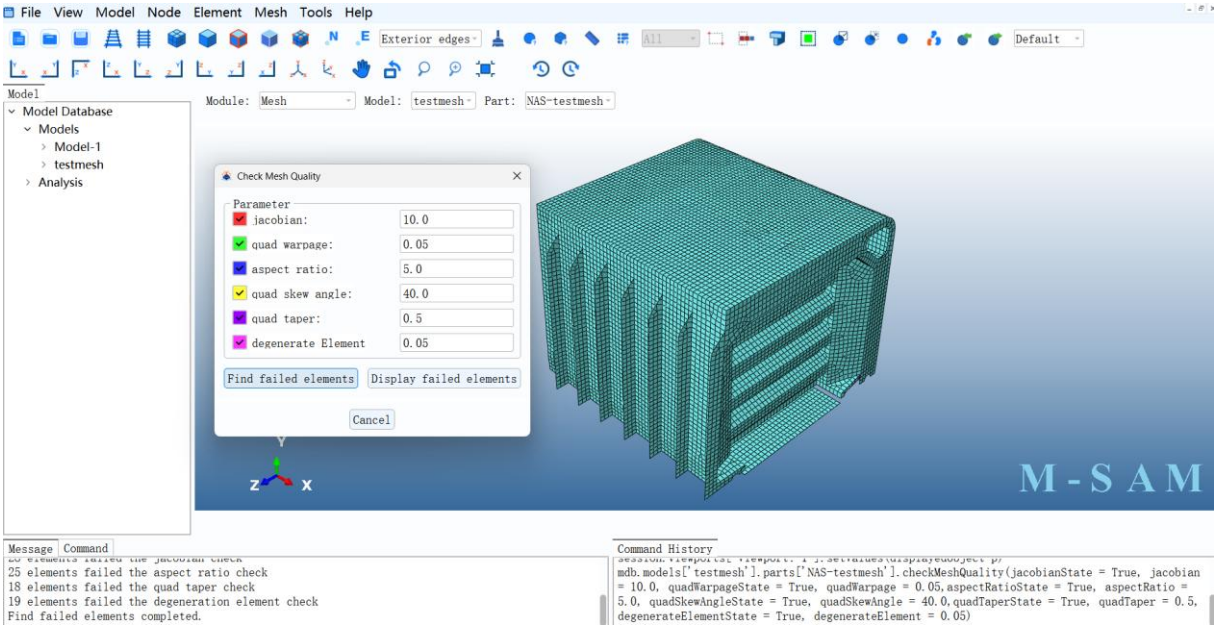


图 4 SAM 软件中网格质量检测结果

4 结语

本文针对船舶结构 CAD 模型到 CAE 软件转换中的几何缺陷问题，设计并实现了多阶段模型自动处理方法，通过弧段合并、直线对齐与端点吸合等步骤，系统性地解决了短边碎片、端点漂移、线环未闭合等关键问题。目前本方法已集成到船舶结构 CAE 软件 SAM 及前后处理软件 simWorks 中，通过了多个船舶模型的测试，为后续网格划分奠定了基础。

未来的工作包括以下两个方面：1）研究基于面曲率的 BSpline 降阶拟合，进一步简化模型；2）针对大规模装配 B-Rep 模型开发并行预处理版本，提升工程效率。

参 考 文 献:

[1] WINSLOW A M. Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 135(2): 128-138. https://www.osti.gov/biblio/621427.

[2] PIEGL L A, TILLER W. The NURBS Book (2nd Edition)[M]. New York: Springer, 1997. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-59223-2.

[3] Open Cascade SAS. Open CASCADE Technology 7.6.0 Documentation: Shape Healing[EB/OL]. (2022-12-15)[2025-08-14]. https://dev.opencascade.org/doc/overview/html/shape_healing.html.

[4] FARIN G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide (5th Edition)[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002. https://shop.elsevier.com/books/curves-and-surfaces-for-cagd/farin/978-1-55860-737-8.

[5] HOSCHEK J, LASSER D. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design[M]. Wellesley: A K Peters, 1993. https://dl.acm.org/doi/10.5555/174506.

[6] DIERCKX P. Curve and Surface Fitting with Splines[M]. Oxford: Clarendon Press, 1993. https://global.oup.com/academic/product/curve-and-surface-fitting-with-splines-9780198534402.

人工数据方法用于（无网格）神经算子学习

吴恒,，伍昊辰，卢本卓*

（中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190）

摘　要：面向偏微分方程的神经算子学习，为多查询仿真、参数扫描、反问题等场景提供无网格快速代理求解能力。当前主流技术路线面临固有效率瓶颈：传统数据驱动依赖大量数值仿真产生训练样本，受网格生成、反复数值求解的开销制约；模型驱动如 PINN 类方法虽无需标注数据，但存在优化困难、复杂算例收敛不稳定等问题,两者都难以满足高通量工程应用需求。本文介绍一套物理嵌入的数学人工数据 (MAD) 框架性思路，不从边界/源项正向求解方程，而是反向构造满足控制方程的精确训练样本，以此支撑神经算子监督训练。文中区分 MAD0、MAD1、MAD2 三种不同的人工数据生成策略，分析各自的设计思想、适用场景与内在局限；结合典型几何算例说明该框架的可行性，同时对现有算子学习各类路线做评述，并探讨该方向未来值得关注的拓展方向。

关键词：仿真效率，神经算子，人工数据，无网格方法

0 引言

神经算子学习旨在学习偏微分方程输入函数到场解之间的无穷维映射，训练完成后可以避开传统网格求解流程，实现无网格快速推理，对于需要成千上万次求解的高通量仿真任务极具价值。

当前主要分为数据驱动、模型驱动两条技术路线。传统数据驱动方式依靠有限差分、有限元等求解器批量产生训练样本，每一个样本都要走完几何处理、网格剖分、数值迭代全流程。当数据集规模扩大，样本制备本身就成为沉重负担，传统仿真固有效率极限，制约了算子学习走向实际工程应用。以 PINN 为代表的模型驱动方法，将控制方程残差纳入损失函数，摆脱对外部数据集依赖，但这类方法高度依赖优化过程，面对高振荡解、非凸复杂几何时，经常出现收敛困难、精度不足等现实问题。

面对上述现实痛点，我们思考：是否可以换一条思路，不再大量调用传统求解器，直接利用偏微分方程自身数学结构生成符合物理约束的训练数据？由此引出数学人工数据 MAD（Mathematical Artificial Data）这一范式。本文从框架层面阐述这套思想，对比不同生成策略，评述现有各类做法的利弊，并展望后续发展方向。

1 方法框架与不同实现思路

图 1 展示了数据驱动、模型驱动、MAD 人工数据驱动三者范式对比。

MAD 范式核心思想：反向构造训练样本。先生成候选解场，再通过微分算子回算出对应的源项、边界条件，直接得到满足控制方程的训练三元组，用于监督训练神经算子，推理阶段实现无网格预测。

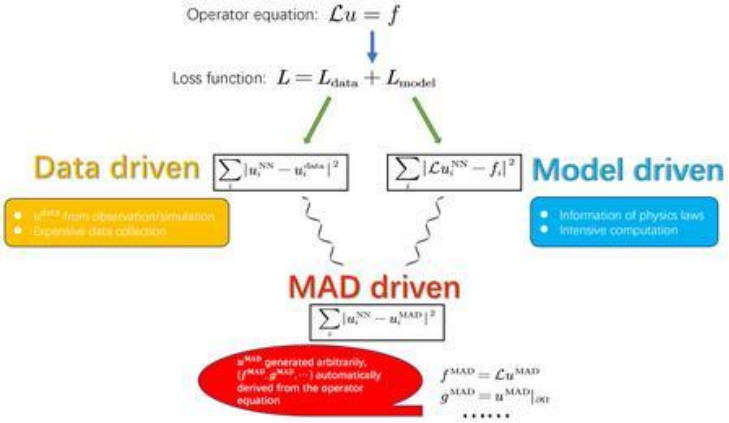


图 1 算子学习的三类范式对比：数据驱动、模型驱动、MAD 人工数据驱动

基于上述反向构造思想，可以发展出多种具体实现，本文归纳三类变体，它们在理论基础、适用方程、几何能力上有明显区分：

1）MAD0（神经网络生成器 + 自动微分） 使用随机神经网络作为解场生成器，借助自动微分回推源项与边界信息。该方案不需要方程具备解析基本解，原则上可以处理一般可微的线性、非线性偏微分方程。但数据集表达能力强依赖生成器设计；普通光滑生成器很难天然刻画边界层、间断、奇异性等精细物理结构，属于 “工具灵活，但需要针对问题做生成器定制” 的路线。

2）MAD1（基于基本解叠加） 针对存在显式全空间基本解的齐次线性方程（Laplace、Helmholtz 等），把奇异源点放置计算域外部，叠加基本解构造域内解析解样本。有 Runge 逼近性质作为理论支撑，几何适应性好，可以高效产出大批量精确样本；但局限是必须要有解析基本解，不能直接用于一般非线性、变系数介质问题。

3）MAD2（分离变量解析解基线） 利用三角函数-双曲函数组合构造 Laplace 方程调和解。虽然样本数学上精确，但带有很强笛卡尔坐标偏好，在不规则域缺少完备逼近能力。设置 MAD2 主要用于说明一个重要观点：仅仅样本是解析精确，并不代表数据集就具备良好泛化能力，生成器本身的数学逼近性质至关重要。

2 框架可行性与现有路线评述

我们在方形、圆盘、L 型非凸等多种几何区域开展测试（见图 2），对接 DeepONet、FNO 等主流神经算子架构，验证 MAD 框架思路的可行性。

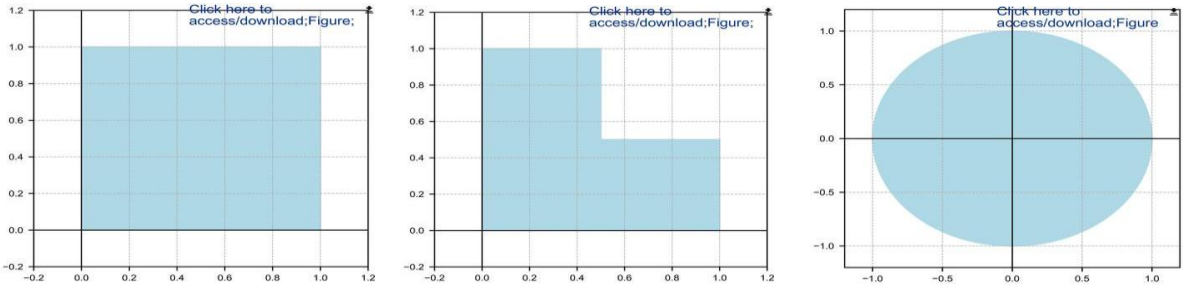


图 2 测试采用的典型计算域：方形、单位圆盘、L 型非凸域

从框架层面评述现有几类做法：

传统求解器采样的数据驱动：样本物理真实性高，但计算成本昂贵，大规模数据集代价太高；

PINN 类模型驱动：省去数据制备，但是优化难度大，复杂问题稳定性难以保障；

MAD 人工数据路线：样本生成效率高，可以产出解析精确的训练对，但不是普适万能方案，每一类变体都有明确适用边界，不能覆盖全部物理场景。

我们认为 MAD 不应理解为完全替代传统仿真，更合理的模式是混合使用：用 MAD 大批量生成理论样本，搭配少量高精度仿真或实测数据做校正，兼顾训练效率与真实物理约束。

3 思考与未来展望

站在框架角度，人工数据给神经算子学习提供了新的数据制备路径，但仍存在大量开放问题值得进一步研究：

第一，生成器设计是 MAD 方法的核心瓶颈。面向边界层、激波、间断、奇异性等复杂物理特征，需要发展针对性的专用生成器，提升数据集对非线性方程解空间的覆盖度及对复杂物理现象的表征能力。

第二，拓展适用方程类型。目前 MAD1 局限于部分线性方程；需要进一步向变系数介质、时变演化方程推进；边界型神经算子（MAD-BNO）只在部分模型完成初步验证，面向复杂几何的工程化能力有待发展。

第三，建立混合数据范式。研究如何把 MAD 人工样本、传统仿真数据、实验观测数据有效融合，平衡效率、泛化性与真实物理约束，向实际多物理应用场景靠拢。

第四，评价体系完善。针对人工生成数据集，需要建立一套评估指标，衡量数据集的物理代表性，避免只看测试集误差而忽略物理完备性。

4 结论

针对传统仿真效率制约无网格神经算子学习的现实困境，本文从框架层面介绍 MAD 物理嵌入人工数据思想，通过反向构造满足 PDE 的精确样本，开辟一套区别于传统求解器采样、PINN 残差训练的数据制备思路。 MAD0、MAD1、MAD2 代表不同实现路径，各有优势与明确局限；该方法并不追求完全取代传统仿真，更适合作为补充手段，可与传统数据形成混合数据集。未来重点在于生成器设计、方程范围拓展、混合数据范式构建，推动神经算子代理模型走向更多实际仿真场景。

参考文献

[1] Lu L, Jin P, Pang G, et al. Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators[J]. Nature Machine Intelligence, 2021, 3(3):218-229.

[2] Li Z, Kovachki N, Azizzadenesheli K, et al. Fourier neural operator for parametric partial differential equations[EB/OL].arXiv:2010.08895,2020.

[3] Wu H, Lu B Z. Mathematical artificial data for operator learning[J]. https://arxiv.org/abs/2507.06752, 2026.

通讯作者：卢本卓，E-mail：bzlu@lsec.cc.ac.cn

三角翼标模升力平台特性的多面体网格收敛性研究

吴佳明

（中国航空工业集团公司沈阳空气动力研究所，计算空气动力学重点实验室，高速高雷诺数气动力航空科技重点实验室，沈阳 110034）

摘　要：针对某三角翼飞机标模在 12°-16°攻角区间出现的升力平台现象，本文系统研究了多面体网格密度与分布对升力特性预测精度的影响。通过构建网格量从 500 万至 2000 万单元的系列多面体网格，采用混合测试策略（即同时调整面网格、空间网格及边界层网格的组合），对比分析了不同网格组合方案下升力系数的收敛行为。研究发现，由于商业软件网格的空间耗散较快，单独加密面网格效果有限，而加密空间网格对改善升力平台预测效果最为显著，但会导致升力平台出现的攻角相比试验值有所滞后。只有当面网格与空间网格同步加密时，升力平台的出现攻角和升力系数幅值才能完美吻合试验值。本文提出了一种兼顾计算精度与效率的多面体网格分布方案，可为同类问题的网格生成提供参考。

关键词：三角翼标模，升力平台，多面体网格，网格收敛性，网格分布优化

0 引言

三角翼布局在大迎角飞行时会产生稳定的前缘涡，其破裂与再附着行为直接影响升力特性。许多三角翼标模在特定攻角范围内会出现升力系数增长减缓甚至停滞的平台区，这一现象的精确数值模拟对网格质量高度敏感[1]。多面体网格因其对复杂几何的良好适应性及较少的单元数量，在 CFD 中应用日益广泛。然而，如何针对升力平台这类精细流动特征设计高效的多面体网格分布，仍缺乏系统的研究。本文旨在通过多组混合测试的对比算例，探索一种节省网格资源的同时保证精度的网格生成方法。

1 问题描述

研究对象为一典型双三角翼标模，计算状态为 Ma=0.2，$Re=2\times10^6$，攻角范围为-2°-20°。采用基于压力基求解器的稳态 RANS 方法，湍流模型选用 SST k-ω。

为探究网格影响，设计了如下混合测试的网格族（所有网格均采用常规通用的机翼前缘加密）：

- 网格组 1（低网格量基准）： 多面体网格，全局尺寸适当，网格量约 500 万，含 15 层棱柱层边界层。

- 网格组 2（侧重面网格加密）： 在基准基础上，主要加密机身周围的背景空间网格，网格量增至约 700 万。
- 网格组 3（侧重空间加密）： 在基准基础上，主要加密机翼前缘及上表面的面网格，网格量增至约 600 万。
- 网格组 4（空间+面网格同步加密）： 同时加密空间网格和面网格，网格量约 1600 万。
- 网格组 5（全加密参考解）： 同时加密空间、面网格及边界层，网格量约 2000 万。

2 计算结果与分析

图 1 展示了各网格预测的升力系数随攻角变化曲线。可以看出，所有网格均能定性反映出 12°-16°间的升力平台趋势，但定量差异显著。基准网格组 1（500 万）未能在 16°攻角内模拟出升力平台现象。网格组 2（侧重面网格加密，700 万）与网格组 3（侧重空间加密，600 万）有一定改善效果，以较小的网格量模拟出升力平台现象，但仍存在一个问题——升力平台出现的攻角相比试验值滞后约 2°，即平台起始点由 12°推迟至 14°左右。网格组 4（空间+面网格同步加密，1600 万）表现最佳，不仅升力系数幅值与 2000 万参考解一致，且升力平台的出现攻角（12°）完全吻合试验值。网格组 5（全加密，2000 万）的结果与网格组 4 基本重合，说明在空间和面网格均已充分加密的前提下，进一步加密边界层的收益有限。

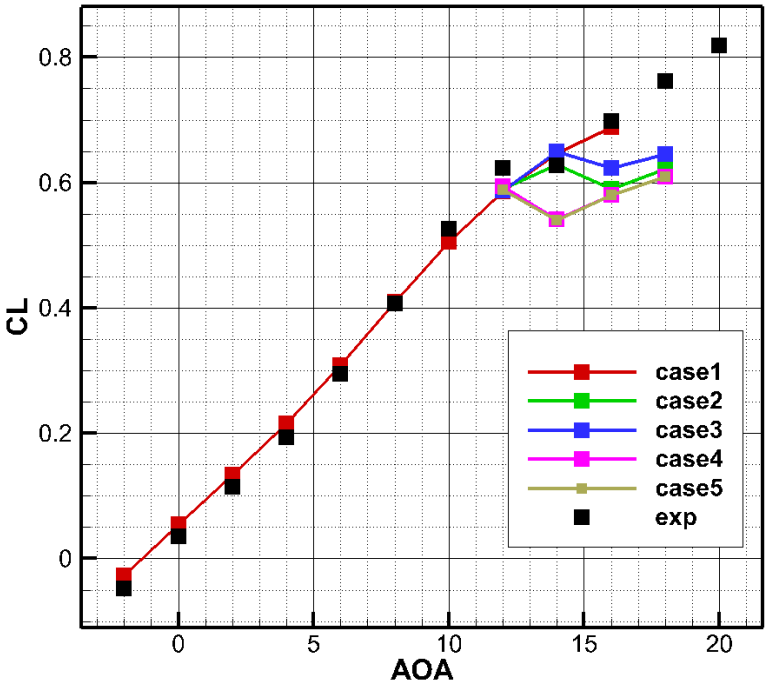


图 1 不同网格策略下升力系数对比

3 结论

本文针对三角翼标模的升力平台问题，采用混合测试策略开展了多面体网格收敛性研究，得出以下结论：由于商业软件网格的空间耗散较快，加密空间网格是提升升力平台幅值预测精度的最有效手段，但单独使用时会导致升力平台出现的攻角相比试验值滞后约 2° 。单纯加密面网格对改善升力平台预测的帮助有限，这与文献中常见的结论有所不同，原因在于商软数值格式的耗散特性使得涡核区域的误差占主导。只有当面网格与空间网格同步加密时，才能在较低网格量（约 1600 万）下同时准确预测升力平台的幅值和出现攻角，完美吻合试验值。

基于以上结论，推荐针对此类三角翼模型采用“空间加密为主、面加密为辅、同步协调”的多面体网格分布策略，以准确模拟升力平台现象。未来工作将进一步将该方法推广至带舵面偏转及动态失速工况，并探索低耗散数值格式与网格策略的协同效应。

参考文献:

[1] Cummings R M, Morton S A, Siegel S G. Numerical prediction of vortex breakdown over a delta wing using detached-eddy simulation[J]. Journal of Aircraft, 2003, 40(4): 736-744.

网格生成策略对飞行器尾迹涡模拟的影响研究

贺宇豪，吴佳明，姜延鑫，章锦威

（中国航空工业空气动力研究院，辽宁 沈阳 110034）

摘　要：翼尖涡在后方流场中诱导出强烈的切向气流速度，导致后机进入前机所形成的尾流区域时气动力剧烈变化，发生滚转、倾斜、剧烈俯仰等危险情况。利用计算流体力学方法可以对前后机的气动干扰进行模拟，对危险区域进行预测，为后机飞行路径、起飞间隔等决策提供依据。对前机尾迹涡流场的准确模拟是实现后机受扰气动力计算的关键。对 NACA0015 标模的数值模拟结果与试验对比表明，采用六面体网格，在涡核区域加密至每个方向 30 个网格单元时，可获得清晰完整的涡核结果，涡核位置的法向及展向速度分布与试验结果一致，涡核位置预测与试验结果接近。

关键词：数值模拟，网格生成，结构网格，翼尖涡

0 引　言

尾涡是飞机获得升力的同时生成的。由空气动力学可知：机翼产生升力的同时，下翼面的压强高于上翼面，在两个翼尖处的气流就会由下翼面绕过翼尖流到上翼面，同时仍具有相对向后流动的速度，其结果是在两个机翼后方形成两个旋涡，旋涡中的气流一边旋转一边向后流动，而且两个旋涡的旋转方向相反，因而称之为翼尖涡流。翼尖涡在后方流场中诱导出强烈的切向气流速度，导致后机进入前机所形成的尾流区域时气动力剧烈变化，发生滚转、倾斜、剧烈俯仰等危险情况。利用计算流体力学方法可以对前后机的气动干扰进行模拟，对危险区域进行预测，为后机飞行路径、起飞间隔等决策提供依据。

1 问题描述

目前工程应用中针对单一飞行器的常规气动力的数值模拟已经非常成熟，而对多个飞行器的气动干扰数值模拟仍有一些需要解决的问题。对前机尾迹涡流场的准确模拟是实现后机受扰气动力计算的关键。与近壁区域计算不同，对翼尖涡的模拟需准确模拟其演化过程，包括翼尖涡位置、涡核半径、强度变化等的准确解算，为后机提供准确的来流环境。从计算网格生成的角度，为了实现尾迹涡流场的准确模拟，需要在流场关键区域保证适宜的网格尺度和网格形式。

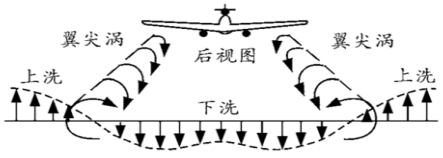


图 1 典型飞机的尾涡流场

2 结　论

针对前后机气动干扰数值模拟问题，本文进行了网格生成策略研究，探索了网格尺度、网格形式对尾迹涡模拟的影响。对 NACA0015 标模的数值模拟结果与试验对比表明，采用六面体网格，在涡核区域加密至每个方向 30 个网格单元时，可获得清晰完整的涡核结果，涡核位置的法向及展向速度分布与试验结果一致，涡核位置预测与试验结果接近。

未来的工作包括以下几个方面：1)基于求解器及网格生成软件的涡尾迹区域网格自动加密流程搭建；2）笛卡尔网格及其自适应加密方法 3）适用于高精度求解方法（DES/LES 等）的网格生成策略研究。

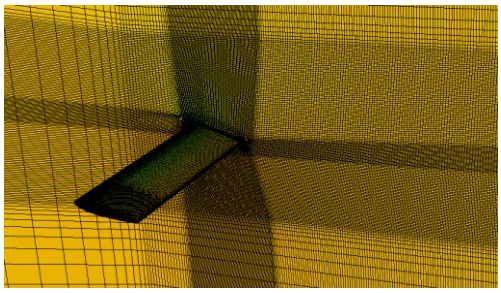


图 2 NACA0015 翼型计算网格

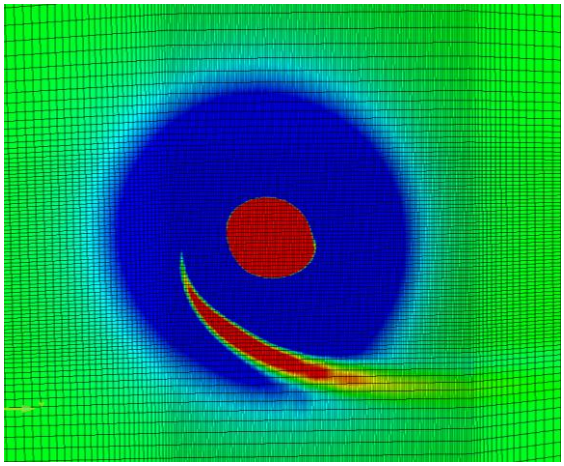


图 3 翼尖涡涡核及网格尺度

参 考 文 献:

[1]K.W.McAlister. NACA0015 Wing Pressure and Trailing Vortex Measurements[J]. NASA Technical,1991:3151.

[2] Mackenzie A I. Measured changes in C-band radar reflectivity of clear air caused by aircraft wake vortices [J]. NASA Technical, 1997: 3671.

基于交叉场引导与分层筛选的网格弱特征提取算法

叶元浩，陈仁杰*（中国科学技术大学数学科学学院）

摘　要：三维网格模型的特征提取是计算机辅助设计与逆向工程领域的核心研究课题之一。现有方法多聚焦于曲率突变的强特征（如尖锐棱边），而对于倒角、平滑衔接面等几何过渡区域的弱特征，由于局部几何信号微弱且信噪比低，常面临识别精度不足与拓扑结构断裂的挑战。针对上述问题，本文提出一种基于交叉场（Cross-Field）引导的分层递进式网格特征提取算法。本算法采用“分而治之”策略，对复杂模型实施层级化处理。首先，基于二面角检测构建强特征骨架，为后续处理提供可靠初值；其次，引入改进的隐式二次曲面拟合能量函数作为区域筛选准则，动态剔除单一语义区域，精准锁定潜在弱特征区域，其核心创新在于，将交叉场理论引入含柱面组件的建模场景，利用柱面高斯曲率为零的特性估计全局母线方向，构建结构化且无奇异点的交叉场，借助场线的全局连续性约束实现弱特征的离散追踪与精准定位；最后，结合图论连通性分析识别并补全残余弱特征。在 ABC 数据集（包含大量复杂过渡结构的工业 CAD 模型）上的实验表明，相较于脊谷线方法、变分形状近似法（VSA）及传统二面角法，本算法在弱特征提取的完整性与几何精度上均表现出显著优势。同时，算法平均处理时间维持在秒级，兼具优异的计算效率与鲁棒性，充分验证了其在工业数字化场景中的应用潜力。

关键词：特征提取；弱特征；交叉场；三维网格

Cross-Field Guided and Hierarchically Screened Weak Feature Extraction for Surface Meshes

Abstract: Feature extraction from 3D meshes is central to CAD and Reverse Engineering. While existing methods excel at detecting strong features like sharp edges, they often struggle with weak features (e.g., fillets, blends) due to low signal-to-noise ratios and subtle geometric signals. To address this, we propose a Cross-Field guided hierarchical mesh feature extraction algorithm. Adopting a "divide and conquer" strategy, our method first constructs a strong feature skeleton via dihedral angle detection. It then employs an improved implicit quadric surface fitting energy to filter homogeneous regions and isolate potential weak features. The core innovation involves leveraging the zero Gaussian curvature of cylindrical components to estimate global generator directions, constructing a structured, singularity-free Cross-Field. This enables robust discrete tracking of weak features—including those not explicitly present as mesh edges in the input triangulation—via global continuity constraints, followed by graph-based completion. Experiments on the ABC dataset demonstrate that our approach significantly outperforms Ridge-and-Valley, VSA, and traditional dihedral methods in both completeness and geometric accuracy. With processing times in seconds, the algorithm offers superior efficiency and robustness for industrial applications.

Key words: feature extraction; weak feature; cross-field; 3D triangular mesh

随着先进制造与逆向工程技术的演进，三维网格数据已成为表征复杂几何实体的标准载体。在工业计算机辅助设计流程中，特征线提取是解析几何语义的核心环节，直接决定了后续参数化建模[1]、网格简化[2-3]、重网格化[4-5]、变形处理[6-7]及功能映射[8]等关键任务的成败。依据几何显著性差异，特征线可划分为强特征与弱特征：前者对应二面角突变的尖锐棱边；后者则表现为倒角、变半径圆角及自由曲面间连续拼接等平滑过渡区域。

尽管该领域已有数十年研究积累，弱特征提取的鲁棒性问题仍是当前的技术瓶颈。早期基于微分几何的方法虽理论基础严密，但在离散网格的弱特征区域，微弱的几何信号极易淹没于采样噪声，导致大量伪特征产生或拓扑断裂。随后的几何阈值法虽在模型的锐边检测中表现良好，但面对曲率渐变的弱特征时，因几何属性趋近平面，单一处理阶段内的固定阈值难以同时兼顾召回率与准确率：阈值放宽则伪特征泛滥，收紧则弱特征系统性漏检。此外，现有的基于对称性分析、曲面分割乃至机器学习的方法，大多仍受限于局部几何阈值的敏感性，无法系统性地解决平滑过渡区的弱特征遗漏问题。

针对上述挑战，本文引入交叉场理论作为弱特征提取的新范式。交叉场的本质优势在于能够利用全局连续性约束，屏蔽离散网格表面的局部低阶噪声扰动。特别地，对于工业 CAD 建模中占主导地位的常半径倒角（等距扫掠生成的柱面型过渡面），其与相邻曲面间的弱特征边界沿母线方向延伸。这一解析先验为在此类结构上构建全局一致、无奇异点的有序交叉场提供了明确依据。通过将传统的离散高阶微分计算转化为受控的方向场线流线追踪问题，本算法从根本上克服了传统主曲率方向在弱特征区域由于信号微弱而极易发生蛇形紊乱与拓扑断裂的固有缺陷，实现了细微过渡特征的高保真恢复。需要说明的是，本文并不回避阈值化策略本身，而是重构其在提取管线中的角色：固定二面角阈值仅承担高召回率的候选生成与强特征骨架构建（3.2 节），特征的确证由能量筛选（3.3 节）、交叉场追踪（3.4/3.5 节）与迭代阈值校验（3.6 节）等多机制分层完成，从而将"召回–精度"的矛盾解耦到管线各层级分别消解。

本文的主要贡献如下：递进式特征提取架构，采用“分而治之”策略，结合改进的二面角补全图结构初始化强特征骨架，为后续异构子网格的解耦处理提供了具备拓扑连通性的边界约束；高效区域筛选机制，引入改进的自适应隐式二次曲面拟合能量函数，通过量化拟合残差动态界定潜在弱特征区域，有效剔除了单一语义区域，显著降低了计算复杂度；异构几何分治驱动的交叉场追踪，区别于全局统一优化交叉场的重网格化方法，本文针对工业场景中占主导地位的柱面与平面过渡组件，提出了轻量级的解析交叉场构建机制，在降低计算复杂度的同时，大幅提升了主流弱特征的定位精度。

1 相关工作

从三维网格中提取特征线一直是计算机图形学与几何建模领域备受关注的课题。

早期的研究主要基于微分几何。Ohtake 等人[9]通过高质量地估计主曲率极值的高阶偏导数设计了一种追踪脊线与谷线的方法。Lu 等人[10]在脊线与谷线方法的基础上，进一步简化和补全了特征线框架。Yoshizawa 等人[11]以及 Kim 和 Kim[12]则通过局部邻域分析提高了计算效率。Lai 等人[13]引入积分不变量来替代不稳定的微分算子，显著增强了算法对网格离散化噪声的鲁棒性。尽管这些方法理论严谨，但它们往往在曲率极值缺乏语义意义的区域产生虚假特征，并且难以在复杂区域维持拓扑连续性。

利用法向量或曲率梯度的几何方法因其简洁性和物理可解释性而被广泛采用。Nomura 和 Hamada[14]通过对相邻三角形间的二面角进行阈值处理来识别特征边，在具有尖锐不连续性的机械零件上取得了良好效果。Weinkauf 和 Gunther[15]开发了一种基于主曲率的拓扑感知算子，以捕捉光滑表面上的显著结构。Kim 等人[16]进一步推动了这一方向，将张量投票集成到法向空间中，通过局部邻域的方向共识实现了对角点、锐利边缘和平面区域的语义分类。然而，这些技术在曲率渐变的区域经常产生冗余的曲线，并且无法捕捉弱特征。

认识到对称性在人类形状感知中的作用后，若干研究将结构规律性纳入特征推断中。Liu 等人[17]通过分析横截面对称性从含噪点云中提取特征，有效抑制了噪声引起的伪影。Sunkel 等人[18]利用马尔可夫随机场对线性特征进行概率建模，以强制结构连贯性。Gehre 等人[19]通过对称传播和模板匹配解决了特征网络中的缺失段问题。虽然这些方法对于具有重复模式的建筑或工程部件非常有效，但它们严重依赖显式的对称性假设，难以泛

化到工业设计中普遍存在的非对称或有机形状。

另一种方法将特征线视为均质几何区域之间的边界。Cohen-Steiner 等人[20]开创了变分形状近似（VSA）方法，通过 Lloyd 聚类将网格划分为近平面片段。Yan 等人[21]将 VSA 扩展至一般二次曲面基元，更好地捕捉了工业零件的语义。区域生长策略也发挥了关键作用：Nieser 等人[1]从低曲率种子点开始生长形成面片，并沿边界提取特征曲线；而 Yamakawa 和 Shimada[22]则直接基于角度一致性对三角形进行聚类。分层框架进一步丰富了表示能力：Mehra 等人[2]将 VSA 与曲线简化相结合以构建多尺度抽象；De Goes 等人[3]提出了“外骨骼”模型，先抽象出粗略的曲线网络，再将其细化为几何特征。随后的创新包括显著曲线的尺度自适应保留（Gehre 等人[23]）、基于霍夫变换的 3D 曲线识别（Torrente 等人[24]）以及通过长度与曲率加权对密集曲线集进行后处理（Cao 等人[25]）。受到 Pietroni 等人[26]在四边形网格化工作中交叉场应用的启发，本文亦将交叉场应用到特征线提取框架中。

近年来，针对原始点云输入的基于学习的方法纷纷涌现。Sharma 等人[27]将点云分解为参数化曲面片；Hu 等人[28]则利用多尺度补丁上下文分析进行室内场景的语义分割。虽然这些方法不直接输出特征线，但它们提供了结构化的几何先验，有助于下游的特征提取。

综上所述，无论是基于微分几何、曲率、对称性、曲面分割还是机器学习的现有方法都存在共同的局限性：过度依赖局部几何阈值。这导致在平滑过渡区域系统性地遗漏弱特征。这正是本研究积极探索的方向。

2 隐式二次曲面拟合

在提取特征前，我们需要判断网格内部是否存在弱特征，以避免无效计算，为第三章的算法提供基础。我们从变分形状近似法（VSA）出发，该方法通常通过拟合隐式二次曲面与 Lloyd 聚类交替迭代的方式将网格进行划分。Yan 等人[21]在 2012 年的工作详细阐述了 VSA 方法的原理，但本文方法以二面角信息作为分割的强几何先验，该先验已预先确定了大部分区域边界，使得分割结果对拟合误差的反馈依赖显著降低。因此，本文将 VSA 的双重迭代调整为仅保留隐式二次曲面拟合的单次优化流程以提高计算效率，本文的改进体现在流程与判据层面而非能量泛函本身

隐式二次曲面拟合算法如下：

输入：网格 R 。

输出：二次隐式曲面的系数 $\mathbf{C}$ ，平方欧式距离能量 E_d ，法向偏差能量 E_n 。

Step1. 构造二次隐式曲面 $f(\mathbf{x})$ ：

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{x})=0, \mathbf{x}=[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 \\
&f(\mathbf{x})=\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{F} \\
&\mathbf{C}=[c_0,c_1,\cdots,c_9]^T \\
&\mathbf{F}=[1,x,y,z,xy,xz,yz,x^2,y^2,z^2]^T
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{C}$ 为二次隐式曲面的待定系数，需要我们在后续的计算中得出。

Step2. 构造二次隐式曲面拟合能量函数：

$$E(t,f)=E_d(t,f)+\omega E_n(t,f) \tag{1}$$

在(1)式中 t 代表离散的三角面片全体， E_d 衡量平方欧式距离（ L^2 范数），E_n 衡量 t 到 f 的法向偏差（ $L^{2,1}$ 范数）， ω 是常系数，用于平衡两个能量，在本文中均取 0.5（沿用[21]）。已知点与二次曲面之间的精确距离可通过求解六次单变量方程来计算。由于我们需要对三角形区域进行平方距离积分，而非离散采样点的距离求和，这种精确计算方法效率过低而难以应用。基于效率与精度的平衡考量，我们采用一阶近似法[29]替代精确距离计算。三角形与二次曲面之间的混合距离分别由以下公式近似表示：

$$E_d(t,f)=\int_t \frac{f(\mathbf{x})^2}{|\nabla f(\mathbf{x})|^2}\cdot d\sigma \tag{2}$$

$$E_n(t,f)=\int_t \left(\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}-\mathbf{n}_t\right)^2\cdot d\sigma \tag{3}$$

在(3)式中 $\mathbf{n}_t$ 表示三角面片的单位法向量。

Step3. 初始曲面拟合，即 $\mathbf{C}$ 初值的计算：

为了最小化每个区域能量函数 $E(t,f)$ ，需要求解一个非线性最小二乘优化问题，这一过程相当耗时。所以通过两个步骤高效解决该问题，即初始曲面拟合，最小二乘拟合，本步骤将详细描述初始曲面拟合的具体内容。

拟合曲面初值时，我们可以仅考虑平方欧式距离能量，即式(2)。对输入网格 R 中的所有三角面片进行求和，我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
E_d(R,f^0)&=\sum_{t_j\in R} E_d(t_j,f^0) \\
&\approx \frac{\sum_{t_j\in R}\int_{t_j} f^0(\mathbf{x})^2\cdot d\sigma}{\sum_{t_j\in R}\int_{t_j}|\nabla f^0(\mathbf{x})|^2\cdot d\sigma} \\
&=\frac{\mathbf{C_0}^T\mathbf{M_t}\mathbf{C_0}}{\mathbf{C_0}^T\mathbf{N_t}\mathbf{C_0}}
\end{aligned}
$$

其中 R 为输入网格，f^0 表示该网格的初始拟合函数，$\mathbf{C_0}$ 表示二次曲面待定系数的初值，$\mathbf{M_t}$ 和 $\mathbf{N_t}$ 分别表示三角形区域两种函数积分项求和产生的系数矩阵。

因此，$E_d(R,f^0)$ 的最小化问题被简化为计算广义特征值问题最小特征值对应的特征向量[30]：

$$\mathbf{M_t C_0} = \lambda \mathbf{N_t C_0}$$

Step4. 最小二乘拟合：

初始曲面拟合步骤对未知二次曲面做出了良好估计。在 Step2 中，我们计算每个三角形 $t_j \in R$ 在其质心 $\mathbf{c_j}$ 处的梯度 $\nabla f^0(\mathbf{c_j})$。我们通过将 $|\nabla f^0(\mathbf{c_j})|$ 代入方程(2)(3)对每个三角形进行单点梯度近似。输入网格 R 的能量函数近似表示如下：

$$E(R,f) \approx \sum_{t_j \in R} \int_{t_j} \frac{f(\mathbf{x})^2}{|\nabla f^0(\mathbf{c_j})|^2} \cdot d\sigma + \omega \sum_{t_j \in R} \int_{t_j} \left(\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f^0(\mathbf{c_j})|} - \mathbf{n}_t\right)^2 \cdot d\sigma$$

通过这种近似，R 的能量函数优化被简化为一个线性最小二乘问题，这与文献[31]提出的方法相似。我们采用 Cholesky 分解来求解所得的线性方程组。

Step5. 迭代执行：

重复 Step4，每次迭代用新的 $\mathbf{C_0}$ 带入质心 $\mathbf{c_j}$ 处的梯度 $\nabla f^0(\mathbf{c_j})$ 的近似，直到循环达到 30 次或者能量收敛，最终得到二次隐式曲面的待定系数 $\mathbf{C}$ 以及平方欧式距离能量 E_d，法向偏差能量 E_n。

实验结果表明若某个子网格的隐式二次曲面拟合能量收敛值较大，则说明单个曲面拟合效果差，其内部通常包含多个几何语义不同的区域。特别地，当该网格中存在局部平面区域时，该平面与其邻接曲面间的边界（按照弱特征定义属于倒角结构或者面拼接结构）构成弱特征。此外，通过对拟合过程的深入分析发现，能量函数中的法向偏差项采用质心处梯度的一阶近似进行计算。尽管该近似策略在迭代优化阶段有助于提升收敛稳定性，但其数值偏差过大导致对最终拟合质量的评估缺乏可靠性。

综合上述考量，提出如下弱特征存在函数：

$$f_{exist}(R) = 10000(\lg(\frac{E_d(R,f)}{L_{scale}}) + 6) + (1 + \frac{1000}{|R|})E_{plate}(R)$$

$$E_{plate}(R) = w_0 |R_0| + w_1 |R_1| + w_2 |R_2|$$

其中 f_{exist} 为弱特征存在函数，f 为拟合的隐式二次曲面，L_{scale} 为模型的尺度归一化因子（用于消除尺度差异导致的能量差异），$|R|$ 表示网格内的面片数，$|R_0|$，$|R_1|$，$|R_2|$ 分别表示网格内潜在特征边（二面角小于 179°大于 150°）为 0，1，2 的面片数，w_0，w_1，w_2 为对应权重因子。

在覆盖各类几何构造的大量实验中，当 $w_0 = 100$，$w_1 = 10$，$w_2 = 1$，f_{exist} 的阈值设定为 30000 时，该筛选策略在检测精度与计算效率之间实现了优异的平衡（图 3 显示了该能量对 fandisk 模型的筛选效果）。另外，当网格中的平面部分统一处理完成后，f_{exist} 相应去除平面能量项 E_{plate} 并相应调整阈值以匹配不同的筛选需要。

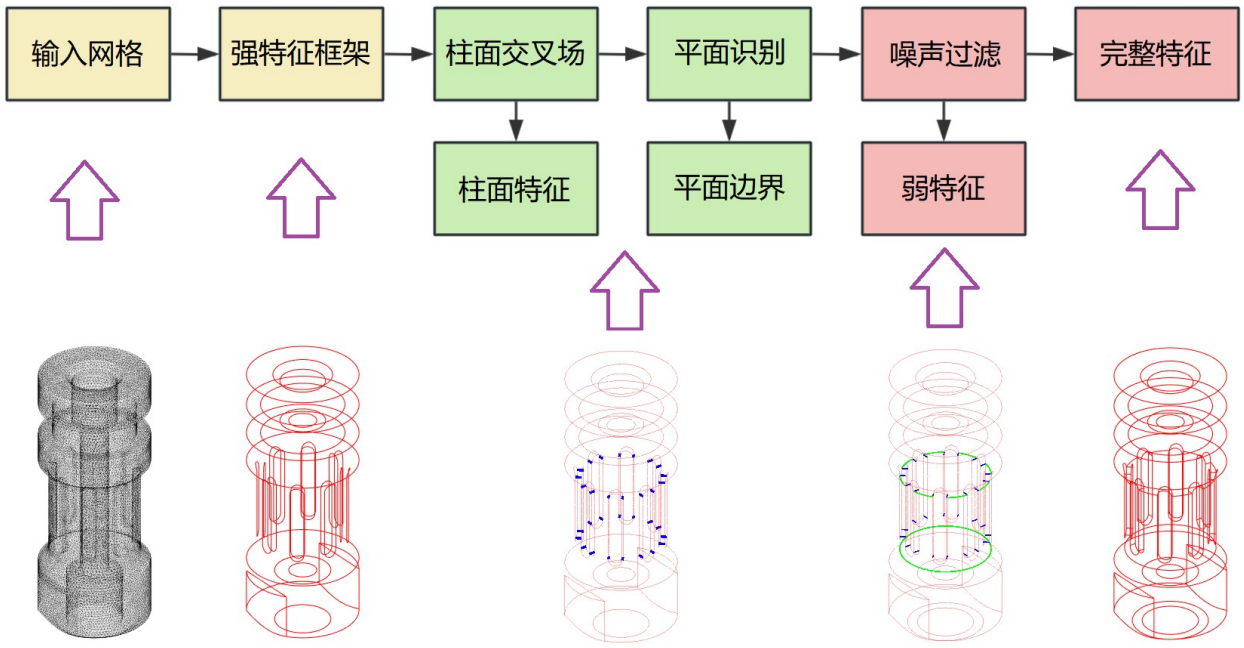


图 1　弱特征提取算法流程图

3 弱特征提取算法

3.1 算法流程

本文算法采用了一种渐进式特征提取框架，通过分层策略从原始三角网格中鲁棒地恢复几何特征线。如图 1 所示，该流程经过系统化设计与迭代优化，在确保计算效率的同时，显著提升了弱特征的检测能力。

首先，利用二面角阈值初步识别强特征边，并将这些边组织成图结构，智能地补全断裂或缺失的线段，从而构建出完整的强特征骨架。

其次，利用该骨架将输入网格划分为若干子曲面片。对每个子曲面计算弱特征存在性能量，仅超过阈值的子曲面才会进入后续的弱特征提取阶段。

接着，通过最小二乘法拟合表面法向量来识别柱面。在柱面上构建有序交叉场，并沿柱面母线方向将边界曲线等距映射到平面域。在该平面域内，高精度检测曲率导数的零点并建立对应的点对。随后，沿交叉场的主导方向在这些点对之间追踪弱特征线，从而实现对细微过渡特征的精确恢复。

对于包含嵌入式平面结构的曲面，利用隐式二次曲面拟合算法定位平面边界，将曲面片的剩余（非平面）部分沿平面方向局部展平，并构建局部有序交叉场以模拟柱面的边界行为。真实的平面边界与重构的虚拟边界均被视为弱特征线，用于进一步的网格分割，任何剩余的复杂子曲面则被送入下一阶段处理。

最后，针对高度复杂的曲面，利用图联通结构配合二面角过滤识别弱特征，在抑制噪声的同时保留几何显著性候选边。实验表明，该策略在各类挑战性场景中均能实现高效率与高鲁棒性。

3.2 强特征框架初始化与几何补全

由于逆向工程输入的三维离散网格常蕴含采样噪声，低阶局部微分算子极易受局部法向微幅扰动的干扰。为此，本算法首先采用经典的双边网格去噪[32]对原始网格实施微幅预处理，在保持宏观不连续特征边界的前提下抑制高频噪声，各项参数沿用论文推荐参数。

在初始强特征边缘的粗筛阶段，若直接引入高阶微分不变量（如曲率不变量），虽然抗噪性佳，但其高昂的非线性计算开销将大幅削弱工业级应用的实时性。遵循经典锐边检测范式，本文采用轻量级的离散二面角作为一阶启发式算子实施基础过滤。本文设定双阈值策略对网格边进行分类标记：当二面角小于 150°时，标记为粗筛强特征边，构成强特征边集合 $Edge_1$；当二面角介于 150°与 179°时，标记为潜在过渡特征边，构成潜在特征边集合 $Edge_2$；当二面角大于 179°时，判定为平缓几何区域，不予标记。

显而易见，离散单阈值不具备多尺度自适应能力，工业模型中渐变曲面或离散扰动极易导致初始强特征集合 $Edge_1$ 发生系统性的拓扑断裂。为了在不诉诸全网格高阶优化的前提下恢复特征框架的几何连贯性，本文借鉴了图论修补与环路感知的核心思想，设计了一种轻量级的图结构特征补全算法。算法执行步骤如下：

输入：网格 R，强特征边集合 $Edge_1$，潜在特征边集合 $Edge_2$。

输出：更新后的强特征边集合 $Edge_1'$，潜在特征边集合 $Edge_2'$。

Step1. 构建两类图结构：

强特征图 G_1：以网格顶点为节点，若两点间的边属于强特征边集合 $Edge_1$，则在图中连接两点；

拓展特征图 G_2：以网格顶点为节点，若两点间的边属于强特征边集合 $Edge_1$ 或者潜在特征边集合 $Edge_2$，则在图中连接两点。

Step2. 断点检测与特征晋升：

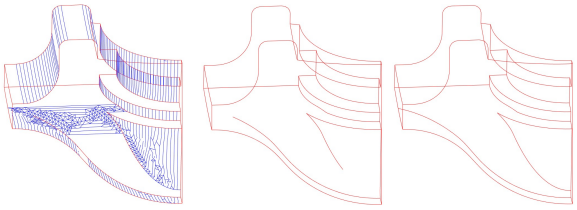
遍历搜索 G_1 上度为 1 的拓扑断点 P_1，并在 G_1 内逆向追溯其唯一邻接点 P_0，从而构造表征特征线延伸趋势的局部切向量 $\overrightarrow{P_0P_1}$。随后，在 G_2 上搜索与 P_1 邻接的未激活节点 A_i。为了在几何层面强制特征线的平滑延伸约束，计算候选切向量 $\overrightarrow{P_1A_i}$ 与基准趋势 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的切向共线度（即两个向量的单位点积），检索满足共线度约束最小且候选夹角小于指定阈值（本文设为 30°）的目标节点 A_j。若存在满足该几何约束的边 P_1A_j，则将该潜在边从潜在特征边集合 $Edge_2$ 晋升为强特征边集合 $Edge_1$，并同步动态更新强特征图 G_1 的拓扑邻接关系。若不满足约束，则对断点 P_1 进行冻结标记，在当前迭代轮次中跳过。

Step3. 迭代收敛判定：

重复执行 Step2，直到强特征图 G_1 中不存在度为 1 的游离断点，或所有残存断点均已被标记为无法收敛。

如图 2 所示，图 2(b)呈现了未经修补的初始强特征，可见在几何转折处存在明显的拓扑离散撕裂；而经本文图结构补全算法处理后（图 2(c)），

强特征骨架达成了全局拓扑一致性，且未引入伪特征。这验证了本框架在兼顾极高计算效率的同时，为第三章后续的异构网格交叉场提取奠定了稳健的边界条件。



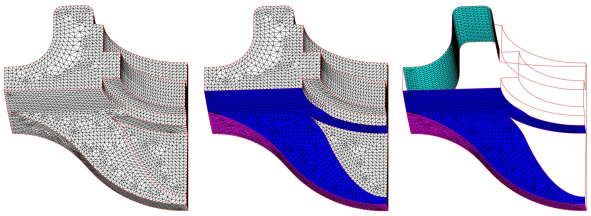
a.标记两种特征　　b.仅标记强特征　　c.强特征框架

图 2　Fandisk 模型强特征框架

3.3　网格分割与筛选

基于 3.2 节中详述的强特征补全算法，我们能够获得输入网格的优化强特征框架。本阶段的目标是根据该框架对网格进行精准分割，并评估每个子网格内部是否存在未识别的弱特征。

我们构建强特征面片图 G_3：以网格面为节点，若两个面共享的边不属于强特征边，则在图中连接这两个节点。通过查找 G_3 的连通分量即可获得分割出的子网格。结合第 2 节的讨论，我们利用能量函数筛选子网格。



a.输入网格　　b.着色筛选网格　　c.仅显示筛选网格

图 3　Fandisk 模型筛选结果

图 3 展示了 Fandisk 模型在完成网格分割与弱筛选后所保留的子网格集合，直观呈现了本算法对潜在弱特征区域的精准定位能力。图 3 c 仅显示了这些被保留的子网格与强特征框架，注意到被保留的子网格普遍位于几何结构复杂的区域，其典型特征是多个曲面之间的连续性平滑连接，例如平面与倒角之间的过渡带、自由曲面与规则基元的交界处，这些正是弱特征最可能出现的位置。

相比之下，被筛选机制剔除的子网格则表现出高度的几何一致性，主要由单一解析曲面构成，如纯平面、完整或局部圆柱面、球面等。这类区域内部无显著几何突变或拼接边界，因此可合理判定为不含弱特征，无需进入后续高成本的弱特征提取流程。

3.4　柱面处理

传统表面网格上的交叉场通常表述为带约束的全局优化问题：以场线与网格边界(或尖锐特征)对齐为硬约束，最小化场的弯曲能量，并按 Poincaré-Hopf 指标定理在曲面上配置奇点[33]；在此框架下，边界对齐要求与内部曲率指示的场方向往往相互冲突，需要引入额外自由度加以调和。然而，本文所处理的柱面过渡区具有特殊的几何性质，可规避上述一般性难题。在微分几何中，交叉场定义为一组在切平面内旋转对称的单位向量集，而柱面的高斯曲率恒为零，这为构建全局一致的交叉场提供了天然的解析基础。因此，我们无需进行数值优化求解，而是直接利用柱面的母线方向 $\mathbf{S}$ 构建一个全局平滑且无奇异点的交叉场。

对于柱面上的任意三角面片，其法向量为 $\mathbf{N}_t$。我们定义该面片处的局部交叉场由两个正交方向主导：单位母线方向 $\mathbf{S}$ 在切平面上的投影，以及与其垂直的截面方向 $\mathbf{N}_x$。这两个方向构成了柱面特有的正交坐标系，不仅反映了曲面的内在对称性，更规避了传统主曲率方向在弱特征处的不稳定性。

为判断一个输入子网格是否属于柱面，并同时估计其母线方向，我们基于柱面的几何特性建立如下判据：

在理想柱面上，所有面片的单位法向量 $\mathbf{N}_t$ 均严格垂直于同一单位母线方向 $\mathbf{S}$，即满足：

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N}_{t,all} = 0$$

其中 $\mathbf{S}$ 代表单位母线方向，$\mathbf{N}_{t,all}$ 代表单位面法向矩阵，$\mathbf{N}_{t,all}$ 共有 3 行 $|R|$ 列，$|R|$ 为子网格 R 中的三角面片数。在离散三角网格中，我们将上述问题转化为一个带单位范数约束的最小二乘优化问题，该优化问题等价于求解矩阵 $\mathbf{N}_{t,all}$ 的奇异值分解（SVD）。可以证明，最优解 $\mathbf{S}^*$ 即为 $\mathbf{N}_{t,all}$ 对应于最小奇异值的左奇异向量。

获得母线方向 $\mathbf{S}^*$ 后，我们通过计算残差能量 $E_r = \mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{N}_{t,all}$ 来量化法向与母线方向的正交程度，从而判定该子网格是否为柱面。本文采用阈值 3 作为阈值，核心依据有两点：对典型子网格规模(面片数量 10 到 20)，该阈值等价于单面片法向偏离正交方向约 5°到 10°，可吸收离散噪声，有效剔除倒角、棱线等非柱面特征区域；L2 范数使阈值天然随面片数增大而收紧，避免小样本误判，无需额外归一化。

在本节之前的讨论中我们知道，一旦确认输入子网格是柱面，我们可以根据母线方向 $\mathbf{S}$ 和叉乘方向 $\mathbf{N}_x$ 自然引导出柱面上的有序交叉场。而在交叉

场引导下我们只需找到弱特征线的起点与终点，就能追踪柱面上的弱特征。

由此引出柱面弱特征提取算法：

输入：柱面子网格 R，母线方向 $\mathbf{S}$。

输出：弱特征边集合 $Edge_3$。

Step1. 边界提取与分段：

提取 R 的所有边界边，并依据邻接关系将其组织为一个或多个有序边界环。我们在每个边界环上引入分段机制：查找环上邻边间的显著转角（大于 30°），在该点处插入断点，将闭合环分割为若干开曲线段（或保留为完整环，若无显著转角）。记所得曲线段（闭合环）集合为 $path$。

Step2. 边界映射与离散曲率计算：

沿母线方向 $\mathbf{S}$，将 $path$ 正交投影至垂直于 $\mathbf{S}$ 的二维平面得到 $path'$。在投影后的平面曲线 $path'$ 中，以弧长为参数化基准，采用标准差分公式计算每个顶点处的离散曲率 κ_i。

Step3. 特征起点查询：

计算离散曲率导数 κ_i'。取出 κ_i' 突变的顶点，构成候选起点集 $Q=\{q_i\}$。在归一化网格中阈值选取为 0.8，其设计目的是初筛曲率突变点，代码中紧随其后的连续突变点聚类与中心点优选逻辑（对长度 1 到 5 的连续突变块分别执行极值保留、中位点选取等操作），才是抑制噪声误检的核心机制，二者构成“宽进严出”的两级筛选策略。

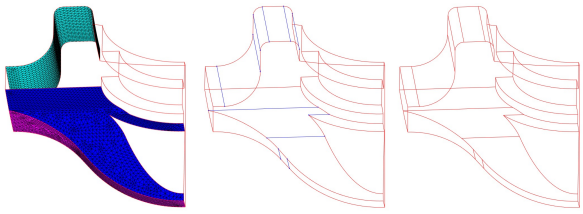
Step4. 特征起点匹配：

为确保弱特征提取的稳定性，需将 Q 中的点成对匹配，形成跨越柱面两侧的对应关系。具体而言，对于任意两点 $q_i,q_j\in Q$，对比其连线与母线方向 $\mathbf{S}$，若其夹角余弦值高于 0.9998，则认为两者方向一致，此时 q_i 与 q_j 构成一对有效的特征起点对。

Step5. 沿交叉场追踪弱特征：

获得边界匹配起点对 q_i 与 q_j 后，算法以 q_i 为源点，沿当前面片的局部交叉场中平行于母线的主导方向 $\mathbf{S}$ 进行离散射线步进。每步进至邻接面片，均根据交叉场的旋转对称性自适应选择与前述步进方向夹角最小的场向量作为新引导方向。当追踪路径成功收敛至终点 q_j 时，该离散场线即作为高保真的弱特征边界。该机制有效克服了网格各向异性对特征延伸的干扰。

图 4 展示了 Fandisk 模型中柱面弱特征提取的完整结果。其中图 4 a 为输入的柱面子网格；图 4 b 在柱面子网格上以蓝色标记子网格边界上的特征起点对及其连接产生的弱特征；图 4 c 则呈现最终提取的完整特征集合。由于 Fandisk 模型本身不包含高度复杂的自由曲面过渡结构，因此算法在这一步就可以得到最终结果。



a.柱面子网格　　b.柱面弱特征　　c.完整特征

图 4　Fandisk 模型柱面弱特征

3.5　平面处理

当子网格 R 内嵌平面时，平面与相邻内嵌曲面之间的边界构成弱特征。特别的，若平面某处内部边界为直线段，则沿该线段方向对子网格进行投影，可以近似得到一个柱面结构，其边界同样被视为弱特征，即常见的倒角结构。基于上述几何特性，我们可以利用局部交叉场设计一套专门针对含平面网格的弱特征提取算法。

在提取弱特征前，需要先确定平面的内部边界，下面介绍平面精确识别算法：

输入：内嵌平面子网格 R，强特征边集合 $Edge_1$，潜在特征边集合 $Edge_2$。

输出：内嵌平面及其精确边界。

Step1. 构建图结构：

潜在特征面片图 G_4：以网格面为节点，若两个面共享的边不属于潜在特征边与强特征边，则在图中连接这两个节点。

Step2. 筛选平缓区域：

在 G_4 中搜索所有连通分量，筛选出面片数量多，且包含内部节点的连通分量，这些连通分量通常对应子网格 R 中的平缓区域，还需进一步用数值精确判断是否构成平面以及边界是否精确。

Step3. 平面精确拟合：

使用第 2 节的隐式二次曲面拟合方法，首先将二次项置 0 得到平面方程；其次要求一次项系数向量的模为 1，以确保唯一性；最后对 Step2 确定的连通分量执行平面拟合计算。在计算中，由于无需估计能量函数，因此拟合精度为机器精度，可以借此区分出连通分量中的网格是否严格属于平面，从而得到平面的精确边界。

通过上述步骤，我们能够精准识别子网格 R 中的平面及其边界，从而为弱特征的精确定位提供了可靠依据。下介绍内嵌平面网格的弱特征提取算法：

输入：内嵌平面子网格 R，R 内部平面及其边界信息。

输出：R 内的弱特征集合 $Edge_4$。

Step1. 确定投影方向与特征起点：

检测平面边界上的直线段，将直线段的方向 $\mathbf{S}_i$ 视

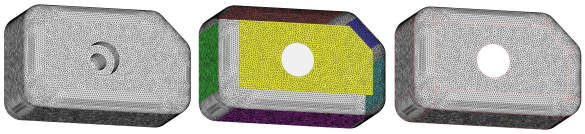
为局部柱面的母线方向，并记录其两个端点作为后续弱特征追踪的起点。注意到，沿着 $\mathbf{S}_i$ 方向投影 R 将得到一个局部的柱面，在这个局部柱面上我们可以仿照第 3.4 节的算法构建有序交叉场，我们利用交叉场上与 $\mathbf{S}_i$ 垂直的方向追踪弱特征。特别的，当平面边界不存在直线段时，本算法将跳过 Step1 与 Step2。

Step2. 弱特征追踪：

由母线方向 $\mathbf{S}_i$ 与面法向 $\mathbf{N}_t$ 叉乘得到 $\mathbf{N}_x$，$\mathbf{S}_i$ 与 $\mathbf{N}_x$ 的正反共四个方向构成局部柱面上的交叉场。从 Step1 确定的特征起点出发，沿着 $\mathbf{N}_x$ 方向在网格上进行弱特征提取，所得弱特征即为该局部柱面的内侧边界。

Step3. 网格再分割与再筛选：

将 3.5 节中新识别出的两类边界，即平面内边界与柱面内边界，视为弱特征 $Edge_4$。并据此对 R 进行网格再分割，方法类似于 3.3 节。对分割产生的新子网格，计算第 2 节介绍的弱特征存在能量，由于这些新的子网格不存在内嵌平面，只需计算其 E_d 能量，并设定新的判定阈值 5×10^{-7}。将高于阈值的子网格交给下一节处理。



a.原网格　　b.平面识别　　c.弱特征

图 5　内嵌平面网格弱特征提取

图 5 展示了本节算法在含倒角结构的典型 CAD 三维网格模型上的处理结果，直观验证了其在复杂工程几何中的有效性。图 5 a 为原网格，包含多个平面区域与过渡倒角结构；图 5 b 着色了识别出的内部平面区域，并将平面内部边界弱特征标为红色；图 5 c 展示了子网格中最终提取的完整弱特征集合，包括平面内部边界，以及由局部柱面边界，所有关键几何特征均被准确捕获。

本节算法通过融合平面几何先验知识与局部交叉场方向引导，实现了对内嵌平面网格中隐含柱状弱特征的精准挖掘。实验表明，该方法在平面、倒角结构的弱特征识别效果优异。

3.6　复杂网格处理

现实工业模型中除了规则倒角，还存在多曲面汇合的球角或自由渐变面，这导致单一解析母线失效，因此必须引入非解析的鲁棒过滤机制。对应本文，在 3.2 节至 3.5 节中我们已经通过一系列算法将初始输入网格分块处理，本节要处理的子网格 R 正是不含平面且内部可能存在弱特征的这类复杂网格。我们的目的是对这些特定子网格执行进一步的弱特征提取操作。

对于这类不含平面的子网格 R，其弱特征通常表现为两个不同曲面之间的过渡区域，且这些区域大多已被第 3.2 节中的计算标记为潜在特征。基于这一观察，我们设计了一种逐步过滤干扰边并确定弱特征的算法。

复杂曲面弱特征提取算法：

输入：复杂子网格 R，强特征边集合 $Edge_1$，潜在特征边集合 $Edge_2$。

输出：R 内的弱特征集合 $Edge_5$。

Step1. 构建图结构：

潜在特征面片图 G_4：以网格面为节点，若两个面共享的边不属于潜在特征边与强特征边，则在图中连接这两个节点。

Step2. 降低阈值，扩展连通分量：

当我们降低潜在特征判断阈值时（如从 178°开始，每次递减 0.5°），潜在特征密度减小，图 G_4 的连通分量将被扩展，而复杂网格中的弱特征相较于潜在特征更难被阈值跨越，这是由于在过渡区域中弱特征作为局部主曲率变化的分界点，其二面角往往相较过渡区域内部更加尖锐。在后续的处理中，我们追踪每次降低阈值时连通分量的边界，检测其二面角大小是否相对较大，这种边界将更有可能是我们需要提取的弱特征。

Step3. 确定潜在弱特征并延展：

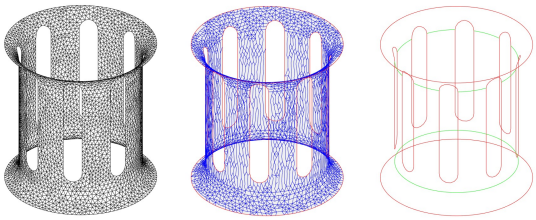
对于每个经过阈值调整后的子网格 R，检测每个连通分量的边界处二面角，若该角度低于设定阈值（如从 173°开始，每次增加 0.5°），则将其标记为潜在弱特征。接着借鉴第 3.2 节的方法，对已标记的潜在弱特征进行延展。具体而言，沿特征线方向扩展搜索路径，同时设置更为严格的终止条件（如角度变化超过 10°即停止）。另外，当网格边被标记时，其在下次迭代中将成为严格边界，以确保调整阈值后原潜在弱特征边不被遗漏。

Step4. 循环迭代：

重复步骤 Step2 与 Step3 三到四次，以确保所有潜在弱特征均被充分检测和延展。每轮迭代过程中，阈值调整与特征延展相互配合，逐步逼近最优解。

Step5. 回归验证：

根据最终确定的潜在弱特征重新划分子网格 R，并计算划分后的隐式二次曲面拟合能量[21]（去除法向量项），若划分前后能量下降超过 30%，则将划分对应的潜在弱特征视为弱特征。该步骤为内部一致性校验：若候选弱特征两侧确属不同语义曲面，则划分后各子网格的拟合残差应显著下降；若候选为均质区域内部的伪特征，划分前后残差均处于低位，下降幅度有限。30%阈值用于区分上述两类情形。



a.原子网格　　b.潜在特征　　c.提取结果

图 6　复杂曲面弱特征提取

图 6 展示了本节算法在 CAD 模型的一个复杂子网格上的处理结果。图 6 a 为原子网格，几何结构复杂，包含多个曲面间的平滑过渡区域；图 6 b 显示了红色强特征与蓝色潜在特征边，反映了初始阶段的粗略特征分布；图 6 c 展示了经本节算法处理后提取的新增弱特征线，以绿色标出。这些特征精确捕捉了曲面交界处的细微几何变化，验证了算法在复杂曲面下的有效性。

图 7 显示了逐步放宽阈值时每一步迭代确定的连通分量，通过在每一步迭代中锁定一些边界逐步确定我们需要的潜在弱特征，并将最终得到的边界用能量方法进行回归测试，确保最终标记的边属于弱特征。

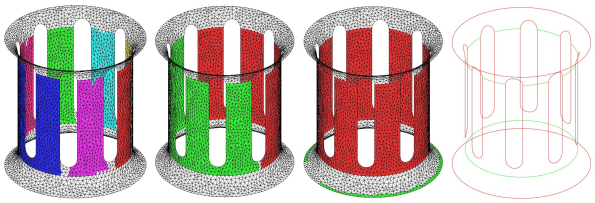


图 7　连通图迭代过程

4　实验与结果分析

实验在统一环境下完成：软件平台：MATLAB R2020b；硬件配置：Intel Core i5-10300H CPU（2.5 GHz），16 GB 内存；测试数据集：选自开源的 ABC 数据库，涵盖多样化的 CAD 模型。

4.1　实验结果

为全面评估所提算法的性能，我们选取多个具有代表性的样本用于深入分析与可视化验证。这些模型覆盖了多种复杂几何结构，包括倒角、孔洞、开槽、二次曲面以及多曲面拼接。

该算法在 13 个代表性 CAD 模型（图 1、8、9）上的实验结果，系统地证明了其在复杂几何场景中的卓越性能。图 8 中从上至下依次为原始输入网格，特征提取结果以及透视模型下的特征提取结果。这些结果证明：面对圆柱圆角、曲率拐点、多层嵌套结构和通孔等挑战，本文算法利用交叉场引导和自适应终止机制，准确且完整地恢复了弱特征，表现出对高阶几何信息的高灵敏度以及对干扰的强鲁棒性。在平面过渡区域、微小平面边界和曲面拼接的曲率拐点区域，传统方法往往无能为力，而本文算法通过动态潜在特征过滤和模块化的分治策略，精确提取了具有语义意义的弱特征。即使在高度不规则的自由曲面（图 8 g）或不具有明确几何终止条件的曲面（图 8 h）上，它也能保持拓扑正确性和几何一致性。

综上所述，本文算法在自由曲面混合、多层嵌套和几何不连续等复杂场景中实现了高精度和强鲁棒性的弱特征提取；其在处理低对比度特征、微小几何细节和非规范形状方面也表现出显著优势。

需要说明的是，本文全部判据参数（3.2−3.6 节及第 2 节 f_{exist}）在所有实验模型上保持同一组默认取值，未经逐模型调整。在近 50 个涵盖倒角、孔洞、开槽、二次曲面与多曲面拼接的 ABC 模型上，该参数组均取得稳定的提取结果（图 8、表 1、表 2 展示了部分模型的结果），构成参数选择跨模型泛化能力的直接证据。当然，上述证据属于跨模型稳定性而非单参数敏感性分析；系统的单参数敏感性研究超出本文范围，作为未来工作在结论中讨论。

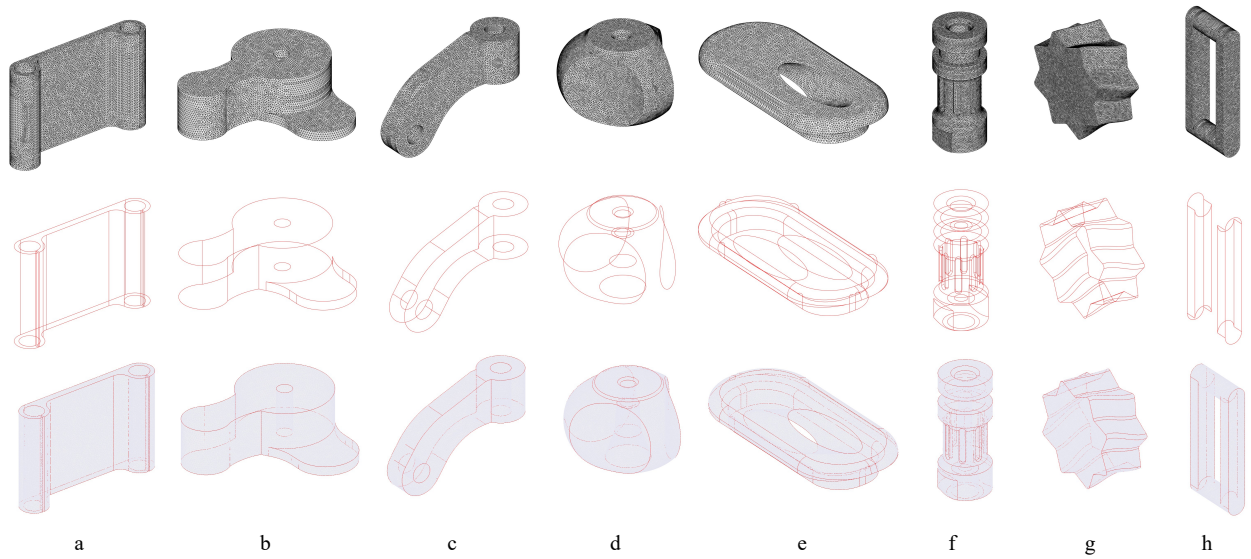


图 8　本文算法提取结果

4.2　算法对比

本文对比的算法包括：脊谷线方法[9]（2004）；变分形状近似法[20]（2012）：二面角方法。

图 9 展示了四种模型在上述各方法下的特征提取结果，提取出的特征线以红色显示。

脊谷线法通过微分几何识别网格中的脊线和谷线，对曲率变化剧烈的区域非常敏感，但在弱特征提取、计算效率方面存在局限性。注意到 Lu 等人[10]在 2021 的工作以脊谷线方法作为初值，进一步补全了断裂特征线并过滤了噪声特征，然而图 9 中可以明显看出脊谷线方法存在未识别的弱特征，由于最新工作并没有在脊谷线方法上额外多识别特征，因此以脊谷线方法对比足以说明本文方法在弱特征提取上的优越性。变分形状近似法通过最小化能量进行曲面拟合与划分，提供了全局一致性和完整性，但其计算效率较低且缺乏自适应调整机制，需要反复调整局部参数才能取得理想的结果，本文对比实现中并未调节参数，以至于其曲面划分不合理。二面角算法是一种基于固定阈值的快速初步特征检测方法，适用于强特征的初步筛选，但在处理微弱特征时表现不佳。

在定量评价方面，理想的评估体系应基于弱特征真值计算准确率与召回率。然而，本文对比的脊谷线法[9]预处理中包含网格重构步骤，其网格的顶点拓扑与原始输入网格不再保持一一对应关系。这导致无法在同一离散域上建立精确的点级对应，使得传统的特征匹配度量难以直接适用。

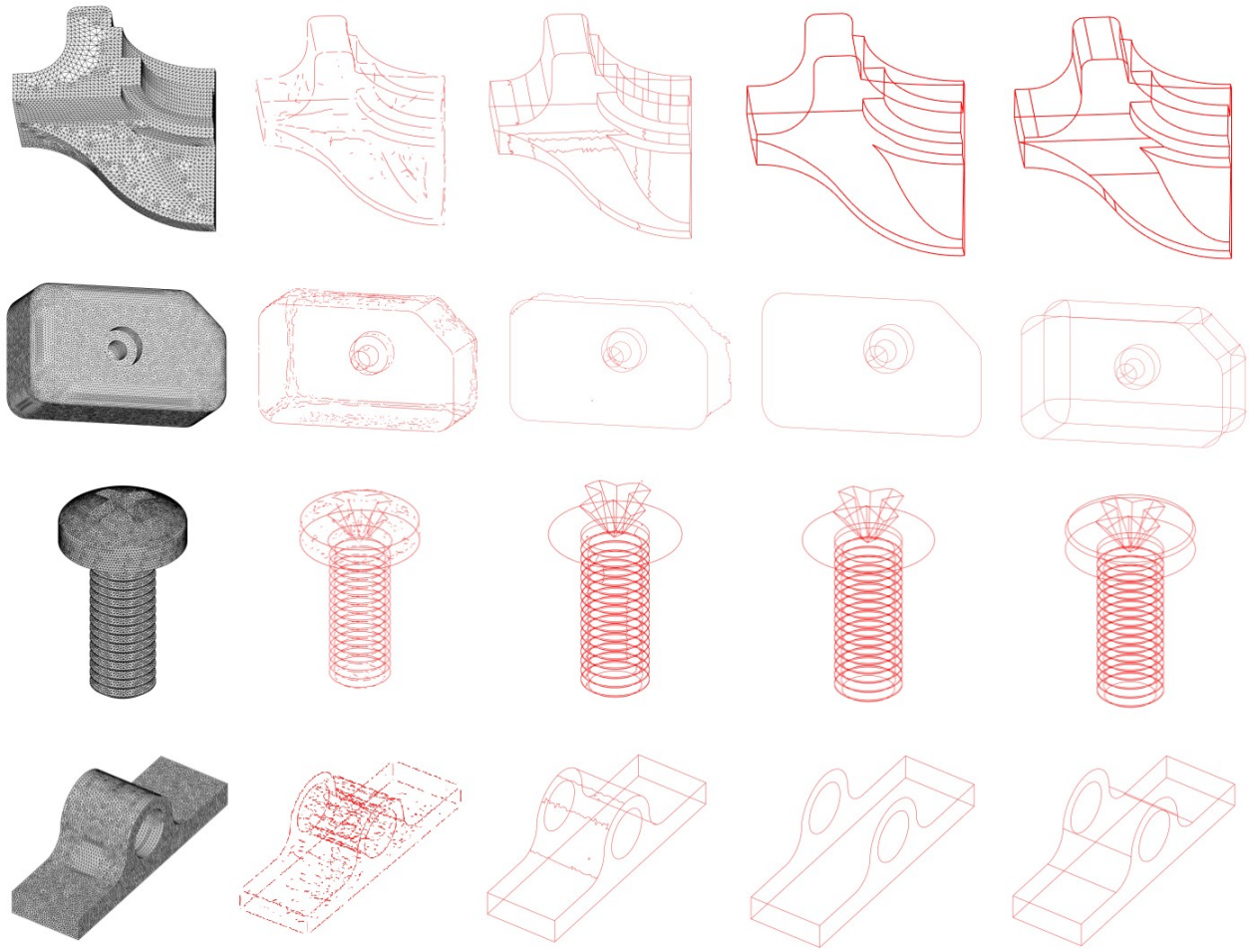
鉴于此，本文遵循 Lu 等人 [10] 在 2021 年工作中的学术共识，通过引入网格面片分割数与全局拟合能量的双向博弈指标对算法性能实施半定量化评估。其核心几何逻辑在于：若算法对弱特征存在漏检（如脊谷线方法），由于未在过渡边界实施拓扑切分，各子网格内部将强行混杂非均质几何面，导致拟合残差能量显著上升；若算法产生伪特征（如变分形状近似法的过度分割），则会将均质曲面割裂，导致分片总数异常冗余。

实验结果如表 2 及图 9 所示。分析表明：脊谷线方法[9]的块数极少，但其全局二次曲面拟合能量在所有模型上均表现出显著的红移(比本文算法高出 1 到 2 个数量级）。这一数字对应于图 9(b)中由于弱特征处的局部微分信号淹没于高频噪声，导致特征线在倒角过渡带大面积发生拓扑断裂和漏检，从而无法有效隔离异构表面的现象。变分形状近似法（VSA）的全局残差虽然较低，但在 Fandisk（39 片）和螺丝钉模型（86 片）上表现出严重的过分割现象。这一量化结果直观地反映在图 9(c)中：由于缺乏各向异性场线的全局连续性约束，该方法极易将规则柱面或平面内部的离散采样扰动错误地判定为独立的几何基元边界，导致特征网络支离破碎、丧失工业语义。相比之下，本文算法在各个挑战性模型上均达成了全局残差与分片紧凑度的最佳折衷(如在倒角模型中以 27 个精确语义面片达成了最低的拟合残差。如图 9(e)所示，提取的弱特征线不仅拓扑连续，而且完美贴合圆角边界。这一对比定量与定性地共同证明了本算法通过解析交叉场引导追踪，在语义特征线的提取完整性（召回率）与抗噪抑制性（准确率）之间取得了最优的平衡。

在运行速度方面，本文方法拥有显著的计算效率优势，平均处理时间控制在秒级（对比见表 1），

适用于大规模数据集的快速处理；同时融合了几何先验、方向场引导与自适应验证机制，在保持高效的同时实现了更全面、更可靠的特征提取。

综上所述，该对比实验充分证明了本算法通过交叉场线引导追踪，在语义特征线的召回率、准确率与运行效率之间取得了最佳的鲁棒平衡。



a.输入　　b.脊谷线[9]　　c.VSA[20]　　d.二面角　　e.本文

图 9　各种不同方法特征提取结果对比

表 **1** 运行时间对比

模型	面片数	点数	方法	时间(s)
Fandisk	12946	6475	脊谷线	0.643
			VSA	5.151
			二面角	0.036
			本文方法	0.340
倒角模型	44248	22126	脊谷线	6.261
			VSA	52.981
			二面角	0.104
			本文方法	2.615
螺丝钉	33248	16626	脊谷线	3.198
			VSA	5.327
			二面角	0.013
			本文方法	0.511
曲率拐点模型	26922	13461	脊谷线	1.952
			VSA	29.735
			二面角	0.011
			本文方法	0.353

表 2 运行结果对比

模型	方法	分片数	全局拟合能量
Fandisk	脊谷线	1	8.5437e-5
	VSA	39	8.3123e-6
	二面角	14	1.2673e-5
	本文方法	25	8.2826e-6
倒角模型	脊谷线	2	1.6138e-4
	VSA	9	4.1354e-6
	二面角	7	4.2481e-6
	本文方法	27	1.1106e-6
螺丝钉	脊谷线	19	1.7291e-6
	VSA	86	1.5223e-6
	二面角	63	1.5335e-6
	本文方法	65	1.4114e-6
曲率拐点模型	脊谷线	2	9.5799e-5
	VSA	15	1.4526e-5
	二面角	7	5.9252e-5
	本文方法	11	1.3842e-5

5 结 论

本文提出了一种鲁棒且高效的网格弱特征提取框架，旨在解决复杂 CAD 模型中间平滑过渡特征的精确识别难题 。通过有机融合强特征引导的区域分割、交叉场导向的路径追踪以及基于变分形状近似（VSA）原理的能量验证，在网格离散精度下稳定恢复未显式存在于输入网格边中的弱特征，同时维持了较高的计算效率。实验结果表明，该算法在处理包含倒角、孔洞及多曲面拼接的工业级几何模型时表现优越，特别是在柱面结构的弱特征识别任务中，展现出了相较于传统方法更高的准确率与处理速度 。即便在输入模型的弱特征边未显式存在于原始网格边中的情况下，算法仍能通过边界匹配点的稳定连接，准确地还原其几何属性。

尽管本框架在由 CAD 系统导出、具有明确解析曲面结构的三角网格的弱特征提取中表现出高效与稳健性，但在处理含高频强噪声的网格以及非解析的复杂自由过渡面时，其自适应能力仍有提升空间。在未来的研究工作中，我们计划：1.引入基于深度学习的几何先验或鲁棒性更强的微分算子，

以替代基础的二面角检测，从根本上提升算法对恶劣噪声环境的泛化能力 。2.探索交叉场在更广泛的自由曲面过渡区域的自适应生成策略，提升该框架普适性。3.增加特征提取的下游应用，根据不同方法提取的特征框架在下游应用（例如模型重构）的表现来界定特征提取结果的优劣，增强本文数据的说服力。

参考文献(References):

[1] M. Nieser, C. Schulz, K. Polthier, Patch layout from feature graphs, Computer-Aided Design 42 (3) (2010) 213–220.

[2] R. Mehra, Q. Zhou, J. Long, A. Sheffer, A. Gooch, N. J. Mitra, Abstraction of man-made shapes, in: ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH Asia), 2009, pp. 1–10.

[3] F. De Goes, S. Goldenstein, M. Desbrun, L. Velho, Exoskeleton: Curve network abstraction for 3d shapes, Computers & Graphics 35 (1) (2011) 112–121.

[4] R. Ling, J. Huang, B. Juttler, F. Sun, H. Bao, W. Wang, Spectral quad-rangulation with feature curve alignment and element size control, ACM Transactions on Graphics 34 (1) (2014) 1–11.

[5] D. Khan, D.-M. Yan, F. Ding, Y. Zhuang, X. Zhang, Surface remeshing with robust user-guided segmentation, Computational Visual Media 4 (2) (2018) 113–122.

[6] H. Pan, Y. Liu, A. Sheffer, N. Vining, C.-J. Li, W. Wang, Flow aligned surfacing of curve networks, ACM Transactions on Graphics 34 (4) (2015) 1–10.

[7] G. Gori, A. Sheffer, N. Vining, E. Rosales, N. Carr, T. Ju, Flowrep: Descriptive curve networks for free-form design shapes, ACM Transactions on Graphics 36 (4) (2017) 1–14.

[8] A. Gehre, M. Bronstein, L. Kobbelt, J. Solomon, Interactive curve constrained functional maps, in: Computer Graphics Forum, Vol. 37, Wiley Online Library, 2018, pp. 1–12.

[9] Y. Ohtake, A. Belyaev, H.-P. Seidel, Ridge-valley lines on meshes via implicit surface fitting, in: ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH), 2004, pp. 609–612.

[10] Z. Lu, J. Guo, J. Xiao, Y. Wang, X. Zhang, D.-M. Yan, Extracting cycle-aware feature curve networks from 3D models, Computer-Aided Design 131 (2021) 102949.

[11] S. Yoshizawa, A. Belyaev, H.-P. Seidel, Fast and robust detection of crest lines on meshes, in: Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling, 2005, pp. 227–232.

[12] S.-K. Kim, C.-H. Kim, Finding ridges and valleys in a discrete surface using a modified mls approximation, Computer-Aided Design 38 (2) (2006) 173–180.

[13] Y.-K. Lai, Q.-Y. Zhou, S.-M. Hu, J. Wallner, H. Pottmann, Robust feature classification and editing, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 13 (1) (2006) 34–45.

[14] M. Nomura, N. Hamada, Feature edge extraction from 3d triangular meshes using a thinning algorithm, in: Vision Geometry X, Vol. 4476, International Society for Optics and Photonics, 2001, pp. 34–41.

[15] T. Weinkauf, D. Gunther, Separatrix persistence: Extraction of salient edges on surfaces using topological methods, in: Computer Graphics Forum, Vol. 28, Wiley Online Library, 2009, pp. 1519–1528.

[16] H. S. Kim, H. K. Choi, K. H. Lee, Feature detection of triangular meshes based on tensor voting theory, Computer-Aided Design 41 (1) (2009) 47– 58.

[17] H. Liu, N. Dai, B. Zhong, T. Li, J. Wang, Extract feature curves on noisy triangular meshes, Graphical Models 93 (2017) 1–13.

[18] M. Sunkel, S. Jansen, M. Wand, E. Eisemann, H.-P. Seidel, Learning line features in 3d geometry, in: Computer Graphics Forum, Vol. 30, Wiley Online Library, 2011, pp. 267–276.

[19] A. Gehre, I. Lim, L. Kobbelt, Feature curve co-completion in noisy data, in: Computer Graphics Forum, Vol. 37, Wiley Online Library, 2018, pp. 1–12.

[20] D. Cohen-Steiner, P. Alliez, M. Desbrun, Variational shape approximation, in: ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH), 2004, pp. 905– 914.

[21] D.-M. Yan, W. Wang, Y. Liu, Z. Yang, Variational mesh segmentation via quadric surface fitting, Computer-Aided Design 44 (11) (2012) 1072–1082.

[22] S. Yamakawa, K. Shimada, Feature edge extraction via angle-based edge collapsing and recovery, Journal of Computing and Information Science in Engineering 18 (2) (2018) 021001–18.

[23] A. Gehre, I. Lim, L. Kobbelt, Adapting feature curve networks to a prescribed scale, in: Computer Graphics Forum, Vol. 35, Wiley Online Library, 2016, pp. 319–330.

[24] M.-L. Torrente, S. Biasotti, B. Falcidieno, Recognition of feature curves on 3d shapes using an algebraic approach to hough transforms, Pattern Recognition 73 (2018) 111–130.

[25] Y. Cao, D.-M. Yan, P. Wonka, Patch layout generation by detecting feature networks, Computers & Graphics 46 (2015) 275–282.

[26] N. Pietroni, S. Nuvoli, T. Alderighi, P. Cignoni, M. Tarini, Reliable feature-line driven quad-remeshing, ACM Transactions on Graphics 40 (4) (2021) 1–17.

[27] G. Sharma, D. Liu, E. Kalogerakis, S. Maji, S. Chaudhuri, R. Mech, Parsenet: A parametric surface fitting network for 3d point clouds, arXiv preprint arXiv:2003.12181.

[28] S. Hu, J. Cai, Y. Lai, Semantic labeling and instance segmentation of 3d point clouds using patch context analysis and multiscale processing, IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. 26 (7) (2020) 2485–2498.

[29] G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 13 (11) (1991) 1115–1138.

[30] G. Taubin, An improved algorithm for algebraic curve and surface fitting, in: Proceedings of the Fourth International Conference on Computer Vision (ICCV), 1993, pp. 658–665.

[31] T. Kanai, Y. Ohtake, K. Kase, Hierarchical error-driven approximation of implicit surfaces from polygonal meshes, in: Symposium on Geometry Processing, 2006, pp. 21–30.

[32] S. Fleishman, D. Cohen-Or, D. Lischinski, Bilateral mesh denoising, ACM Transactions on Graphics 22 (3) (2003) 956–964.

[33] L. Qi, J. Qiu, G. Xu, Y. Liu, J. Xu, R. Gu, F. Lu, Y. Pang, RFF-meshing: a parallel and anisotropic quad-dominant mesh generation framework based on Riemann frame field, Engineering with Computers 41 (4) (2024) 2267–2289.

一种用于舵面偏转和变形的动网格技术

唐　静，何　协，彭黄金，龚小权*，张　健，　周乃春

（中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，四川 绵阳 621000）

摘　要：全动舵面的舵根与飞行器本体间会形成狭缝区域，舵面控制偏转及流固耦合模拟时舵面前后缘将产生剪切几何形变。网格变形是针对几何形变自动生成计算网格的一类有效方法，但单独类型的变形方法难以解决狭缝区域的网格强剪切变形问题。本文提出了一种网格嵌套-径向基函数混合动网格方法，有效解决了全动舵面流固耦合模拟网格变形问题。首先，基于“物面相交”策略发展了嵌套网格间相互挖洞算法，并采用逐次扩散方法实现了内部网格单元的识别。其次，构建了嵌套-径向基函数混合方法消除了狭缝几何拓扑结构，并发展了放开外边界约束方法解决了子网格变形空间不足的问题。最后，采用典型全动舵面飞行器构型验证了混合方法的变形能力。结果表明，本文混合方法可有效解决全动舵面强剪切网格变形问题，且具备应用于实际工程复杂构型的能力。

关键词：网格变形，嵌套网格，混合方法，径向基函数，舵面偏转，舵面变形

0 引　言

舵面偏转耦合结构弹性变形是航空航天飞行器设计需要解决的典型气动-运动-结构多学科耦合问题。随着计算机发展，基于计算流体力学(CFD)的数值模拟方法逐渐成为解决多学科问题的有效手段。网格生成是开展数值模拟的关键环节，气动弹性迭代求解方法面临几何外形频繁变化的问题，要求数值模拟系统必须具备网格自动生成能力。相比网格重新生成，只移动网格点的动网格方法为网格自动生成提供了更实用且更高效解决方案，其中应用最广的为网格变形方法[1-2]。然而，对于舵面偏转及其气动弹性变形问题，一方面由于舵面单轴结构特点导致舵面前后缘几何形变较大，对网格变形方法的变形能力要求很高；另一方面，舵面根部平面与飞行器本体之间距离通常很小，不可避免地形成狭缝区域，由于狭缝宽度方向上网格单元数量较少，狭缝内网格承受变形能力很弱。因此，狭缝内部网格会因全动舵面形变产生剪切变形。当剪切变形较大时，现有的网格变形方法仍易出现网格交叉或负体积等严重错误，导致计算网格失效。本文提出了一种基于网格嵌套-变形的混合动网格方法，首先基于“物面相交”直接挖洞策略和逐次扩散内部网格单元识别方法发展了嵌套网格模拟方法，实现了舵面网格与本体网格的相互独立，消除了单套网格必然存在的狭缝剪切变形问题；其次，基于 RBF 方法实现了舵面空间网格协调变形；最后采用典型全动舵飞行器构型算例验证了混合动网格方法的有效性。

1　数值方法简介

嵌套网格（也称重叠网格）方法常用于相对位移较大的飞行器部件运动过程的数值模拟。相比网格变形方法，嵌套网格方法仅包含网格的刚性运动，网格单元几何形状保持不变，避免了网格几何质量的降低。嵌套网格方法主要包括网格挖洞和流场插值两个关键技术。本文嵌套网格挖洞技术基于“物面相

交”直接挖洞策略，主要思想是用一套网格的物面网格与另一套网格的内部网格边开展相交判定。主要包括物面网格求交、标记洞边界网格单元、标记几何体内部网格单元和确定插值网格单元等步骤。

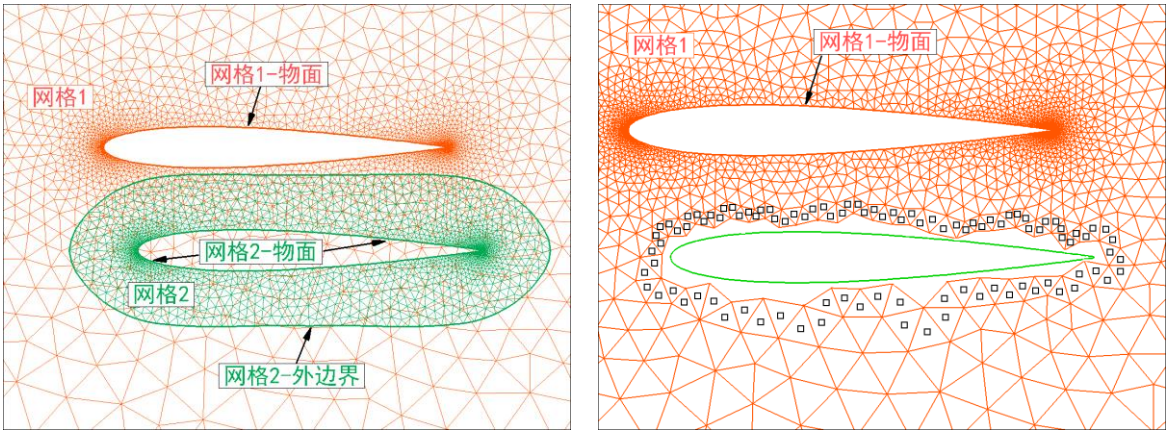


图 1 嵌套网格挖洞及插值单元确定示意图（左，挖洞前； 右， 挖洞后及插值单元）

采用嵌套网格后，网格变形只需分别针对每套网格开展即可。网格变形方法采用基于 Wendland’s C^2 基函数的径向基函数（RBF），通过等距抽样方法减少基函数约束方程规模以提高计算效率，并通过距离函数插值将边界点变形误差传递到内部网格点[3]。由于舵面网格是整套网格的小子集，其边界网格点和内部网格点相比整套网格大幅减少，针对舵面网格变形的计算量也将大幅减小。因此，采用嵌套-变形混合方法有利于减少网格变形的计算时间。

2 结果分析

验证算例采用的构型及嵌套网格如图 2 所示，其中飞行器本体为典型回转体构型，计算时采用半模网格，全动舵面为典型后掠梯形面。物面网格均为三角形单元，舵面前后缘、舵梢和舵根区域都进行了适当加密，舵根附近的本体网格也进行了加密。右图给出了运动-结构计算收敛后舵面局部放大流场。

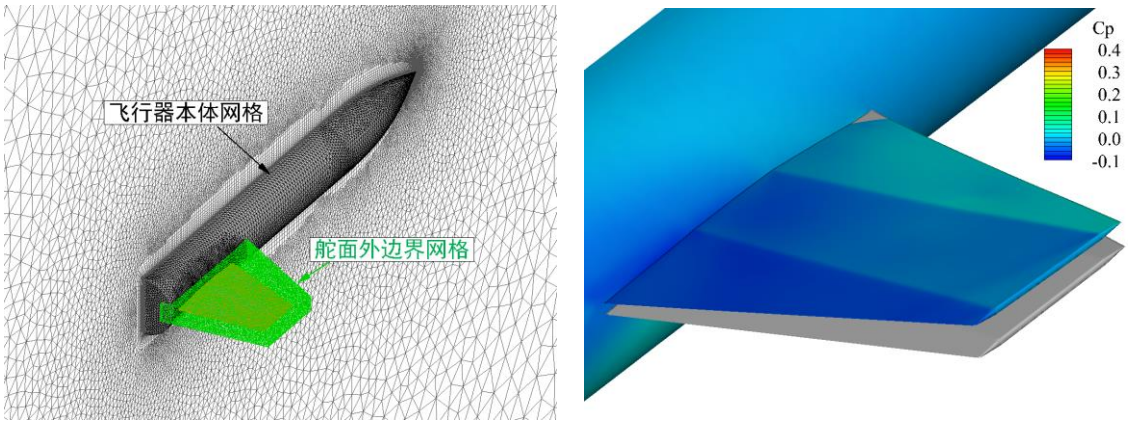


图 2 计算网格（左）及舵面偏转-变形收敛结果（右）

图 3 分别给出采用本文混合方法和采用径向基方法得到变形后网格，采用本文提出的嵌套-RBF 混合方法，变形后网格单元正交性得到了很好的保持。基于相同结构几何变形，采用一套网格和 RBF 变形方法得到的网格如图 17 所示，由于存在强剪切变形，狭缝中间区域的网格发生了单元相互交错重叠的严

重错误，因此仅采用 RBF 变形方法难以得到合理的计算网格。

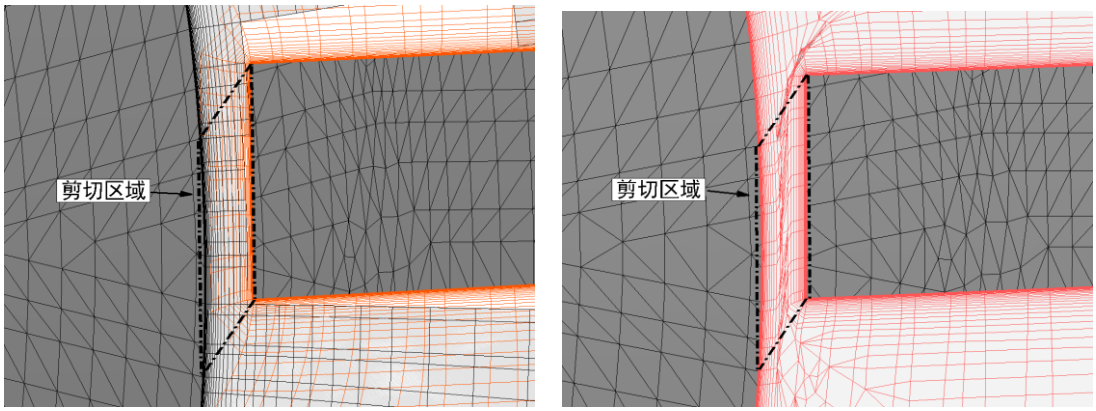


图 3 收敛后采用不同方法获得的计算网格（左，本文混合方法； 右，单独 RBF 方法）

3 结　论

本文针对舵面发生偏转同时弹性变形数值模拟涉及的计算网格自动生成问题，提出了嵌套-RBF 混合动网格方法。基于单套网格的网格变形方法因强剪切变形极易出现网格单元交错重叠的严重错误，嵌套网格方法通过消除狭缝几何拓扑，可从理论上消除网格强剪切变形。采用嵌套-RBF 混合动网格方法可有效解决狭缝剪切变形数值模拟面临的网格自动生成难题。

参 考 文 献:

[1] Selim, M., Koomullil, R. Mesh Deformation Approaches-a Survey[J]. Journal of Physical Mathematics, 2016, 7(2):1-9.

[2] Tang, J., Ma, M. S., Li, B., et al. A Local and Fast Interpolation Method for Mesh Deformation[J]. Progress in Computational Fluid Dynamics, 2019, 19(5):282-292.

[3] Tang J, Zhang J, Cui P, et al. An Efficient and Precise Hybrid Method for Mesh Deformation [J]. applied sciences, 2026, 16(2): 1016-1-20.

点胞关系驱动的 Voronoi 图快速计算方法

肖艳阳[1]，曹娟[2]，陈中贵[3*]

（1 南昌大学数学与计算机学院，南昌 330031）

（2 厦门大学数学科学学院，厦门 361005）

（3 厦门大学信息学院，厦门 361005）

摘　要：本文提出了一种新颖且高效的受限 Voronoi 图（即约束在求解域内的 Voronoi 图）计算方法。求解域与 Voronoi 胞元的交集（受限 Voronoi 胞元）是通过使用胞元边界对求解域逐次裁剪来获得。与现有方法不同，本文引入了一种基于边的搜索方案来识别裁剪平面（中垂面）。首先采用点胞关系测试来判断空间点是否位于目标 Voronoi 胞元内；随后，对于受限 Voronoi 胞元的每条边，仅当其两个端点分别位于对应 Voronoi 胞元的内部和外部时，才执行裁剪操作，并且所需的中垂面可通过少量点胞关系测试找到。因此，本文方法仅执行对最终结果有贡献的裁剪操作，相较于现有先进方法具有显著效率优势。此外，由于每个受限 Voronoi 胞元可独立计算，进一步将该方法扩展到 GPU 上以实现并行 Voronoi 图计算。实验结果表明，无论站点分布如何，本文方法始终优于现有先进方法。

关键词：Voronoi 图，点胞关系测试，GPU

0 引　言

Voronoi 图[1]是计算几何中的基础结构，广泛应用于网格生成、表面重建、图像处理等领域。给定一组站点，Voronoi 图将空间划分为若干胞元，每个胞元包含所有到该站点距离最近的点。在实际应用中，通常只关心给定求解域内的受限 Voronoi 图（Restricted Voronoi Diagram, RVD），即各 Voronoi 胞元与求解域的交集。

现有 RVD 计算方法主要分为两类，即基于 Delaunay 三角剖分（DT）的方法[2-3]和基于 k 近邻（kNN）的方法[4]。DT 方法需要先构建站点的 Delaunay 三角剖分，耗时严重，且裁剪过程中存在大量无效操作；kNN 方法通过搜索每个站点的 k 个最近邻并逐步裁剪求解域，其效率高度依赖于站点分布，在非均匀分布（如梯度分布）下性能急剧下降。

针对上述不足，本文提出一种全新的点胞关系驱动的 Voronoi 图快速计算方法。其核心思想是，在计算每个单形（三角形或四面体）与目标 Voronoi 胞元的交集时，仅当当前多边形（或多面体）的某条边两端点分处胞元内外时，才触发一次有效的裁剪，且所需的中垂面通过对该边进行少量点胞关系测试即可快速确定。由于避免了所有无效裁剪，本方法在串行和并行环境下均显著优于现有方法。

1 问题描述

1.1 受限 Voronoi 图定义

设站点集合为$V=\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$，其 Voronoi 胞元定义为

$$\Omega_i=\left\{\mathbf{x}\in R^d \,\middle|\, \|\mathbf{x}-\mathbf{v}_i\|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{v}_j\|,\forall j\neq i\right\}$$

给定由若干单纯形（二维为三角形，三维为四面体）组成的求解域M，受限 Voronoi 胞元（Restricted Voronoi Cell, RVC）为$\Omega_{i|M}=\Omega_i\cap M$。每个 RVC 都由若干个单纯形与 Voronoi 胞元的交集组成，本文的目标是快速计算所有这种交集。

1.2 点胞关系驱动的胞元裁剪

现有方法在计算单纯形与 Voronoi 胞元的交集时，会执行对结果没有贡献的裁剪（无效裁剪）。本文提出一种基于边的搜索策略，确保每次裁剪均对最终交集有贡献。

首先设置点胞关系测试：给定查询点$\mathbf{q}$和目标胞元Ω_i，只需找到的最近站点$N_\mathbf{q}$。若$N_\mathbf{q}=\mathbf{v}_i$或$\mathbf{q}$到$\mathbf{v}_i$与到$N_\mathbf{q}$距离相等，则$\mathbf{q}\in\Omega_i$。为提高鲁棒性，本文采用单纯形与 Voronoi 胞元的交集边界上的符号信息辅助判断，避免浮点误差。

基于该测试，单纯形T与 Voronoi 胞元Ω_i的交集可通过下述步骤计算：

步骤 1　若单纯形T至少有一个顶点位于目标胞元Ω_i内，则以T作为交集P的初始值，进入步骤 2；

步骤 2　选取的一条边$\mathbf{p}_s\mathbf{p}_t$，其两端点$\mathbf{p}_s$和$\mathbf{p}_t$分别位于Ω_i内部和外部；

步骤 3　在该边上进行二分式搜索：构造$\mathbf{v}_i$与$\mathbf{p}_t$最近站点的中垂面B_{ij}，计算该边与B_{ij}的交点$\mathbf{q}$，并对交点进行点胞关系测试。若交点不在Ω_i内，则更新$\mathbf{p}_t$为$\mathbf{q}$，并重新构造中垂面、计算交点、测试点胞关系；直到直到交点落在Ω_i边界上，此时的中垂面即为目标裁剪平面；

步骤 4　用步骤 3 所得中垂面对P进行裁剪，保留含$\mathbf{v}_i$的一侧；

步骤 5　重复步骤 2—4，直到P的所有顶点均在Ω_i内，此时P即为所求交集

图 1 是该算法过程的示意图。若初始单纯形没有顶点在Ω_i内（即该单纯形通过相邻胞元传播得到），则先利用已计算的相邻胞元交集构造一个中间多边形，使其至少有一个顶点在Ω_i，再应用上述流程。

该算法的核心优势在于，每条边最多被裁剪一次，且每次裁剪均产生有效的新边界，因此总裁剪数等于最终交集的边数，远少于现有方法中访问的邻居数。

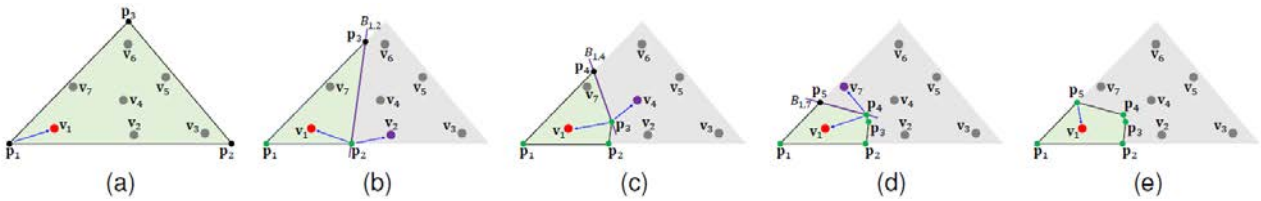


图 1 基于边搜索的交集计算过程

1.3 GPU 并行扩展

对 1.2 中所述算法进行微调，将步骤 2 中选择的边替换为站点与顶点的虚拟连线，则该算法对于每个站点相互独立，使本文方法适合并行。对于简单域（如立方体），每个 GPU 线程负责一个站点，直接用上述迭代裁剪求解域即可。对于复杂表面或体网格，则采用队列传播策略，即先为每个单纯形找到最

近站点入队，然后多线程处理队列中的单纯形-胞元对，新产生的对再次原子入队，直至队列为空。所有线程无需同步，极大发挥 GPU 性能。

2 实验结果与比较

在配备 Intel Core i7-12700 CPU 和 NVIDIA RTX 3080 GPU 的平台上进行测试。比较对象为基于 DT 的方法（使用 CGAL 或 GEOGRAM）、基于 kNN 的方法（串行实现及多个 GPU 并行实现[5-8]）。测试了五种站点分布：白噪声、扰动网格、蓝噪声、径向梯度、方向梯度。

2.1 串行性能

二维和三维简单域（矩形/立方体）：随着站点数增加，DT 方法因三角剖分开销增长最慢，但在大部分分布下耗时最高；kNN 方法在蓝噪声下表现较好，但在梯度分布下严重退化。本文方法在所有分布下均最快。以立方体为求解域，图 2 为在不同站点分布下各方法的性能对比。

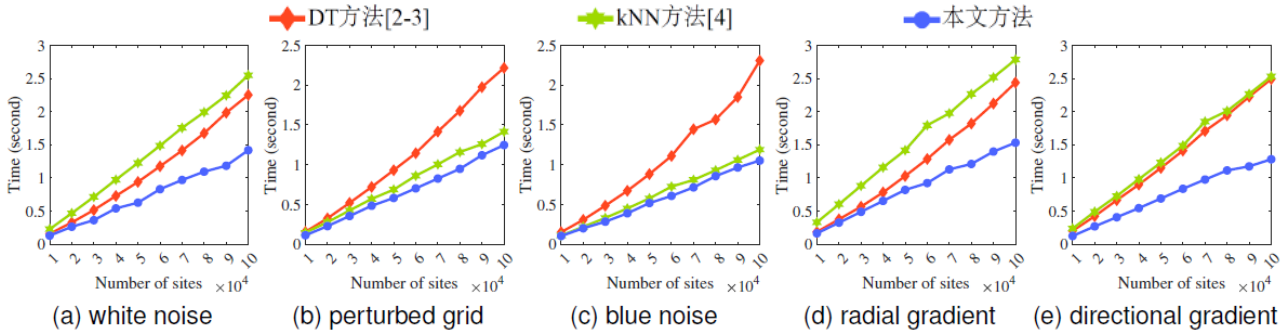


图 2 以立方体为求解域，在不同站点分布下各方法的性能对比

复杂域（球面、Bunny 曲面、球体、Fertility 体）：固定单纯形数量，变化站点数，本文方法始终优于其他两者；固定站点数，变化单形数量，本文方法同样保持领先。

2.2 并行性能

三维立方体（1M~10M 站点）：与 Ray 等[5]及 Basselin 等[8]的 kNN 并行实现对比，本方法在所有分布下均耗时最少，且内存占用显著降低（节省约 60%~80%）。在 10M 蓝噪声站点下，本方法仅需 0.26 秒，而 Ray 等方法需数秒。图 3 为在不同站点分布下各并行方法的性能对比。

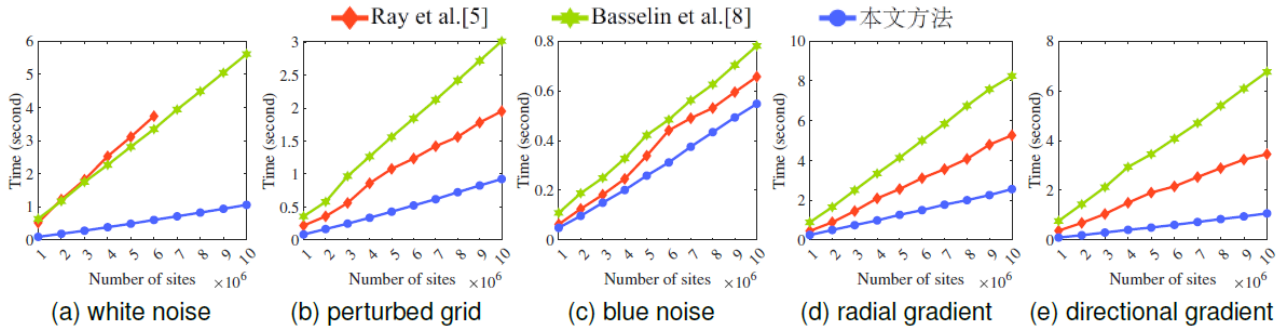


图 3 以立方体为求解域，在不同站点分布下各并行方法的性能对比

Bunny 曲面和 Fertility 体：与 Han 等[6]（曲面）及 Liu 等[7-8]（体）的并行实现对比，本方法速度提升约 2~4 倍，且内存开销更低。

3 结　论

本文提出了一种点胞关系驱动的 Voronoi 图快速计算方法，核心创新在于仅执行有效裁剪，并通过边搜索快速定位裁剪平面。该方法无论在串行还是并行环境下，无论站点分布如何，均显著优于现有 DT 和 kNN 方法。未来工作将探索本文方法拓展到更多几何应用。

参 考 文 献:

[1] Aurenhammer F. Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure[J]. ACM Computing Surveys, 1991, 23(3):345-405.

[2] Yan D M, Lévy B, Liu Y, et al. Isotropic remeshing with fast and exact computation of restricted Voronoi diagram[J]. Computer Graphics Forum, 2009, 28(5):1445-1454.

[3] Yan D M, Wang W, Lévy B, et al. Efficient computation of clipped Voronoi diagram for mesh generation [J]. Computer-Aided Design, 2013, 45(4):843-852.

[4] Lévy B, Bonneel N. Variational anisotropic surface meshing with Voronoi parallel linear enumeration [C]. In Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable, Berlin, 2013:349-366.

[5] Ray N, Sokolov D, Lefebvre S, et al. Meshless Voronoi on the GPU[J]. ACM Transactions on Graphics, 2018, 37(6):Article 226.

[6] Han J, Yan D, Wang L, et al. Computing Restricted Voronoi Diagram on Graphics Hardware[J]. In Proceedings of Pacific Graphics Short Papers, 2017.

[7] Liu X, Ma L, Guo J, et al. Parallel computation of 3D clipped Voronoi diagrams[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2022,28(2): 1363 – 1372.

[8] Basselin J, Alonso L, Ray N, et al. Restricted power diagrams on the GPU[J]. Computer Graphics Forum, 2021, 40(2):1-12.

RESEARCH

Curve resampling based high-quality high-order unstructured quadrilateral mesh generation

Yongjia Weng[1,2], Lufeng Liu[3,4], Zhonggui Chen[5], Xuan Zhou[3,4] and Juan Cao[1,2*]

*Correspondence:
juancao@xmu.edu.cn
[1]School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen, China
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

High-order quadrilateral meshes offer superior accuracy and computational efficiency in numerical simulations. However, existing methods struggle to simultaneously preserve boundary/interface features, ensure high quality, and achieve efficient generation, particularly for complex geometries where degenerate and inverted elements frequently occur. To address this issue, this paper proposes a high-quality high-order unstructured quadrilateral mesh generation method based on geometric error-bounded curve reconstruction, which employs an indirect approach to enforce interface consistency. By optimization-based curve reconstruction strategies, our method improves mesh quality while maintaining the validity of high-order elements. Compared to direct high-order mesh optimization techniques, our approach reduces the optimization problem to curve reconstruction problem, significantly lowering computational complexity and enhancing efficiency. Experimental results demonstrate that the proposed method efficiently generates high-quality high-order quadrilateral meshes while preserving boundary/interface geometric features, offering improved adaptability and numerical stability in complex geometries.

Keywords: High-order quadrilateral mesh; Curve reconstruction; High-quality mesh; Geometric error-bounded

Introduction

In recent years, high-order numerical methods have attracted widespread attention in both academia and industry due to their higher accuracy and faster convergence rates [1, 2, 3, 4]. High-order numerical methods employ high-order elements with more degrees of freedom (DOFs), which not only enhance the approximation capability of numerical schemes but also allow for better geometric representation, thereby improving the overall simulation accuracy.

The generation techniques for high-order triangular or tetrahedral meshes are relatively mature, and include approaches based on shell mapping [5], optimization-based strategies [6, 7], constructive methods [8, 9], and sampling techniques [10]. However, compared to triangular meshes, quadrilateral meshes at the same mesh resolution support higher-order interpolation spaces, thus enhancing the approximation power and convergence order of numerical methods [11]. In numerical simulations, quadrilateral meshes often exhibit superior numerical stability and convergence efficiency, making them widely adopted in high-precision simulation fields such as computational fluid dynamics. For example, in large-deformation multiphase flow problems, the widely used high-order arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) method [12] critically requires high-order, high-quality quadrilateral meshes to enhance its robustness.

Quadrilateral meshes can be classified into four categories: regular mesh, semi-regular mesh, valence semi-regular mesh, and unstructured mesh [13]. For models with complex geometries, unstructured meshes are particularly suitable for capturing intricate geometric features. In many application domains [14], such as multi-phase flow problems, it is often necessary to perform mesh partitioning on models composed of different materials. These models typically contain material interfaces, and the generated mesh must maintain interface constraints while ensuring consistency across the interface.

Compared to linear meshes, high-order meshes offer stronger geometric representation capabilities and can more accurately conform to model boundaries. This allows for a reduction in the number of required mesh elements while maintaining a desired level of both geometric and numerical accuracy. Additionally, high-order mesh elements possess more internal DOFs, which facilitates the development of algorithms with high computational density and low communication overhead—advantages that are beneficial for parallel acceleration [15].

Moreover, degradation in mesh quality can significantly impact the accuracy of subsequent numerical simulations. Especially when inverted elements appear, the numerical solution may become severely compromised [14]. This issue becomes even more critical in moving-mesh computations, where mesh quality directly affects both the stability and efficiency of the numerical solver. High-quality meshes can effectively reduce numerical errors, accelerate algorithmic convergence, and, to some extent, allow for larger time steps, thereby improving computational efficiency.

However, generating high-order quadrilateral meshes that are feature-preserving, efficient, and high-quality remains a significant challenge. Existing methods often struggle to achieve all three objectives simultaneously. For example, quadtree-based templated refinement approaches [16] are relatively efficient but tend to produce low quality elements near input curves, sometimes resulting in inverted elements, and they cannot handle non-closed interface curves. Block-structured methods [17] and optimization-based approaches [18] can produce higher-quality meshes but at considerable computational cost. In particular, optimization-based methods require managing a large number of variables for high-order elements, making them sensitive to initialization and expensive to compute.

Conclusion

This paper presents a novel method for efficiently generating high-quality, high-order, planar, unstructured quadrilateral meshes based on geometric error-bounded curve reconstruction. The proposed approach leverages the strong correlation between mesh quality and boundary curve segment distribution in high-order quadrilateral meshes, simplifying the high-dimensional optimization problem into a boundary curve reconstruction task. As a result, the method achieves both computational efficiency and high mesh quality, while preserving boundary and interface features with geometric accuracy within the prescribed error tolerance (as Fig.1). Extensive numerical experiments demonstrate that the method outperforms state-of-the-art techniques in terms of efficiency, mesh quality, and interface conformity, making it a promising solution for practical applications requiring high-fidelity discretizations.

We validate high-order ALE with our method on the triple-point problem [19, 20], a two-material, three-state Riemann problem that generates vorticity and serves as

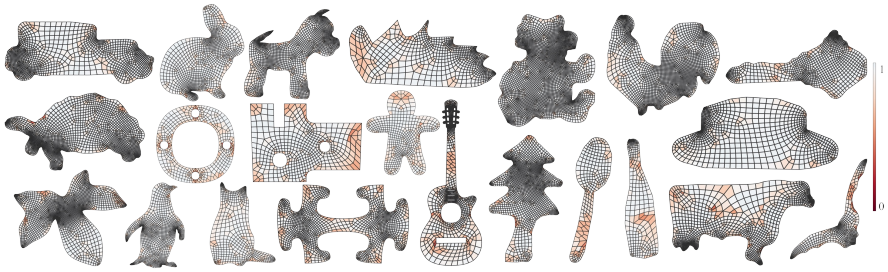


Figure 1 Sample results from the high-order ($n = 2, 3$), high-quality mesh dataset without interfaces. Element color is indicated by the minimum shape measure J_m.

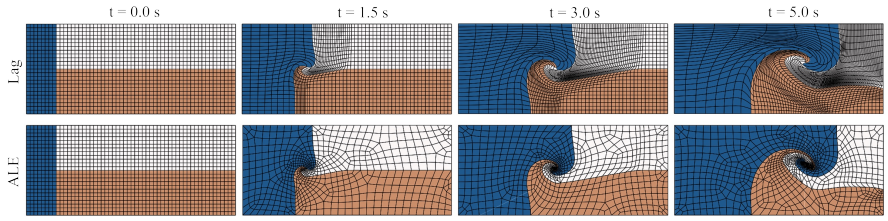


Figure 2 Triple-point problem ($n = 2$) solved using the high-order Lagrangian (Lag) method (top) and the high-order ALE method combined with our meshing approach (bottom). The Lag method is computed on the evolving mesh from the beginning, whereas the ALE method remeshes when mesh quality drops, achieving superior results with fewer elements, larger time steps, and shorter simulation times.

a classic 2D multi-material hydrodynamics benchmark. This problem tests mesh distortion handling by producing fine-scale vortex structures that become increasingly intricate with mesh refinement [21]. During the simulation, remeshing is triggered when the minimum mesh shape measure falls below 0.16. In the 5μs simulation, remeshing and high-order interpolation-based remapping [12] were performed seven times. Fig. 2 shows that high-order ALE coupled with our mesh generation method preserves clear interfaces and resolves finer vortices compared to the pure Lagrangian approach. Table 1 further demonstrates that high-order ALE with our adaptive meshes achieves superior results with fewer elements, larger time steps, fewer steps, and shorter simulation times.

Table 1 Simulation and final mesh quality data for Lagrangian and ALE methods (see Fig. 2).

	Step	$\min dt$	Time/s	Mesh at $t = 5$		
				Number of elements	$\min J_m$	avg J_m
Lagrange	59,986	0.000042	65251.28	1,344	0.043	0.473
ALE	**10,269**	**0.000279**	**25056.66**	**1,218**	**0.204**	**0.815**

Step: total number of time integration steps performed during the simulation; $\min dt$: the smallest time step size encountered over the entire simulation; Time/s: total simulation time. Results in bold indicate superior performance.

Author details
[1]School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen, China. [2]Fujian Provincial Key Laboratory of Mathematical Modeling and High-Performance Scientific Computation, Xiamen University, Xiamen, China.

[3]Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, , Beijing, China. [4]National Key Laboratory of Computational Physics, , Beijing, China. [5]School of Informatics, Xiamen University, Xiamen, China.

References

1. López, J., Anitescu, C., Rabczuk, T.: CAD-compatible structural shape optimization with a movable Bézier tetrahedral mesh. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **367**, 113066 (2020)
2. Ferguson, Z., Jain, P., Zorin, D., Schneider, T., Panozzo, D.: High-order incremental potential contact for elastodynamic simulation on curved meshes. In: ACM SIGGRAPH 2023 Conference Proceedings, pp. 1–11 (2023)
3. Le, Q., Deng, Y., Bu, J., Zhu, B., Du, T.: Second-order finite elements for deformable surfaces. In: SIGGRAPH Asia 2023 Conference Papers, pp. 1–10 (2023)
4. Dobrev, V.A., Kolev, T.V., Rieben, R.N.: High-order curvilinear finite element methods for Lagrangian hydrodynamics. SIAM Journal on Scientific Computing **34**(5), 606–641 (2012)
5. Jiang, Z., Zhang, Z., Hu, Y., Schneider, T., Zorin, D., Panozzo, D.: Bijective and coarse high-order tetrahedral meshes. ACM Transactions on Graphics (TOG) **40**(4), 1–16 (2021)
6. Feng, L., Alliez, P., Busé, L., Delingette, H., Desbrun, M.: Curved optimal delaunay triangulation. ACM Transactions on Graphics **37**(4), 16 (2018)
7. Ji, Y., Liu, S., Guo, J.-P., Su, J.-P., Fu, X.-M.: Evolutionary multi-objective high-order tetrahedral mesh optimization. Computer Aided Geometric Design **111**, 102302 (2024)
8. Mandad, M., Campen, M.: Bézier guarding: precise higher-order meshing of curved 2d domains. ACM Transactions on Graphics (TOG) **39**(4), 103–1 (2020)
9. Khanteimouri, P., Campen, M.: 3D Bézier guarding: boundary-conforming curved tetrahedral meshing. ACM Transactions on Graphics (TOG) **42**(6), 1–19 (2023)
10. Hu, Y., Schneider, T., Gao, X., Zhou, Q., Jacobson, A., Zorin, D., Panozzo, D.: Triwild: robust triangulation with curve constraints. ACM Transactions on Graphics (TOG) **38**(4), 1–15 (2019)
11. Schneider, T., Hu, Y., Gao, X., Dumas, J., Zorin, D., Panozzo, D.: A large-scale comparison of tetrahedral and hexahedral elements for solving elliptic PDEs with the finite element method. ACM Transactions on Graphics (TOG) **41**(3), 1–14 (2022)
12. Anderson, R.W., Dobrev, V.A., Kolev, T.V., Rieben, R.N., Tomov, V.Z.: High-order multi-material ALE hydrodynamics. SIAM Journal on Scientific Computing **40**(1), 32–58 (2018)
13. Bommes, D., Lévy, B., Pietroni, N., Puppo, E., Silva, C., Tarini, M., Zorin, D.: Quad-mesh generation and processing: A survey. In: Computer Graphics Forum, vol. 32, pp. 51–76 (2013). Wiley Online Library
14. Liu, L., Zhou, X., Guo, S., Chen, Y., Zhou, H.: Topology modification based rezoning strategies for the arbitrary Lagrangian-Eulerian method on unstructured hexahedral meshes. Computers & Mathematics with Applications **145**, 175–201 (2023)
15. Mittal, K., Parik, A., Dutta, S., Fischer, P., Kolev, T., Lottes, J.: General field evaluation in high-order meshes on GPUs. arXiv preprint arXiv:2501.12349 (2025)
16. Kopriva, D.A., Winters, A.R., Schlottke-Lakemper, M., Schoonover, J.A., Ranocha, H.: Hohqmesh: An all quadrilateral/hexahedral unstructured mesh generator for high order elements. Journal of Open Source Software **9**(104), 7476 (2024)
17. Marcon, J., Kopriva, D.A., Sherwin, S.J., Peiró, J.: Naturally curved quadrilateral mesh generation using an adaptive spectral element solver. arXiv preprint arXiv:1908.04272 (2019)
18. Dobrev, V., Knupp, P., Kolev, T., Mittal, K., Tomov, V.: The target-matrix optimization paradigm for high-order meshes. SIAM Journal on Scientific Computing **41**(1), 50–68 (2019)
19. Galera, S., Maire, P.-H., Breil, J.: A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ALE scheme using VOF interface reconstruction. Journal of Computational Physics **229**(16), 5755–5787 (2010)
20. Kucharik, M., Shashkov, M.: Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary Lagrangian–Eulerian methods. Journal of Computational Physics **258**, 268–304 (2014)
21. Kenamond, M., Kuzmin, D., Shashkov, M.: Intersection-distribution-based remapping between arbitrary meshes for staggered multi-material arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrodynamics. Journal of Computational Physics **429**, 110014 (2021)

RESEARCH

NeurFrame: Learning Continuous Frame Fields for Structured Mesh Generation

Xiaoyang Yu, Canjia Huang, Zhonggui Chen and Juan Cao*

*Correspondence:
juancao@xmu.edu.cn
Xiamen University, Xiamen, China
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

Structured meshes, composed of quadrilateral elements in 2D and hexahedral elements in 3D, are widely used in industrial applications and engineering simulations due to their regularity and superior accuracy in finite element analysis. Generating high-quality structured meshes, however, remains challenging, especially for complex geometries and singularities. Field-guided approaches, which construct cross fields in 2D and frame fields in 3D to encode element orientation, are promising but are typically defined on discrete meshes, limiting continuity and computational efficiency. To address these challenges, we introduce *NeurFrame*, a neural framework that represents frame fields continuously over the domain, supporting infinite-resolution evaluation. Trained in a self-supervised manner on discrete mesh samples, NeurFrame produces smooth, high-quality frame fields without relying on dense tetrahedral discretizations. The resulting fields simultaneously guide high-quality quadrilateral surface meshes and hexahedral volumetric meshes, with fewer and better-distributed singularities. By using a single network, NeurFrame also achieves lower computational cost compared to prior self-supervised neural methods that jointly optimize multiple fields.

Keywords: Frame field; Neural network; Quadrilateral meshing; Hexahedral meshing

Introduction

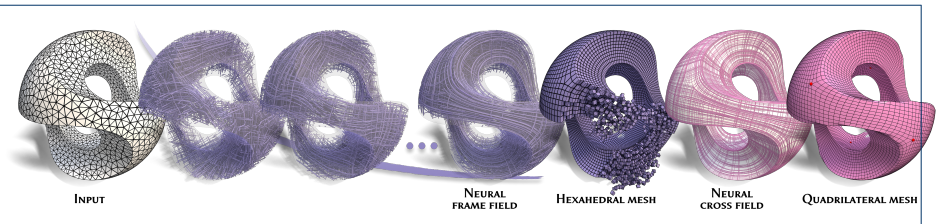


Figure 1 Continuous neural frame field generation for structured meshing. Starting from a randomly initialized volumetric frame field, NeurFrame progressively smooths it and aligns it with surface normals and specified features. The optimized field can drive high-quality hexahedral mesh generation and, via surface cross fields, produce high-quality quadrilateral meshes.

A structured mesh consists of regular elements: quadrilateral elements with four corner nodes in 2D and hexahedral elements with eight corner nodes in 3D [1]. Their regular cells and superior performance in finite element analysis make structured meshes widely adopted in industrial applications and engineering simula-

tions, including polygonal modeling, texture mapping, computational fluid dynamics, tensor-product spline fitting, and isogeometric analysis [2].

However, generating structured meshes remains highly complex. In 2D, achieving the minimum number of singular points with optimal placement in quadrilateral mesh generation is still an open and active research problem [3]. In 3D, the challenges increase substantially, especially in constructing volumetric mappings that are locally injective, low-distortion, and compatible with integer constraints [4]. Despite decades of research and notable advances, algorithmically generating high-quality hexahedral meshes that conform to complex geometries remains largely unsolved [4].

Field-guided methods are a promising class of techniques for structured mesh generation. They first construct a guiding field called a cross field in 2D or a frame field (also referred to as an *octahedral field*) in 3D. This field encodes the desired local orientation and structural properties of mesh elements. In 2D (top of Fig. 2), the cross field drives surface parameterization [5, 6, 7], from which a regular quadrilateral tessellation in the parametric domain is pulled back to the surface [8]. This produces a structured quadrilateral mesh. In 3D (bottom of Fig. 2), the frame field guides the construction of an integer-grid map (IGM) [9, 10]. The IGM is an atlas of charts whose maps and transition functions satisfy boundary alignment, local injectivity, and conformity. A regular cubic tessellation is then pulled back to the volume, resulting in a high-quality hexahedral mesh [11, 12].

Compared with other quadrilateral or hexahedral mesh generation techniques, field-guided approaches can represent arbitrary singularity structures; see Fig. 2. This flexibility enables the construction of high-quality meshes, especially when precise alignment with complex boundary features and internal structures is required [4]. Despite their effectiveness, constructing high-quality cross and frame fields remains challenging. Most existing methods operate on discrete surface or volumetric meshes and solve for the fields via optimization on these discretizations. As a result, the resulting fields are defined only at discrete locations. In 3D, tetrahedral discretizations further introduce a trade-off between computational cost and field quality. Fine tetrahedral meshes are expensive to generate and process, whereas coarse meshes suffer from discretization artifacts that lead to noisy and irregular field topology [13]. A continuous frame field representation can potentially reduce computational cost while maintaining high-quality fields by decoupling optimization from dense tetrahedral meshes.

Based on the above observations, we propose a neural approach for computing frame fields. Our method represents the frame field as a continuous neural function trained from discrete samples and uses it to guide structured mesh generation. As shown in Fig. 1, by exploiting the cubic symmetry and boundary alignment properties of frame fields, our approach supports both high-quality hexahedral and quadrilateral mesh generation. Compared to traditional field-based methods, it avoids reliance on fine tetrahedral discretizations and directly produces a continuous frame field with fewer and better-distributed singularities. Moreover, it is more efficient than existing neural field-learning approaches. We call this method *NeurFrame* and summarize our contributions below.

- We propose *NeurFrame*, a self-supervised neural approach that provides a continuous representation of frame fields, allowing optimization on coarse volumetric discretizations while supporting queries throughout the entire model.
- Leveraging the strong approximation capability of neural networks, NeurFrame produces frame fields that simultaneously guide high-quality quadrilateral surface meshing and hexahedral volumetric meshing, with fewer and better-distributed singularities, improving mesh regularity and structural fidelity.
- NeurFrame employs a single network, thereby achieving lower computational cost than prior self-supervised neural methods that jointly optimize two neural fields, including cross-field method [14] and frame-field method [15].

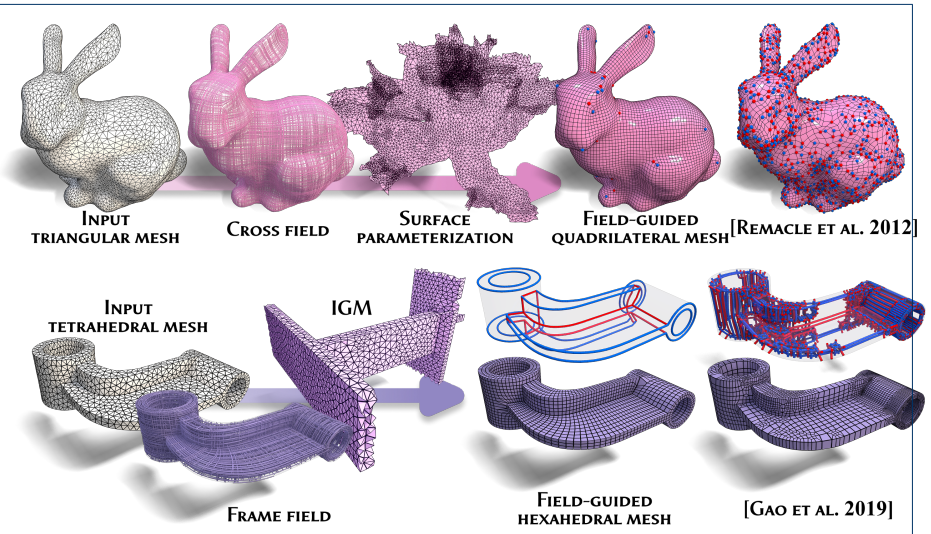


Figure 2 The field-guided structured mesh generation pipeline begins with an input triangular or tetrahedral mesh. A cross or frame field is optimized on the surface or volume to guide parameterization, aligning the mesh elements with the field directions. The structured mesh is then extracted from this parameterization. Compared to other quadrilateral or hexahedral mesh generation methods, such as the triangle-merge [16] and octree-based [17] approaches, field-guided methods yield higher-quality meshes with fewer singularities (red and blue) and a more balanced singularity distribution.

Author details
Xiamen University, Xiamen, China.

References

1. Yeoh, G.H., Tu, J.: Chapter 3 - solution methods for multi-phase flows. In: Yeoh, G.H., Tu, J. (eds.) Computational Techniques for Multiphase Flows, pp. 95–242. Butterworth-Heinemann, Oxford (2010)
2. Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **194**(39), 4135–4195 (2005)
3. Feng, L., Tong, Y., Desbrun, M.: Q-zip: singularity editing primitive for quad meshes. ACM Trans. Graph. **40**(6) (2021)
4. Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., Cherchi, G., Bommes, D., Gao, X., Scateni, R., Ledoux, F., Remacle, J., Livesu, M.: Hex-mesh generation and processing: A survey. ACM Trans. Graph. **42**(2) (2022)
5. Kälberer, F., Nieser, M., Polthier, K.: Quadcover - surface parameterization using branched coverings. Computer Graphics Forum **26**(3), 375–384 (2007)
6. Bommes, D., Zimmer, H., Kobbelt, L.: Mixed-integer quadrangulation. ACM Trans. Graph. **28**(3) (2009)
7. Myles, A., Pietroni, N., Zorin, D.: Robust field-aligned global parametrization. ACM Trans. Graph. **33**(4) (2014)
8. Ebke, H.-C., Bommes, D., Campen, M., Kobbelt, L.: QEx: Robust quad mesh extraction. ACM Trans. Graph. **32**(6), 168–116810 (2013)
9. Nieser, M., Reitebuch, U., Polthier, K.: Cubecover– parameterization of 3d volumes. Computer Graphics Forum **30**(5), 1397–1406 (2011)

10. Brückler, H., Bommes, D., Campen, M.: Volume parametrization quantization for hexahedral meshing. ACM Trans. Graph. **41**(4) (2022)
11. Lyon, M., Bommes, D., Kobbelt, L.: Hexex: robust hexahedral mesh extraction. ACM Trans. Graph. **35**(4) (2016)
12. Kohler, T., Heistermann, M., Bommes, D.: Hexhex: Highspeed extraction of hexahedral meshes. ACM Trans. Graph. **44**(4) (2025)
13. Solomon, J., Vaxman, A., Bommes, D.: Boundary element octahedral fields in volumes. ACM Trans. Graph. **36**(4) (2017)
14. Dong, Q., Wen, H., Xu, R., Chen, S., Zhou, J., Xin, S., Tu, C., Komura, T., Wang, W.: Neurcross: A neural approach to computing cross fields for quad mesh generation. ACM Trans. Graph. **44**(4) (2025)
15. Zheng, R., Yu, T., Hu, R.: Neural octahedral field: Octahedral prior for simultaneous smoothing and sharp edge regularization. ACM Trans. Graph. **44**(6) (2025)
16. Remacle, J.-F., Lambrechts, J., Seny, B., Marchandise, E., Johnen, A., Geuzainet, C.: Blossom-quad: A non-uniform quadrilateral mesh generator using a minimum-cost perfect-matching algorithm. International Journal for Numerical Methods in Engineering **89**(9), 1102–1119 (2012)
17. Gao, X., Shen, H., Panozzo, D.: Feature preserving octree-based hexahedral meshing. Computer Graphics Forum **38**(5), 135–149 (2019)

Additional Files

Additional file 1 — teaser-figure.png
Figure 1.

Additional file 2 — field-guided-meshing-pipeline.png
Figure 2.

详细摘要

面向无黏与黏性流动的笛卡尔切割单元虚拟合并方法

Yingbin Zhang[1], Guangxue Wang[1], Yufei Pang[2] and Huaibao Zhang[1*]

*Correspondence:
zhanghb28@sysu.edu.cn
[1] 航空航天学院, 中山大学, 广州, 510006, 中国
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

目的: 针对显式笛卡尔切割单元离散中极小控制体导致的严苛时间步约束与壁面数值噪声，提出一种不改变网格拓扑的虚拟合并方法。

方法: 将体积分数小于 0.33 的切割单元与面相邻主单元组成主-从虚拟组，以体积加权虚拟形心和增广最小二乘模板统一空间重构；常规逐面通量循环后，对组内守恒残差求和并按物理体积分配，使时间推进按组合体积归一化。

结果: 无黏圆柱算例保持近二阶收敛并在各级网格取得最小熵误差；凸包算例无需附加限制器即可稳定收敛。斜平板与 NACA 0012 算例的壁面摩阻相对 L_2 误差分别降低 59.32% 和 97.18%，代表性算例总耗时为原方法的 46.70%–72.56%。

结论: 该方法在保留原网格拓扑与标准通量计算框架的同时，有效消除小单元稳定性约束，并显著改善边界附近的光滑性与精度。

Keywords: 虚拟合并; 小单元问题; 笛卡尔网格; 切割单元方法; 守恒残差

1 研究背景

笛卡尔网格具有生成简单、数据结构规整以及便于自适应加密和并行计算等优点。切割单元方法通过几何重构直接保留固壁与背景网格相交后的流体控制体，能够在复杂边界附近保持清晰界面和严格守恒 [1]。然而，由于切割的任意性，壁面附近网格的局部体积可能比完整单元小数个数量级。显式有限体积格式的稳定时间步随控制体体积减小，少量极小单元便会限制全场推进，并诱发近壁振荡甚至发散。

已有处理主要包括几何合并、通量或状态再分配以及局部隐式推进。几何合并需要重建不规则多面体及其连接关系；通量再分配实现方便，但在切割单元附近常引入一阶误差 [2, 3]；局部隐式方法则需要求解耦合方程。对于已采用单元树和统一逐面通量循环的工程求解器，如何在不改动底层网格拓扑的前提下兼顾稳定性、守恒性与高阶重构，仍是关键问题。

2 方法概述

本文面向定常嵌入边界上的可压缩无黏与黏性流动，建立拓扑保持的虚拟合并框架。方法仅在求解层构造主-从关联，所有切割单元仍作为独立网格实体保存；虚拟几何用于梯度与壁面状态重构，守恒耦合则在逐面通量累积完成后实施。因此，原有面连接、Riemann 求解器以及显式 Runge–Kutta 推进框架均可保留。控制方程采用可压缩 Navier–Stokes 方程的单元中心有限体积离散：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\mathbf{W}\,\mathrm{d}\Omega+\oint_{\partial\Omega}(\mathbf{F}_c-\mathbf{F}_v)\,\mathrm{d}S=0. \tag{1}$$

对流通量由 AUSM$^+$-up 近似 Riemann 求解器计算，黏性通量由原始变量及其最小二乘梯度重构，时间方向采用显式四步 Runge–Kutta 格式。

2.1 主-从分组与虚拟几何

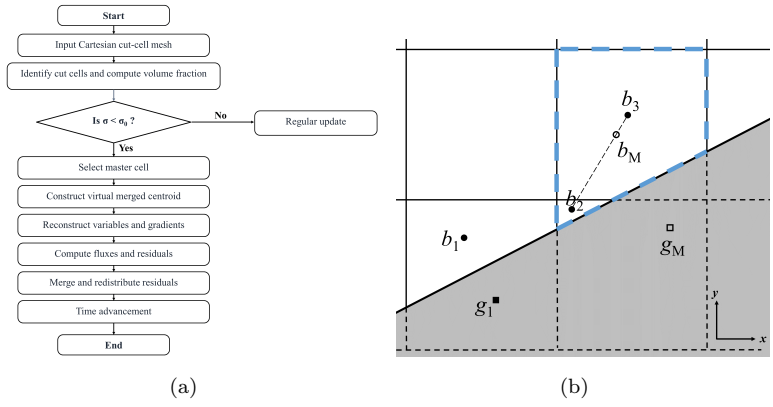
以切割后体积与原完整单元体积之比定义体积分数 σ。当 $\sigma < \sigma_0 = 0.33$ 时，将单元标记为小单元。对小单元 s，在所有面相邻单元中选择中心连线与壁面法向绝对投影最大的候选主单元：

$$\sigma = \frac{V_{\mathrm{cut}}}{V_{\mathrm{full}}}, \qquad c(s) = \arg\max_{b_j \in \mathcal{N}_f(s)} \left| \mathbf{L}_{b_j s} \cdot \mathbf{n}_f \right| . \tag{2}$$

若候选仍为小单元，则沿候选链继续追踪直至非小单元；若全小单元分量形成环，则取该分量中体积最大的单元为最终主单元。由此消除链式和循环歧义，并保证每个小单元只属于一个虚拟组。设主单元为 m、从单元为 s_i，组合体积及体积加权虚拟形心为

$$V_{\mathrm{vm}} = V_m + \sum_i V_{s_i}, \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{vm}} = \frac{V_m \mathbf{x}_m + \sum_i V_{s_i} \mathbf{x}_{s_i}}{V_{\mathrm{vm}}}. \tag{3}$$

虚拟形心替代组内各单元的原形心参与重构；主单元的最小二乘模板扩充为主、从单元邻域的并集，所得梯度复制给从单元。壁面幽灵单元位置由虚拟形心关于壁面镜像得到，并以受约束的幽灵单元重构满足壁面条件 [4]。物理体积、面及其连接关系均不改变。



(a) (b)

Figure 1 **虚拟合并方法**：(a) 计算流程；(b) 小单元与主单元形成的虚拟控制体及公共形心。

2.2 守恒残差合并与时间推进

空间离散仍遍历全部网格面并分别累积各单元原始残差。对虚拟组 G，在每个显式子步计算组合残差 $\mathbf{R}_G$，再按物理体积将其分配回各成员：

$$\mathbf{R}_G = \sum_{i \in G} \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{R}'_i = \frac{V_i}{V_G} \mathbf{R}_G, \quad \mathbf{W}_i^{n+1} = \mathbf{W}_i^n - \frac{\Delta t_m}{V_G} \mathbf{R}_G. \tag{4}$$

更新分母由任意小的 V_i 变为组合体积 V_G，从而解除小单元的时间步约束。组内公共面通量在残差求和时成对抵消，仅虚拟控制体外边界通量保留，因此该更新与统一控制体上的有限体积平衡完全一致，并满足局部守恒。主、从单元以独立实体存储但状态同步，使算法可直接嵌入现有笛卡尔求解器。

2.3 单个显式子步的实现

虚拟组建立后，首先以体积加权的组平均守恒量同步初始化主、从单元，因而不改变组内总质量、动量与能量。每个 Runge–Kutta 子步依次执行：依据当前子步解和给定壁面条件更新幽灵单元；用增广模板计算主单元梯度并复制至从单元；清零所有单元残差，按原算法遍历每个网格面、重构左右状态并以相反符号累积通量；对未分组单元执行常规更新；最后对每个虚拟组计算总体积和组合残差，按体积分配后用主单元时间步同步推进组内状态。

对于固定嵌入边界，主-从关系、虚拟形心和模板索引均在流场迭代前一次构造并存储；每个子步新增操作仅包括少量组内求和、复制与分配。由于守恒论证只依赖内部面通量成对抵消，而不依赖二维几何特性，同一流程可直接推广至三维切割单元。若用于动态自适应或运动边界，只需在切割拓扑改变时重新解析主-从关系。

3 数值结果与分析

采用无黏圆柱、无黏凸包通道、$\mathrm{Re} = 20/40$ 黏性圆柱、15° 斜平板以及 NACA 0012 层流等算例验证方法。网格中的最小体积分数低至 1.30×10^{-5}，小单元占比为 0.54%–2.68%。除特别说明外均不使用限制器。

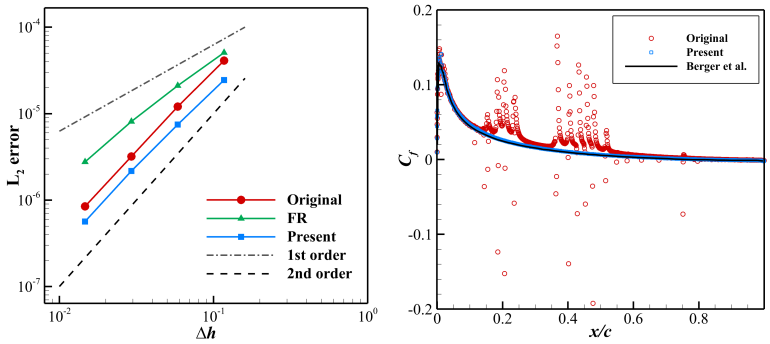


Figure 2 代表性结果：(a) 无黏圆柱熵误差收敛性；(b) NACA 0012 壁面摩阻分布。

无黏圆柱由粗到细四级网格的平均收敛阶为 1.8097，接近原方法的 1.8669，明显高于通量再分配的 1.3995；且本文方法在每级网格上的熵误差均最小。在更具挑战性的凸包通道中，原方法不加限制器时发散，而虚拟合并和通量再分配均稳定收敛；本文方法同时显著减弱曲线壁面产生并向下游输运的熵误差。

Table 1 壁面摩阻系数相对误差。

算例	方法	相对 L_2 误差	归一化最大误差
斜平板	原方法	0.1011	0.3803
	虚拟合并	0.04114	0.1077
NACA 0012	原方法	3.830	12.92
	虚拟合并	0.1081	0.3717

黏性圆柱的阻力系数与回流区长度和文献结果一致，表明虚拟合并不改变全局分离流结构。对梯度更敏感的壁面摩阻改善尤为明显：斜平板的相对 L_2 误差和归一化最大误差分别降低 59.32% 和 71.68%，NACA 0012 算例分别降低 97.18% 和 97.12%。代表性算例总耗时仅为原方法的 46.70%–72.56%，说明允许采用更大稳定时间步所带来的收益超过新增分组与残差处理开销。

4 结论

本文提出的虚拟合并方法通过主-从分组、公共重构几何和守恒残差更新，将显式推进的尺度从极小切割单元体积提升至虚拟组总体积。该方法不删除或重建物理单元，不改变原面连接和逐面通量循环，并由组内通量抵消自然保证局部守恒。算例表明，该方法能够保持近二阶精度，提高无黏与黏性流动计算的稳定性，并显著抑制压力和壁面摩阻中的非物理振荡。拓扑保持且维数无关的构造也为后续扩展至三维网格、动态自适应和运动边界问题提供了基础。

Author details

[1] **航空航天学院**, **中山大学**, **广州**, 510006, **中国**. [2] **中国空气动力研究与发展中心**, **绵阳**, 621000, **中国**.

References

1. Mittal, R., Iaccarino, G.: Immersed boundary methods. Annual Review of Fluid Mechanics **37**, 239–261 (2005). doi:10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743
2. Colella, P., Graves, D.T., Keen, B.J., Modiano, D.: A Cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics **211**(1), 347–366 (2006). doi:10.1016/j.jcp.2005.05.026
3. Berger, M., Giuliani, A.: A state redistribution algorithm for finite volume schemes on cut cell meshes. Journal of Computational Physics **428**, 109820 (2021). doi:10.1016/j.jcp.2020.109820
4. Wei, Y., Zhang, F., Liu, J., Su, H., Xu, C.: A constrained boundary gradient reconstruction method for unstructured finite volume discretization of the Euler equations. Computers & Fluids **252**(105774), 1–23 (2023). doi:10.1016/j.compfluid.2022.105774

基于 SO(3)表示的网格特征对齐 N 方向场设计

金维丰，陈仁杰*

（中国科学技术大学，数学科学学院）

摘　要：N 方向场是纹理合成、曲面参数化和四边形重网格等几何处理任务中的重要中间表示。高质量方向场既要具有内蕴平滑性，避免在曲面上产生不必要的扭转，又要能与曲面特征线对齐，使后续网格边能够保留尖锐或浅显的几何细节。传统方法常依赖主曲率方向或预先检测出的特征边；当前者在噪声、近似平坦区域或复杂特征处不稳定时，方向场容易偏离真实特征。另一类外蕴方法直接比较嵌入空间中的方向向量，虽可自动响应曲面折痕，却会把场的扭转与曲面弯曲耦合在同一个能量中，从而对网格离散噪声敏感。本文提出一种基于 $SO(3)$ 标架的 N 方向场优化框架：在每个三角面上用代表切向方向、其正交方向和面法向组成正交标架；通过离散 Levi-Civita 平移消除相邻切空间之间的曲面弯折后，利用 $SO(3)$ 相对旋转度量方向场的内蕴变化；同时以代表方向在相邻面法向上的投影构造外蕴特征对齐项。两类能量在同一代数结构中表达，但分别承担平滑与对齐目标。实验表明，该方法在浅折痕、非光滑特征交汇以及不同网格分辨率条件下均能生成更稳定的交叉场，并能改善四边形重网格结果的特征保持能力。

关键词：N 方向场，$SO(3)$ 表示，特征对齐，四边形网格生成

0　引　　言

N 旋转对称切向量场，又称 N 方向场，允许同一面上的方向相差 $2k\pi/N$ 而被视为等价。典型的 N=4 情形即交叉场，它给出四边形重网格中局部两组边方向。方向场若过分追随局部特征，会牺牲全局一致性；若只追求内蕴平滑，又可能跨过浅折痕或局部棱线，使重网格无法保留形状细节。因此，本文关注的问题是：如何在不预先指定全部特征线的情况下，得到既平滑又自动贴合几何特征的 N 方向场。

已有方法大致分为两类。一类在内蕴平滑目标上加入由主曲率或人工特征给出的约束，但主曲率方向在噪声网格、近似平坦区域以及浅特征处并不可靠。另一类使用外蕴能量，直接比较相邻面中嵌入三维空间的方向向量，由于相邻面夹角越大，方向不一致的代价越高，该策略天然会推动方向沿折痕排列。然而，这种比较也把曲面弯曲带来的法向变化混入光顺度量，可能把离散噪声误认为需要对齐的特征。本文的核心思想是使用 SO(3)标架统一表示方向场的切向方向和曲面法向，并将方向场变化与曲面弯曲进行区分。通过离散 Levi-Civita 输运，可以在内蕴意义下度量相邻方向之间的变化，从而构造不受曲面外蕴弯曲直接干扰的光滑性能量。同时，通过相邻面法向之间的变化构造外蕴特征对齐项，使方向场能够自动响应曲面的几何特征。

1　方法概述

在三角网格的每个面 f 上选取 N 方向场的一个代表方向 $\mathrm{u_f}$，并与 $\mathrm{v_f} = \mathrm{n_f} \times \mathrm{u_f}$ 及面法向 n_f 组成旋转矩阵 $R_f = [u_f, v_f, n_f] \in SO(3)$。这种提升表示把切向方向和曲面法向放入同一正交标架中：第一列携带需要优化的方向，第三列固定为曲面法向，第二列维持右手正交结构。由于 $SO(3)$ 的元素不能用普通矩阵差直接比较，本文通过相对旋转的矩阵对数得到最小轴角向量，其范数对应 $SO(3)$ 上的测地距离。

为了比较相邻面 f 和 g 的方向场，必须先把它们放入同一个切空间。本文采用离散 Levi-Civita 平移，用绕公共边 e_{fg} 的最小旋转 R_{fg} 将 n_f 转到 n_g，并把面 f 上的标架运输到面 g 的切空间。运输后的相对旋转 $S_{fg} = R_{fg} R_f R_g^T$ 的旋转轴可视为沿 n_g，因而可取有符号角 $\theta_{fg} = n_g^T \left(log\, S_{fg} \right)^{\vee}$ 来描述相邻代表

方向之间的内蕴扭转。考虑 N 重对称性后，内蕴平滑能量写为 $E_{int} = 1 - cos(N\theta_{fg})$，当相邻代表方向仅相差 N 方向场的等价旋转时能量为零。

特征对齐项来自一个简单几何事实：两个非共面的相邻三角面共享边 e_{fg}。若切向方向 u_f 同时位于相邻面 g 的切平面内，则 u_f 与 n_g 正交，也就平行于两切平面的交线，即公共边。于是，本文用 $(u_f^T\, n_g)^2 + (u_g^T n_f)^2$ 作为局部外蕴对齐能量。该项在近平坦区域几乎不起作用；当相邻法向变化明显时，它会促使方向沿公共边排列。因此，浅折痕或未由阈值检测出的特征仍能通过法向变化被软性捕获，而不会直接改变内蕴平滑度量。

最终目标是在所有内部边上最小化混合能量 $E_{mix} = \Sigma(E_{int} + \mu\rho_{fg}E_{ext})$。其中 μ 控制整体特征对齐强度，$\rho_{fg} = \frac{1-n_f^T n_g}{2}$ 根据相邻面法向差异自动调整局部权重：折痕越明显，对齐项越强；区域越平坦，平滑项越占主导。为避免直接优化旋转矩阵破坏 $SO(3)$ 约束，本文把每个面上的标架写为 $R_f = Q_f \exp(\theta_f \hat{e_z})$，其中 Q_f 是把标准 z 轴旋到 n_f 的固定旋转，θ_f 是唯一优化变量。这样，每次更新只改变绕法向的角度，自动保持方向单位长度、切向性、正交性以及 $SO(3)$ 成员关系。

由于混合能量非凸，算法先用 N-polyvector 的复多项式表示构造一个全局平滑初值，并根据较大二面角边设置 Dirichlet 约束，使初始场已能对齐显著尖锐特征。随后，在高特征权重邻域对每个面贪心选择 N 个等价分支中外蕴能量较低的代表方向，以减小后续连续优化对分支选择的敏感性。最后，将内蕴项和外蕴项改写为平方残差，推导关于 θ_f 的闭式 Jacobian，并使用带阻尼的 Gauss-Newton 迭代与回溯线搜索求解。优化完成后，再由最终角度恢复每个面的完整 N 方向集合。

2 实验结果与分析

论文主要在 N=4 的交叉场情形下评估方法，并与其它向量场计算方法进行比较。特征对齐实验显示，在包含浅折痕的网格模型上，依赖主曲率引导的方法容易让向量场追踪流线直接穿过网格特征；外蕴能量方法和本文方法都能较好跟随折痕，但本文方法在局部字形可视化中更稳定地使交叉方向平行或垂直于目标特征边。在特征与主曲率方向较一致的模型上，多数方法均能对齐，但本文结果仍表现出更精确的局部贴合。

平滑性实验进一步说明了能量解耦的价值。内蕴方法能给出较直的流线，但对未显式约束特征响应不足；外蕴方法将平滑与特征对齐耦合在同一能量中，其产生的向量场的平滑性易受三角网格质量与噪声影响。本文方法在比较相邻方向前先做 Levi-Civita 平移，因此不会把面法向的离散扰动直接当作方向场扭转，在三圆柱交汇、帽状模型以及不同分辨率网格上均显示出较好的平滑保持能力。

在四边形重网格实验中，论文将各方法生成的交叉场输入可靠特征线驱动的四边形重网格流程。结果表明，本文场能使四边形边更紧密地沿原始几何特征排列，特别是在尖角和曲面交汇等区域，能更好保留明显棱线和局部结构。总体而言，本文的 SO(3) 标架表示把内蕴一致性和外蕴特征响应分离，使交叉场更适合作为高保真四边形网格生成的输入。

3 结　论

本文提出了一种基于 SO(3) 表示的 N 方向场优化框架。方法将每个面的代表方向、正交切向方向和法向组成三维正交标架，用离散 Levi-Civita 平移后的 SO(3) 相对旋转刻画内蕴平滑性，并用代表方向对相邻面法向的投影构造软特征对齐项。该表示统一了方向场与曲面法向的信息，却在能量层面解耦了平滑和特征对齐，从而在噪声、浅折痕和复杂特征交汇区域获得更稳健的结果。

该方法的主要局限在于混合目标为非线性非凸问题，虽然平滑初值和分支选择能改善收敛稳定性，但

在复杂特征交汇或多个折痕方向竞争的区域仍可能依赖初始代表分支。后续工作可将该 $SO(3)$ 标架思想扩展到三维体网格中的标架场设计、六面体网格生成以及三维张量场优化等领域。

基于静电场的点云法线定向方法

王子涵，马　龙，魏广顺，李佳泽，周元峰*

（山东大学软件学院，济南 250101；南洋理工大学，新加坡）

摘　要：点云法线定向是数字几何处理和三维视觉中的一项基本任务，可应用于表面重建和形状分析。现有的方法聚焦于传播局部法线方向而可能缺乏全局一致性，或在预离散化的空间结构上求解全局优化问题而限制了几何灵活性。本文提出了一种基于静电场的点云法线定向方法，该方法使用由一组粒子定义的离散库仑核对定向问题进行建模，从而得到一个具有闭式表达式的光滑场。通过优化该场使其与局部估计的切平面正交，可以得到在点云上全局一致的矢量场作为法线方向。我们的方法采用动态的、无网格的粒子表示，粒子位置、大小和数量均可自适应调整，粒子在优化过程中不断演化，以使场表示适应底层几何形状。实验证明这种方法能够在水密模型中产生一致的方向，同时保持精细的几何细节。

关键词：静电场，点云定向

0 引　言

点云法向定向是计算机图形学、数字几何处理和三维视觉中的基础问题，也是多数点云表面重建方法的重要前置步骤[1-3]。传统方法通常采用主成分分析（PCA）估计局部切平面及法向[4]，但无法确定法向朝内或朝外的全局方向。早期研究主要通过邻域之间传播法向方向实现一致定向[5-6]，但容易受到噪声影响，并在复杂几何结构上产生误差累积。近年来，研究人员通过建立全局优化模型提高法向一致性[7-10]，通常借助符号隐式函数或广义绕数等表示进行求解，但此类方法往往依赖预离散的网格或八叉树等空间结构，限制了表示的灵活性，并可能削弱尖锐几何细节。

针对上述问题，本文提出一种基于电模型的动态无网格点云法向定向方法。该方法受静电场启发，将法向定向转化为电场与无向切平面的全局对齐问题，利用物体内部的正粒子描述基本拓扑，并通过外部负粒子增强复杂非凸区域的场表达能力。优化过程从物体内部的单个正粒子开始，交替优化粒子位置和电量，使生成的电场与点云切平面保持正交。同时，通过分析对齐目标的 Hessian 信息指导粒子分裂，并利用梯度残差动态引入外部粒子，使粒子系统能够在无需固定空间离散结构和显式几何启发的情况下，自适应地表达复杂几何特征。

1 问题描述

现有点云法向定向方法主要可以分为传播方法、全局优化方法、重建方法、学习方法以及近年来出现的物理启发方法。

早期研究主要采用局部传播策略。Hoppe 等人提出基于最小生成树（MST）的法向传播方法，通过邻域图逐步确定点云法向方向[5]，后续研究进一步改进了邻域图构造和一致性度量，以提高传播过程的鲁棒性[6,11-12]。这类方法计算效率较高，但局部错误容易沿传播路径累积，在稀疏采样、薄结构及复杂拓扑情况下稳定性有限。

近年来，全局优化方法逐渐成为研究重点。GCNO、BIM 和 WNNC 等方法利用广义绕数（GWN）的全局性质，分别从场的正则性、调和性以及梯度与法向一致性等角度建立优化模型[7,9-10]；SNO 则通过随机优化和局部方向约束实现全局一致定向[8]。相比局部传播方法，这类方法具有更强的全局一致性，但其性能较大程度上依赖于场表示、目标函数以及相应的优化策略。另一类方法将法向定向融合到表面重建过程中，例如 iPSR 和 DWG 等方法可以在重建隐式曲面的同时获得一致法向[13-14]，但其主要目标仍然是表面

重建，而非独立的法向定向问题。

近年来也出现了基于学习和物理场的法向处理方法。SHS-Net 利用神经网络直接预测具有一致方向的法向[15]，但学习方法的性能通常受到训练数据和泛化能力的影响。Dipole 利用电场在局部一致区域之间传播法向方向[16]，FaCE 则基于导体笼和泊松方程构造物理场完成法向估计[17]。与这些方法不同，本文直接采用可自由移动的带符号库仑粒子表示连续电场，并联合优化粒子的位置、电量和数量，以闭式形式计算空间中的电场，无需预先构建固定网格。

通过对上述方法的分析，可以得到以下观察结果：1）局部传播方法实现简单、效率较高，但容易产生误差累积，对复杂拓扑和薄结构的适应能力有限；2）全局优化和重建方法能够提高整体一致性，但通常需要精心设计场表示及优化目标，表示方式也具有一定约束；3）学习方法依赖训练数据，面对分布外几何结构时存在泛化问题；4）现有物理启发方法尚未充分利用可动态变化的场源表示。因此，如何在无需固定空间离散结构的情况下构造具有较强表达能力的连续全局场，并使其能够根据几何复杂程度自适应调整，是点云法向定向中值得进一步研究的问题。

2 结　论

本文提出了一种基于静电场驱动的点云法向定向方法。不同于依赖 Voronoi 图、网格连接关系或其他离散几何结构的传统方法，本文通过动态优化带符号粒子的位置、电量和数量，直接在点集上构造连续电场，并利用该静电场引导点云法向实现全局一致定向。该方法同时形成了具有明确内外关系的体表示，可自然衔接表面重建和其他点云几何处理任务。

由于静电场采用解析形式表示，其场值及梯度均可直接计算，并具有良好的可微性，因此也具备与学习方法结合的潜力。

未来工作主要包括以下几个方面。1）引入更加鲁棒的几何先验和混合约束，进一步扩展方法对复杂形状的适用范围；2）研究该模型在可微渲染中的应用；3）探索其在物理引导几何学习等任务中的应用。

参 考 文 献:

[1] OHTAKE Y, BELYAEV A, ALEXA M, et al. Multi-level partition of unity implicits[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(3): 463-470.

[2] KAZHDAN M, BOLITHO M, HOPPE H. Poisson surface reconstruction[C]//Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing. Goslar: Eurographics Association, 2006: 61-70.

[3] KAZHDAN M, HOPPE H. Screened Poisson surface reconstruction[J]. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(3): 29.

[4] MAĆKIEWICZ A, RATAJCZAK W. Principal components analysis (PCA)[J]. Computers & Geosciences, 1993, 19(3): 303-342.

[5] HOPPE H, DEROSE T, DUCHAMP T, et al. Surface reconstruction from unorganized points[C]//Proceedings of the 19th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 1992: 71-78.

[6] KÖNIG S, GUMHOLD S. Consistent propagation of normal orientations in point clouds[C]//Proceedings of VMV. 2009: 83-92.

[7] XU R, DOU Z, WANG N, et al. Globally consistent normal orientation for point clouds by regularizing the winding-number field[J]. ACM Transactions on Graphics, 2023, 42(4): 111.

[8] HUANG G, FANG Q, ZHANG Z, et al. Stochastic normal orientation for point clouds[J]. ACM Transactions on Graphics, 2024, 43(6): 1-12.

[9] LIN S, SHI Z, LIU Y. Fast and globally consistent normal orientation based on the winding number normal consistency[J]. ACM Transactions on Graphics, 2024, 43(6): 1-19.

[10] LIU W, WANG X, ZHAO H, et al. Consistent point orientation for manifold surfaces via boundary integration[C]//ACM SIGGRAPH 2024 Conference Papers. 2024: 1-11.

[11] JAKOB J, BUCHENAU C, GUTHE M. Parallel globally consistent normal orientation of raw unorganized point clouds[J]. *Computer*

Graphics Forum, 2019, 38(5): 163-173.

[12] SCHERTLER N, SAVCHYNSKYY B, GUMHOLD S. Towards globally optimal normal orientations for large point clouds[J]. *Computer Graphics Forum*, 2017, 36(1): 197-208.

[13] HOU F, WANG C, WANG W, et al. Iterative Poisson surface reconstruction (iPSR) for unoriented points[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2022, 41(4): 128.

[14] LIU W, LI J, CHEN X, et al. Diffusing winding gradients (DWG): A parallel and scalable method for 3D reconstruction from unoriented point clouds[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2025, 44(2): 1-18.

[15] LI Q, FENG H, SHI K, et al. SHS-Net: Learning signed hyper surfaces for oriented normal estimation of point clouds[C]//*Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2023: 13591-13600.

[16] METZER G, HANOCKA R, ZORIN D, et al. Orienting point clouds with dipole propagation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): 165.

[17] SCRIVENER D, CUI D, COLDREN E, et al. Faraday cage estimation of normals for point clouds and ribbon sketches[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2025, 44(4): 49.

基于样条表示的极小曲面近似计算

李梓煊，陈仁杰*

（中国科学技术大学数学科学学院，合肥 230022）

摘　要：极小曲面是指在每一点均具有零平均曲率的曲面，在给定边界条件下这类曲面具有局部面积最小的特性。极小曲面具有内在光滑的几何特征，在计算几何、物理与工程等领域具有重要意义。然而现有方法多基于离散网格表示，需要大量顶点才能获得足够精度，计算效率与存储开销较高。受到极小曲面固有光滑性的启发，本文提出一种直接基于样条曲面计算近似极小曲面的新框架。该方法充分利用样条表示的紧凑性，用稀疏控制点实现高效建模，为稠密的离散表示提供了有效替代方案。为进一步展示方法的兼容性，本文在不同连续性约束下评估了其性能，包括 C^0、C^1 、C^2 以及预设的 G^1 连续性。数值结果表明，施加这些连续性约束并不会使最终曲面与理论最优曲面产生显著偏差，从而能够以更高效率实现高保真曲面重建。

关键词：极小曲面，Bézier 曲面，Plateau 问题，准 Dirichlet 能量

Spline-Based Approximation of Minimal Surfaces

Li Zixuan, Chen Renjie*

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230022)

Abstract: Minimal surfaces are surfaces defined by the property of having zero mean curvature at every point, representing the local minimum area for a given boundary. These inherently smooth geometric forms are critical in fields such as computational geometry, physics, and engineering, driving the need for efficient and accurate computational methods. Motivated by the intrinsic smoothness of minimal surfaces, this paper proposes a novel framework to compute them directly using spline surfaces. This approach offers a superior alternative to dense discrete representations by exploiting the compact nature of splines to model complex shapes using sparse control points. Further demonstrating the adaptability of our approach, we investigate its performance under diverse continuity settings, including C^0, C^1, C^2 and prescribed G^1 continuity. Crucially, numerical results confirm that enforcing these constraints does not cause the final surface to deviate much from the true theoretical minimal surface, enabling high-fidelity reconstruction with superior efficiency.

Key words: Minimal surface; Bézier surface; Plateau problem; Quasi-Dirichlet energy

0 引　言

连续样条表示凭借其紧凑的参数化形式，在曲面构造问题上，有效规避了传统离散方法依赖稠密网格所造成的巨大计算开销。具体而言，其主要优势体现在三个方面：第一，在保持较高几何正则性的同时，所需自由度显著更少[1-3]；第二，作为参数化形式，样条在曲面域内天然具备内在光滑性；第三，在曲面拼接过程中，样条能够在片块边界显式施加高阶连续性约束。近年来，极小曲面的数值求解方法不断发展：细分曲面方法支持任意拓扑但奇异点处连续性降阶[2]；隐式方法可获全局最优但需后处理[4]；三角网格曲率流方法存在分面效应；单张样条曲面方法难以表征具有复杂拓扑结构的曲面[5-6]。本文采用参数样条曲面表示，兼具解析表达的精确性与高阶连续性，且与 CAD/CAM 工业标准直接兼容。

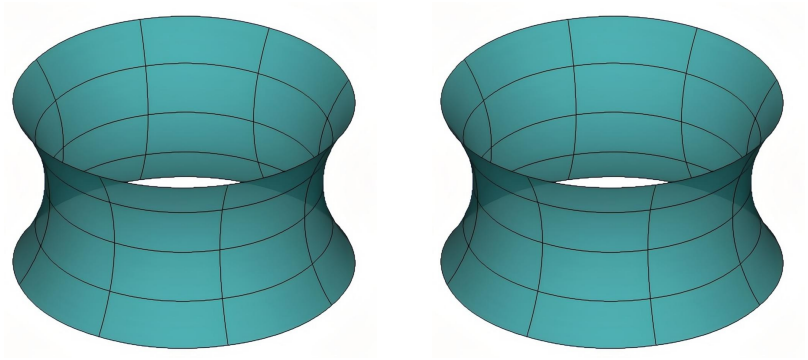
本文方法的理论基础源于 Bézier‐Plateau 问题[7]，其目标是在给定边界条件下求解面积最小的多项式曲面。尽管目标明确，但现有求解 Bézier‐Plateau 问题的方法存在一系列根本性局限：这些方法大多被限制在单个 Bézier 曲面片上，无法自然地生成具有复杂拓扑的几何结构；并且普遍采用近似能量（如 Dirichlet 泛函[7]、弯曲能量[8]或弱面积泛函[9]）替代真实的面积泛函，只能得到一个近似最优解。受文献[1]中离散曲面迭代思想的启发，本文将迭代理论推广至连续参数曲面。本文提出了一种迭代方法，用于在给定边界条件下求解面积最小的样条曲面。当本文方法采用精确的 Dirichlet 能量时，能收敛至样条表示下的最优解，并能灵活处理由多片 Bézier 样条构成的复杂模型，统一兼容不同的连续性与边界约束；为规避数值积分带来的高计算开销，本文还提出了一种全显式的准 Dirichlet 能量。本文的主要贡献可概括如下：提出了一个在连续样条域中直接生成面积最小曲面（即近似极小曲面）的统一框架，能够处理复杂拓扑和多样的边界/连续性约束；将精确 Dirichlet 能量推广至多片样条表示，并设计了一种具有显式表达式的准 Dirichlet 能量；通过广泛实验证明了该框架在处理多种复杂连续性约束（C^0、C^1、C^2以及预设的 G^1连续性）时的高效性、精确性与鲁棒性。

1 问题描述

现有求解 Bézier‐Plateau 问题的方法存在一系列根本性局限，使其难以胜任复杂几何的构造任务。首先，在适用范围上，这些方法大多被限制在单个 Bézier 曲面片上，无法自然地生成具有复杂拓扑的几何结构。其次，它们为简化计算，普遍采用近似能量（如 Dirichlet 泛函[7]、弯曲能量[8]或弱面积泛函[9]）替代真实的面积泛函，只能得到一个近似最优解。因此，开发一种能够处理多片复杂拓扑、同时确保结果为理论最优的算法，成为本领域一个悬而未决的关键问题。本文所提出计算框架的一个显著优势在于其可扩展性。当两个 Bézier 曲面片满足 C^1 连续时，它们沿共享边界具有相同的切向量；C^2 连续性场景与 C^1 类似；G^1 连续性约束无论系数如何设置，始终是线性约束。只需更改约束矩阵，便可用相同方法

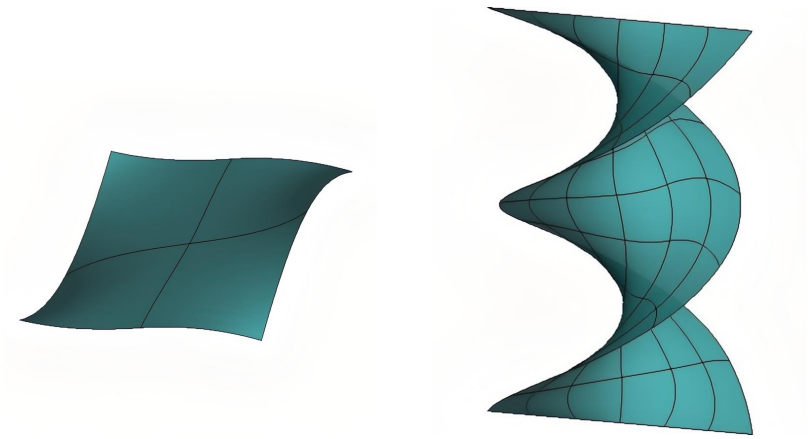
求解。

实验在一台配备 13th Gen Intel Core i5-13500HX 2.50 GHz CPU、16GB 内存的计算机上进行。所有数值积分均采用 10 阶高斯积分。为证明该计算框架的可扩展性与兼容性，本文在 C^0、C^1、C^2以及预设的 G^1连续性下进行了数值实验。图 1 给出同一边界条件下的 C^0连续曲面与 C^1连续曲面。图 2 进一步展示了 C^1连续曲面的另外两个示例。表 1 记录了在上述高阶约束下进行数值实验的结果。实验结果表明，该方法在保持几何精度的前提下展现出良好的计算性能，同时施加高阶连续性约束不会使曲面产生显著偏差。



a. 示例 4.1.1　　b. 示例 4.4.1

图 1　C^0连续曲面与 C^1连续曲面



a. 示例 4.4.2　　b. 示例 4.4.3

图 2　C^1连续曲面

表 1　不同连续性约束结果对比

连续性	Dirichlet 迭代			准 Dirichlet 迭代		
	面积	时间(s)	迭代次数	面积	时间(s)	迭代次数
C^0	16.5580	8.826	60	16.5682	7.074	60
C^1	16.5587	14.11	63	16.5718	1.496	7
C^2	16.5678	78.54	340	16.6129	25.88	125
G^1	16.5583	13.85	61	16.5755	2.533	13

注：施加高阶连续性约束不会使曲面产生显著偏差。

2 结　论

本文提出了一种在连续样条域内直接生成面积最小曲面的统一框架。该方法充分利用样条的内在优势，在保留几何表示紧凑性与光滑性的同时，能够自然地纳入高阶连续性约束。理论上，本文将经典 Dirichlet 能量推广到样条表示，并进一步引入准 Dirichlet 能量作为高效的近似形式。准 Dirichlet 能量具有显式表达式，从而规避了数值积分带来的主要计算瓶颈。对比实验验证了该框架的通用性：所提方法计算效率更高，生成曲面与理论解析解高度吻合，且施加高阶连续性约束后，曲面未出现明显几何偏差。未来工作将把相关数学推导扩展到 NURBS 以及三角 Bézier 曲面片，并研究对非常规顶点（价数不等于 4 的节点）的处理，从而在任意拓扑结构上实现包括 G^1 与 G^2 连续在内的几何连续性。

参 考 文 献:

[1] PINKALL U, POLTHIER K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates[J]. Experimental Mathematics, 1993, 2(1): 15-36.

[2] PAN Q, XU G. Construction of minimal subdivision surface with a given boundary[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(4): 374-380.

[3] RENKA R. A trust region method for constructing triangle-mesh approximations of parametric minimal surfaces[J]. Applied Numerical Mathematics, 2014, 76: 93-100.

[4] WANG S, CHERN A. Computing minimal surfaces with differential forms[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40: 1-14.

[5] 吴花精灵, 王国瑾. 推广 Dirichlet 方法用于 B 样条极小曲面设计[J]. 软件学报, 2011, 22(12): 3015-3022.

[6] 朱雨凡, 徐岗, 凌成南, 等. 插值给定对角曲线的能量极小 Bézier 曲面造型[J]. 中国图象图形学报, 2019, 24(11): 1998-2008.

[7] MONTERDE J. Bézier surfaces of minimal area: the Dirichlet approach[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2): 117-136.

[8] MIAO Y, SHOU H, FENG J, et al. Bézier surfaces of minimal internal energy[C]//Mathematics of Surfaces XI. Berlin: Springer, 2005: 318-335.

[9] HAO Y X. Quasi-area functional for the Plateau-Bézier problem[J]. Graphical Models, 2020, 112: 101095.

面向变构飞行器的动态笛卡尔网格方法及应用

黄忠伟，杨明智*

（中南大学 交通运输工程学院，长沙 410000)

摘　要：精确、高效地处理大幅度连续变形运动边界，是变构飞行器非定常气动数值模拟中的关键问题。针对复杂变形过程中网格生成困难、运动边界处理精度和鲁棒性不足以及计算成本较高等问题，本文发展了一种面向变构飞行器的动态自适应笛卡尔网格数值模拟方法。该方法基于自适应笛卡尔网格技术，利用高效网格追踪与动态细化策略实现运动边界的实时识别和局部网格自适应，采用一种基于交叉点方法的新型幽灵单元插值方法，对复杂运动边界附近的流动变量进行稳健、高精度重构，并结合高阶子单元插值方法和高精度离散格式，构建全自动动态流场求解体系。经典绕流算例验证表明，该方法具有良好的空间精度和运动边界处理能力，浸没边界处理在流场中可达到二阶至三阶精度；高阶子单元插值方法可使动态自适应计算中的网格单元数量减少超过 2/3，显著提高计算效率。在此基础上，以连续变构飞行器为应用对象，建立适用于复杂构型变化的表面运动描述与动态边界更新方法，实现变构过程中几何边界的实时更新及流场自适应重构，并对不同静态构型及动态变构过程中的非定常气动特性开展数值研究。重点分析变构方式、变构角度、攻角和来流马赫数等因素对瞬态气动力、表面压力分布及典型流动结构演化的影响，并比较动态变构过程与对应静态构型之间的气动差异。结果表明，不同变构方式下的瞬态气动力、表面载荷分布及流动结构演化表现出较大差异。本文建立的动态自适应笛卡尔网格方法兼具复杂运动边界适应性、计算精度、鲁棒性和自动化能力，可为变构飞行器及其他大幅度、高频运动装备的高精度非定常流动模拟与气动设计提供有效的数值分析手段。

关键词：笛卡尔网格，自适应，变构飞行，气动特性

0 引　言

随着高机动飞行器、智能变体飞行器及可重构飞行器的发展，通过主动改变局部或整体几何构型以适应不同飞行状态和任务需求，已成为提升飞行器宽包线气动性能与多任务适应能力的重要技术途径。与固定构型飞行器相比，变构飞行器在连续运动过程中不仅伴随几何外形、特征尺度及局部曲率等参数的动态变化，同时还会由于物面运动产生附加速度，使流场呈现明显的时间依赖性和非定常特征。已有研究表明，连续变构过程中瞬态气动力可能明显偏离相同瞬时构型下的静态结果，并形成显著的动态滞回现象；变构过程及来流条件的变化还会进一步影响表面压力、流动分离及涡结构演化[1]。因此，如何准确描述复杂连续变构边界，并高精度、高效率地捕捉其诱导的非定常流场演化，是变构飞行器气动分析与构型设计中的重要问题。

当前动态流场模拟主要采用结构/非结构动网格、重叠网格和自适应笛卡尔网格等技术。结构与非结构动网格能够较好地贴合物体边界，但面对大幅度和连续几何变形时容易发生网格畸变，并需要频繁进行网格更新甚至重新划分，增加计算和网格维护成本[2]。重叠网格通过多个相互重叠的网格区域实现复杂构件之间的相对运动，能够有效避免整体网格畸变，但网格之间需要持续进行洞切、供体单元搜索和插值信息传递，会增加额外的计算开销并可能引入插值误差[3]。相比之下，笛卡尔网格具有自动生成程度高、网格

质量稳定、数据结构规则及复杂几何适应性强等特点，并可与自适应网格加密技术结合，根据运动边界及局部流场特征动态进行单元细化和粗化，在控制总体网格规模的同时提高关键区域的空间分辨率，因此具有较好的复杂动态流场模拟潜力[4]。

然而，自适应笛卡尔网格应用于复杂变构飞行器仍面临运动边界实时追踪、非贴体边界高精度处理以及计算效率等关键问题。连续变构会导致边界位置及附近单元流固属性不断发生变化，需要频繁完成几何识别、局部网格更新及新生流体单元信息重构；同时，由于笛卡尔网格不与物面贴合，复杂边界条件通常需要借助浸没边界方法实现。其中，幽灵单元方法通过在固体区域构造幽灵节点实现边界条件，具有较好的复杂几何适应能力，但在复杂三维运动边界条件下，边界交点定位、插值模板构造及动态网格层级变化仍会直接影响边界处理精度和数值鲁棒性[5]。此外，若单纯依赖提高局部网格分辨率来改善运动边界处理精度，将导致三维动态计算中的网格规模和计算成本快速增长。因此，如何兼顾复杂运动边界处理的精度、鲁棒性和计算效率，仍是动态自适应笛卡尔网格方法面向变构飞行器应用需要解决的核心问题。

针对上述问题，本文发展了一种面向变构飞行器的动态自适应笛卡尔网格数值模拟方法。基于高效网格追踪算法和动态细化策略，实现复杂运动边界的实时识别以及局部笛卡尔网格的动态自适应；采用一种基于交叉点方法的新型幽灵单元插值方法[6]，利用物面与笛卡尔网格之间的局部交叉关系对边界附近流动变量进行稳健、高精度重构，并结合高阶子单元插值方法与高精度离散格式，在保证复杂边界处理精度的同时降低对高密度局部网格的依赖，构建适用于大幅度连续运动边界的全自动动态流场求解体系。通过经典绕流及典型运动边界算例，对所建立方法的空间精度、非定常运动边界处理能力及计算效率进行验证，为进一步开展复杂三维变构飞行器非定常气动模拟奠定数值基础。

在此基础上，将所发展的动态自适应笛卡尔网格方法应用于三维连续变构飞行器流动模拟，建立适用于不同区域运动形式及连续表面变形的几何运动描述与动态边界更新方法，实现飞行器变构过程中几何边界的连续更新和流场网格的实时自适应重构。考虑到变构飞行器气动特性不仅取决于瞬时几何构型，还受到变构形式及外部来流条件的共同作用，本文进一步围绕变构方式、变构角度、攻角和来流马赫数等因素开展系统研究，比较不同变构方式及不同构型状态下的气动力特性、表面压力分布和典型流动结构差异，分析攻角和马赫数变化对流动分离、涡结构及局部载荷演化的影响。同时，通过连续动态变构结果与对应静态构型结果的对比，研究变构过程中的非定常气动力偏移和动态滞回特征，分析复杂运动边界及其诱导附加速度与非定常流动结构之间的耦合作用。研究旨在拓展动态自适应笛卡尔网格方法对复杂三维连续变形边界的适用范围，并为变构飞行器的高精度气动预测、非定常流动机理分析及构型设计提供高效、自动化的数值分析手段。

1 问题描述

变构飞行器通过主动改变机翼或局部表面的几何构型，可在不同速度、攻角及任务状态下获得更优的气动性能，具有提升宽包线飞行能力和多任务适应性的潜力。然而，变构飞行器通常涉及多种构型及连续运动过程，其气动性能评估对数值模拟方法的自动化程度、运动边界处理精度和计算效率提出了更高要求。传统贴体网格针对不同构型通常需要重新进行几何处理和网格生成，前处理工作量较大，难以满足多构型、多参数条件下的大规模快速计算需求。

在动态变构过程中，飞行器边界位置和几何形态随时间持续变化，并伴随明显的非定常流动响应。传统动网格在处理大幅度连续变形时容易产生网格畸变，甚至需要频繁进行网格重构；重叠网格虽然能够避免严重的网格变形问题，但不同网格区域之间的搜索和插值会增加额外计算开销，并可能引入数值误差。因此，如何在无需频繁重构贴体网格的条件下，实现复杂变构边界的实时追踪、高精度边界处理以及流场局部动态自适应，是开展变构飞行器非定常气动模拟需要解决的关键数值问题。

除数值模拟方法外，连续变构本身还会显著改变飞行器的气动特性与流动结构。不同变构方式和变构角度会引起几何外形、局部曲率及表面运动速度分布的变化，从而影响升阻力、表面压力和涡结构演化；在动态变构过程中，运动边界产生的附加速度还会与来流相互耦合，使瞬态气动力偏离对应静态构型，并可能形成明显的动态滞回现象。同时，攻角和来流马赫数的变化会进一步影响流动分离、涡结构及局部压力特征，使变构效应表现出较强的工况依赖性。因此，有必要系统研究不同变构方式、变构角度、攻角和马赫数条件下的气动响应，并通过动态变构与对应静态构型的对比，揭示连续变构过程中的非定常气动特性及其流动机理。

2 结　论

针对复杂变构飞行器大幅度连续运动边界的数值模拟问题，本文建立了基于单元自适应加密的动态笛卡尔网格流场求解方法。该方法结合高效网格追踪、自适应加密、基于交叉点的幽灵单元插值以及高阶子单元插值，实现了复杂运动边界的实时识别、局部网格动态更新和边界附近流动变量的高精度重构，形成了从三角面元几何输入到动态流场求解的全自动化计算流程。典型算例验证表明，该方法具有良好的计算精度、数值稳定性和复杂运动边界适应能力，同时能够有效控制动态自适应过程中的网格规模，提高非定常流动模拟效率。

在此基础上，将所建立的动态笛卡尔网格方法应用于三维连续变构飞行器非定常气动模拟，实现不同变构方式下复杂几何边界的连续运动与流场实时自适应重构，并系统分析变构方式、变构角度、攻角及来流马赫数对气动力、表面压力和典型流动结构的影响。结果表明，连续变构过程会产生明显的非定常气动响应与动态滞回现象，不同变构方式下的瞬态气动力、表面载荷分布及流动结构演化存在显著差异，且其气动响应受到变构状态与来流条件的共同影响。整个计算过程无需人工进行动态网格重构与质量调整，表

明所建立方法具有良好的复杂运动边界适应能力和自动化计算优势，可为变构飞行器多构型、多工况及连续动态过程的高精度气动分析提供有效的数值工具。

参 考 文 献:

[1] Xu D, Song Y, Chen F, Yu J. Unsteady aerodynamic characteristics of a flying wing aircraft with variable-sweep morphing. Physics of Fluids, 2025, 37: 076141.

[2] Stein K, Tezduyar T, Benney R. Mesh moving techniques for fluid‐structure interactions with large displacements. Journal of Applied Mechanics, 2003, 70(1):58-63.

[3] Steger J L, Dougherty F C, Benek J A. A Chimera grid scheme. In: Advances in Grid Generation. ASME, 1983: 59-69.

[4] Aftosmis M J, Berger M J, Melton J E. Robust and efficient Cartesian mesh generation for component-based geometry. AIAA Journal, 1998, 36(6): 952-960.

[5] Tseng Y H, Ferziger J H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. Journal of Computational Physics, 2003, 192(2): 593-623.

[6] Fan N, Gao H, Yuan X X, Duan W Y, Tang Z G, et al. An efficient sharp-interface immersed boundary method for complex moving boundary flows based on adaptive Cartesian grids. Physics of Fluids, 2026. DOI: 10.1063/5.0343899.

复杂外形的多策略六面体占优网格自动生成方法

陈启志，邱靖颖，刘　杨*，唐名，朱心海，庞宇飞

中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，四川绵阳 621000

摘　要：针对有限元仿真中复杂几何模型的体网格离散化需求，本文提出了一套面向不同应用场景的多策略六面体占优网格自动生成方法。该方法包含四种互补的核心算法：基于标架场引导的六面体占优网格生成（HexLight）、基于标架场全局参数化表面重建的六面体占优网格生成（PGP）、基于推进边界层与内部六面体核的生成方法（FHC），以及结合推进边界层与标架场填充的生成方法（FBC）。四种算法共享统一的表面四边形占优网格生成前端，可根据几何模型的输入特征、网格质量要求与应用场景灵活选择。通过多约束尺寸场控制网格过渡、标架场引导网格推进方向，以及二分图标记的拓扑优化策略，各算法均能高效生成满足工程需求的六面体占优混合网格。实验表明，所提方法在多种复杂几何模型上生成的鲁棒性、几何保形度及网格质量指标良好，具有良好的工程实用性。

关键词：六面体占优网格，标架场，前沿推进法，有限元

0　引言

六面体网格因其规则拓扑结构和高数值精度，在结构分析、计算流体力学和等几何分析等领域具有广泛应用。然而，对于包含多尺度特征和复杂分区的几何模型，全自动生成纯六面体网格仍面临巨大的鲁棒性挑战。四面体网格自动化程度高、几何适应性强，但在大梯度物理场计算中需要极高密度才能保证精度。

六面体占优混合网格（六面体+三棱柱+金字塔+四面体）在保证一定六面体占比的同时，兼具几何适应性，是工程仿真中的一种实用折中方案。现有方法主要包括三大类：推进边界层法、域分解法和标架场引导法。推进边界层法从模型边界逐层推进生成内部六面体层，具有良好的边界对齐性；标架场引导法通过优化标架场确定网格走向，结合二分图标记策略实现全局拓扑优化；参数化方法通过周期全局参数化构造整数格点，建立的背景网格信息丰富。

本文针对工程应用中的复杂几何模型，提出了一套涵盖多种策略的六面体占优网格自动生成方法，通过统一的前端表面网格生成与后端体网格生成框架，实现了对不同输入条件和应用场景的灵活适配。

1　问题陈述

本方法总体流程如下：表面四边形占优网格生成：以几何模型的背景三角形网格为输入，通过多约束尺寸场（曲率自适应、全局尺寸限制、指定区域约束和光滑过渡）和标架场引

导，生成四边形占优的表面网格，作为所有体算法的共用输入。体网格生成：根据应用需求选择四种核心算法之一，生成六面体占优的混合体网格。网格后处理：包括退化单元清洗、质量检查和有限元格式输出。

1.1 表面四边形占优网格生成

所有体网格算法共享一个统一的表面网格前端。该方法以多约束全局尺寸场为基础，结合曲率自适应、全局尺寸限制和光滑过渡约束，通过优先级队列光滑和 Laplace 线性系统求解得到各向同性尺寸场。随后，基于尺寸场驱动的分区清理策略识别并移除冗余特征点，合并碎分区，优化特征线点数分布。最后，利用标架场引导网格推进方向、尺寸场控制单元尺寸，结合二分图标记策略，将全局网格生成问题转化为局部拓扑优化问题，高效生成具有合理尺寸过渡的四边形占优表面网格。实验表明，在复杂几何上生成的四边形占比超过 90%，质量指标优于主流商用软件。

1.2 六面体占优体网格生成

本方法提供四种互补的体网格生成算法，以适应不同应用场景。

1) HexLight：标架场引导的六面体占优体网格

该算法以四边形表面网格为输入，首先在模型体内部生成背景四面体网格，并在其上求解光滑标架场以确定六面体网格的走向。随后，通过引导前沿推进生成内部节点，利用二分图标记策略识别可作为六面体候选的边，再经由拓扑合并从四面体网格中提取六面体单元。该算法支持尺寸场控制，可适应多尺度几何特征，通过标架场与尺寸场的协同作用，在保持良好边界对齐性的同时生成尺寸过渡平滑的六面体占优体网格。

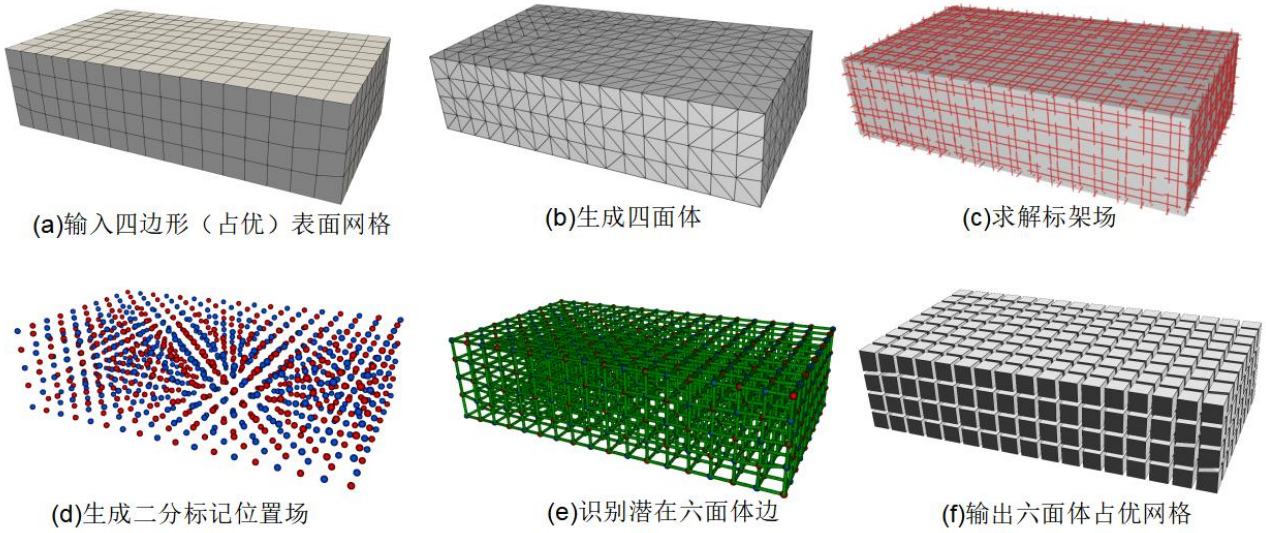


图 1 Hexlight 方法的整体工作流程。(a)输入四边形（占优）表面网格；(b)生成四面体；(c)求解标架场；(d)生成二分标记位置场；(e)识别潜在六面体边；(f)输出六面体占优网格。

2) PGP：基于标架场全局参数化的六面体占优体网格

该算法核心创新在于利用周期全局参数化（Periodic Global Parameterization）对三角化表面进行整数格点重建，构造高质量背景四面体网格。PGP 参数化将表面映射到带有整数偏移的周期性参数空间，通过求解具有整数约束的全局最优化问题，使得参数化结果自然地与模型几何特征对齐。在此基础上建立的四面体背景网格继承了参数化的拓扑信息，使得后续的六面体提取过程更加鲁棒。PGP 算法同样支持尺寸场控制，在分块表面和复杂装配体上表现出良好的适应性。

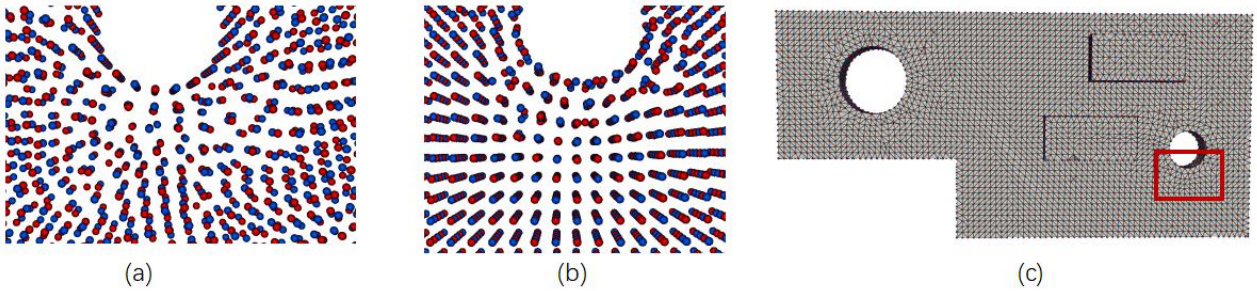


图 2 PGP 方法采用的标架场参数化的方式生成全局对齐的位置场。(a)输入标架场；(b)参数化提取位置场；(c)基于位置场重建表面；

3) FHC：内部六面体核与推进边界层

该算法采用两阶段策略：首先生成内部六面体核，然后从表面向内部推进生成边界层六面体。内部六面体核通过符号距离场（SDF）技术确定核的边界位置，结合八叉树方法生成规整的六面体核心网格。边界层部分从四边形表面沿法向推进生成多层六面体（支持 1~3 层），三角形表面则生成三棱柱。内部核与边界层通过空间哈希合并，经过退化单元清洗后输出。该算法的优势在于六面体占比高，且边界层保证了表面附近的高质量正交网格，特别适合 CFD 边界层解析的需求。

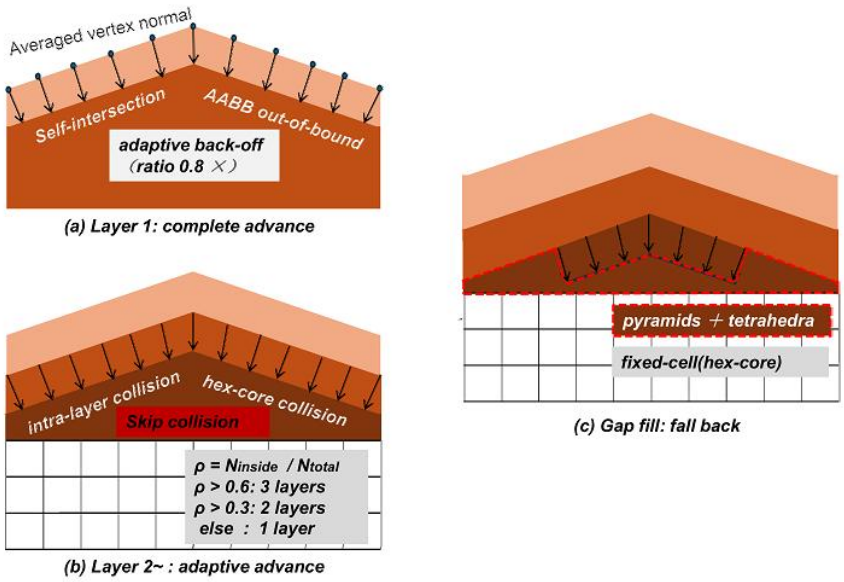


图 3　前沿推进原理示意图。

4)　FBC：推进边界层与标架场填充

该算法结合了推进边界层技术与标架场引导填充的优点。首先从四边形占优表面向内部推进生成多层边界层六面体，在模型内部形成一个封闭的空腔表面。随后，利用 HexLight 标架场引导方法对空腔进行六面体占优填充。两阶段网格通过空间哈希合并，经退化单元清洗后输出。该算法边界层厚度可控（通过边界层层数参数），内部填充继承标架场的拓扑优化能力，在保持高质量边界层的同时获得良好的内部六面体占比。用户可根据分析需求灵活调节边界层厚度。

1.3 六面体占优体网格实验结果

选取多个包含复杂几何特征的机械零件和装配体模型进行测试，测试模型均通过本课题组自主开发的 NNW-GridStar 软件生成带分区的背景三角形网格作为输入。

边界层方法（FHC、FBC）因其表面附近推进生成六面体层的机制，贴近表面的层全部为六面体和三棱柱，且保形度高，适合有限元计算中的众多场景，但在薄壁件中，效果受限。纯标架场方法（HexLight、PGP）内部区域主要依靠拓扑合并从四面体中提取六面体，受输入表面网格空间对齐性的制约，当薄板等模型的上下表面节点未对齐时，会导致内部位置场正交性下降、六面体比例降低。

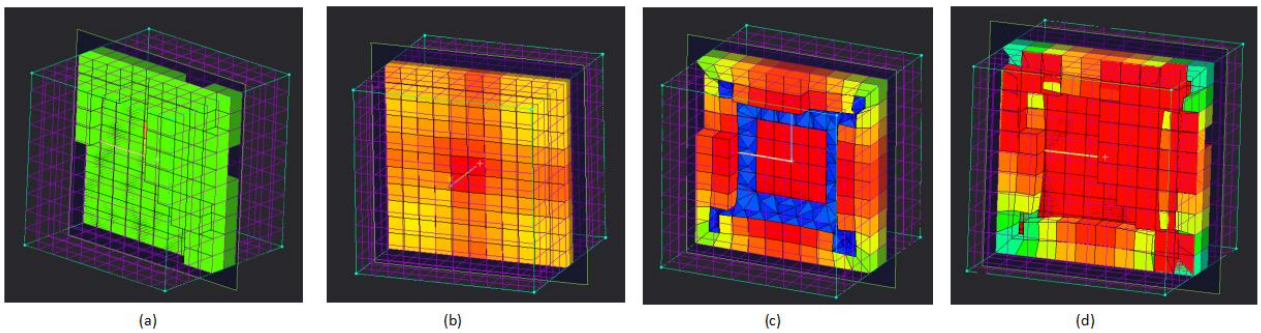


图 4　本文的方法在立方块模型下的结果。(a) HexLight；(b) PGP；(c) FHC；　(d) FBC。

2　结论

本文提出了一套多策略的六面体占优网格自动生成方法，涵盖标架场引导、周期全局参数化、推进边界层与内部六面体核等四种互补的体网格生成算法。方法共享统一的表面四边形占优网格生成前端，可根据几何模型特点和工程需求灵活选择最适配的体生成策略。四种算法的互补性使得本方法能够适应从纯三角形输入到高品质四边形表面、从一般力学分析到 CFD 边界层解析的各种应用场景。实验表明，各算法在复杂几何模型上均能自动生成满足工程需求的六面体占优混合网格。

未来的工作将在三个方面展开：一是研究适应各向异性尺寸变化的标架场求解方法，提升内部单元质量；二是将方法推广到各向异性六面体占优体网格生成；三是探索多种策略的混合调度机制，根据几何特征自动选择最合适的生成策略。

参考文献

[1] Gao, X., Jakob, W., Tarini, M., Panozzo, D. Robust hex-dominant mesh generation using field-guided polyhedral agglomeration. ACM Transactions on Graphics, 2017, 36(4): 1-13.

[2] Qiu, J., et al. MSQ-meshing: A multi-constraint size-adaptive quad-dominant mesh generation method for complex surfaces. Computers & Structures, 2026, 327: 108257.

[3] Sokolov, D., Ray, N., Untereiner, L., Lévy, B. Hexahedral-dominant meshing. ACM Transactions on Graphics, 2017, 36(4): 1.

[4] Schneiders, R. A grid-based algorithm for the generation of the hexahedral element meshes. Engineering with Computers, 1996, 12(3-4): 168-177.

[5] Carrier Baudouin, T., et al. A frontal approach to hex-dominant mesh generation. Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences, 2014, 1(1): 8.

基于 NNW-GridStar 的非结构网格智能生成方法

韩　芳，汤汶宗，王莎杰，刘　杨*，庞宇飞

（中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，绵阳 621000）

摘　要：网格生成是 CFD 数值仿真中工作量最大、依赖人工经验最强的前处理环节。针对传统非结构网格生成流程交互繁琐、周期长的问题，本文介绍了基于自主网格生成软件 NNW-GridStar 构建的非结构网格智能自动化生成方法。该方法采用“基于大语言模型的智能体带专用小模型”的协同架构，智能体基于大语言模型负责理解需求、分解任务，并通过标准化工具接口调用 NNW-GridStar 软件完成全流程，NNW-GridStar 在执行过程中调用嵌入其内的飞行器部件智能识别小模型，由部件语义标签驱动各向同/异性区域网格尺寸的自动设置，再由成熟算法完成网格生成。以 F6 翼身结合体标模为对象完成了流程验证，自动生成表面网格 239866 个三角形、体网格 11461337 个单元，人工介入环节由 7 个减少至 1 个。结果表明该方法可支撑复杂构型非结构网格的自动化生成，显著减少人工介入环节。

关键词：非结构网格，自动化生成，飞行器部件智能识别，大语言模型，NNW-GridStar

0 引　言

网格生成是 CFD 数值仿真的首要环节，对于飞行器等复杂构型，非结构网格因其几何适应能力强已成为主流选择，但当前生成流程仍高度依赖人工交互，周期冗长。近年来，以 PointNet/PointNet++[1-2] 为代表的点云分割方法和基于 Transformer[3]的大语言模型（LLM）为网格生成的智能化提供了新机遇，但现有研究多集中于单一环节，面向工程全流程的自动化方案仍较为缺乏。

NNW-GridStar 是一款面向流动数值模拟的自主网格生成软件[4]，本文以其为基础，介绍非结构网格智能自动化生成方法的总体架构、关键技术及 F6 标模验证效果。

1 NNW-GridStar 非结构网格自动化生成方法

NNW-GridStar 非结构网格自动化生成方法采用“基于大语言模型的智能体（Agent）带专用小模型”的协同架构。智能体居于调度层，以大语言模型（LLM）作为推理引擎，并结合网格生成领域知识技能（Skill）提供流程编排与参数决策支撑，负责自然语言理解、任务分解与工具调用；NNW-GridStar 的功能接口被封装为标准化工具（如 MCP 工具）供智能体调度，其居于执行层，内嵌飞行器部件智能识别等专用小模型并集成成熟的网格生成算法。核心目标是实现从 CAD 模型导入到特征识别、物理场判定、自动选择网格策略、高质量网格生成全流程自动化。系统由工程层、算法层与应用层三个层次构成，本文工作集中于面向 CFD 应用的非结构网格全自动化生成。

非结构网格全自动生成的难点主要有三：构型复杂、几何特征多样；边界层网格正交性与过渡光滑

性要求高；尺寸分布须与物理问题相匹配。针对上述难点，本文以智能体调度 NNW-GridStar 的方式实现全自动化生成。智能体在领域知识技能（Skill）支撑下解析用户的自然语言指令，将需求分解为几何导入、部件识别、尺寸设置、网格生成等子任务，并通过标准化工具接口（MCP 工具）依次调用 NNW-GridStar 执行，工程师通过“聊天”即可驱动整个生成流程，将原本依赖人工逐环节交互的过程转化为可自动调度的闭环。飞行器的非结构网格全自动生成流程示意图如图 1 所示。

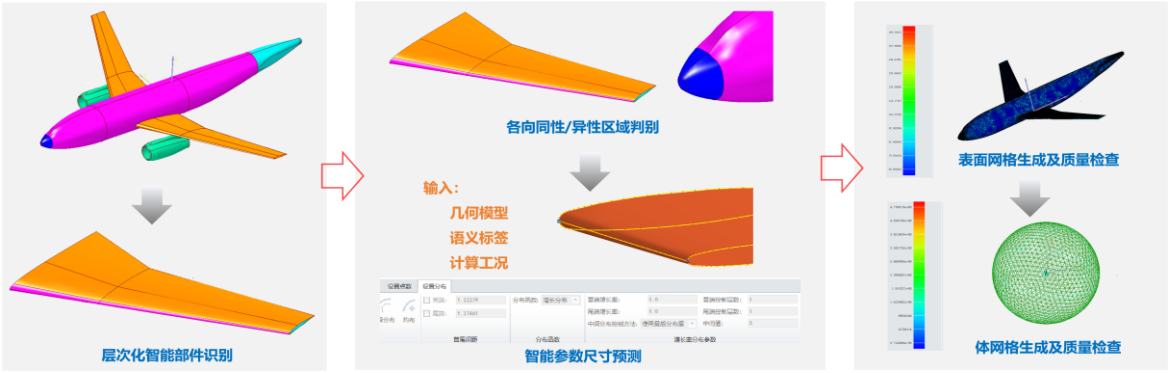
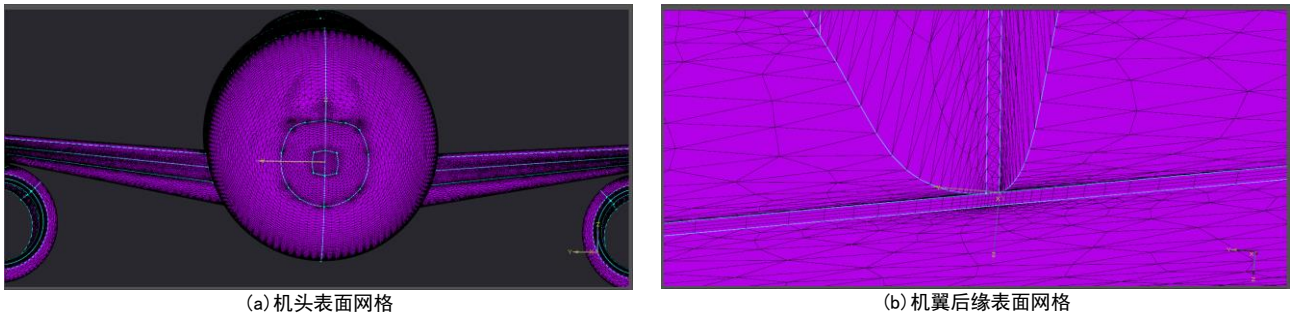


图 1 非结构网格全自动生成流程示意图

以 F6 翼身结合体标模为典型对象对上述流程进行了验证。导入 CAD 模型后基于初始网格提取点云，调用部件识别小模型完成机身、机翼等部件语义分割，得到各 B-rep 面的部件语义标签与边界线。尺寸设置模块依据部件标签与计算工况自动生成各向同/异性区域及边界线的网格尺寸配置。随后调用非结构网格生成算法完成全自动生成，最终得到表面网格 239866 个三角形、体网格 11461337 个单元的 F6 标模网格，人工介入环节由 7 个减少至 1 个。部件分区与尺寸设置均由模型自动完成，替代了交互式生成模式中的人工分区与参数试凑环节。图 2 显示了使用非结构网格自动化生成方法得到的 F6 标模网格，可以看出该方法对不同部件设置了不同的网格尺寸及各向同/异性属性。



(a) 机头表面网格　　(b) 机翼后缘表面网格

图 2 F6 标模不同部件处的表面非结构网格

2 结 论

本文介绍了基于 NNW-GridStar 的非结构网格智能自动化生成方法。该方法以“智能体带专用小模型”协同架构为框架，由基于大语言模型的智能体调度 NNW-GridStar 软件实现非结构网格全自动化生成，其中 NNW-GridStar 功能接口被封装为标准化工具（如 MCP 工具），智能体在领域知识技能（Skill）支撑

下完成流程编排与工具调用，内部嵌入飞行器的部件智能识别小模型以部件语义标签驱动网格尺寸自动设置，再由成熟算法执行网格生成。F6 翼身结合体标模的验证（表面网格 239 866 个三角形、体网格 11461337 个单元，人工介入环节由 7 个减至 1 个）表明，“智能体调度—小模型识别—算法执行”这一技术路线可行，为复杂构型非结构网格的自动化生成提供了有效支撑。后续将扩展部件识别构型范围，深化智能体端到端调度能力，最终实现 CAD to Mesh 全流程自动化。

参 考 文 献:

[1] Qi C R, Su H, Mo K, et al. PointNet: Deep Learning on Point Sets for 3D Classification and Segmentation[C]. 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Honolulu, HI, USA, 2017,77-85.

[2] Qi C R, Su H, Mo K, et al. PointNet++: Deep Hierarchical Feature Learning on Point Sets in a Metric Space[C]. In Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'17). Curran Associates Inc., Red Hook, NY, USA, 5105-5114.

[3] Vaswani A, Shazeer N, Parmar N, et al. Attention is all you need[C]. In Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'17). Curran Associates Inc., Red Hook, NY, USA, 6000-6010.

[4] 庞宇飞, 卢风顺, 刘杨, 等. 网格之星: 国家数值风洞的通用型结构网格生成软件[J]. 空气动力学学报, 2020, 38(4): 677-696.

适用于翼型风帆模拟的动态笛卡尔网格方法

范　宁，段文洋*

（哈尔滨工程大学 船舶工程学院，哈尔滨 150000)

摘　要：在全球航运业深度低碳转型的背景下，翼型风帆作为成熟的海洋风能利用技术，其外形方案迭代与操纵策略优化对数值模拟效率提出了更高要求。传统贴体网格模拟面临人工前处理工作量大、动态工况网格重构成本高的瓶颈，结构与非结构动网格在大幅度边界运动中易出现网格畸变与精度下降，重叠网格的插值信息交互也会引入额外数值耗散，难以适配风帆多工况批量计算与突变风动态过程的高效高保真模拟。针对这一问题，本文开发了基于自适应技术的动态笛卡尔网格流场求解器，基于高效网格追踪算法实现运动边界的实时适配，结合稳健的浸入边界处理方法与高精度离散格式，构建了全自动化的数值模拟体系。本团队将该方法应用于 Oceanbird 翼型风帆的数值模拟，实现了突变风工况下帆体转向过程的非定常流场模拟，为风帆助推系统的气动设计与操纵策略优化提供了高效可靠的技术支撑，对推动海上可再生能源的广泛应用具有重要意义。

关键词：笛卡尔网格，自适应，突变风，翼型风帆

0 引　言

当前主流的动态流场模拟网格技术主要包括结构/非结构动网格、重叠网格与自适应笛卡尔网格三类。结构与非结构动网格在面对大幅度、高频次边界运动时，需反复进行网格重构与拓扑更新，不仅带来显著的内存开销，网格变形引发的插值误差累积还会持续降低计算效率与求解精度。重叠网格通过多区域嵌套的技术路线避免了网格变形问题，但子域间的插值传递会引入固有精度损失，“孤立点”处理等技术难题也会带来额外数值误差，对非定常模拟的保真度造成影响。与传统方案相比，笛卡尔网格具备全自动化生成、复杂几何适配性强、网格质量均匀稳定、计算鲁棒性好的天然优势，且可与自适应网格加密(AMR)技术深度融合，以单元级的细化与粗化精准贴合流场高梯度区域，在控制整体网格规模的同时保障求解精度，是动态流场模拟的重要技术发展方向[1]。

尽管自适应笛卡尔网格优势显著，但面向风帆这类复杂运动边界的非定常模拟仍面临诸多挑战：一是动态网格追踪中，高频次的自适应操作易引发流场特征捕捉滞后，网格频繁细化与粗化的过程可能导致计算失真；二是高雷诺数湍流工况下，各向同性的笛卡尔网格难以像贴体网格一样高效开展壁面法向单向细化，易引发近壁网格规模爆炸，即“网格灾难”问题，严重限制了工程应用范围[2]。针对上述问题，本文开展了动态自适应笛卡尔网格方法的系统研究，并将其落地应用于三维翼型风帆的定常与非定常模拟，为风帆气动设计提供全自动化的高效数值工具。

1 问题描述

目前，全球航运行业正处在低碳转型的关键窗口期，国际海事组织 IMO 于 2023 年正式更新船舶温室气体减排总体战略，确立了 2050 年前后实现国际航运温室气体净零排放的远期发展目标[3]。在众多脱碳技

术路径当中，零碳替代燃料虽然被视作长期减排的重要方向，但现阶段依然面临产业链建设滞后、全生命周期成本偏高、燃烧污染物治理难度较大等现实约束，短期内尚难以大规模覆盖航运减排需求。在此背景下，风帆辅助推进技术直接挖掘海洋风能资源，兼顾减排收益与船舶运营经济性，已经成为绿色船舶领域重点发展的技术方向，工程示范与实船应用案例不断增多，如图 1 所示。



图 1 海上翼型风帆布置示意

随着刚性翼帆工程化落地进程持续推进，翼型方案选型优化、全表观风向角下气动性能评估、动态操纵策略迭代优化的现实需求愈发突出。但当前翼帆气动数值仿真工作依然高度依赖人工参与的贴体网格前处理流程，多数研究仅针对有限攻角的定常工况开展分析，方案迭代周期长，完整工况的覆盖能力不足。作为衔接几何模型与流场求解的核心环节，美国 Sandia 国家实验室的相关统计数据表明，网格预处理环节所消耗的人工工时，可占到整套数值模拟工作总人力成本的 70%以上[4]。由此可见，搭建一套具备全自动化能力的动态网格生成-流场求解一体化框架，支撑风帆多构型、多工况的快速评估与方案优化，是该研究领域亟待攻克的关键技术难题。

翼型风帆的数值模拟工作面临两大现实困境，制约着仿真工具的研发效率与工程转化能力。第一类为静态仿真的效率短板：开展翼帆选型、展弦比参数寻优、多帆布局方案对比均需要完成大批量算例迭代；传统贴体网格针对每一套几何构型，均要单独完成几何修复、拓扑分块与网格质量调优，人工干预工作量巨大，难以适配快速迭代的研发模式。同时风帆实际运行覆盖极宽的攻角与表观风向区间，流场会从小攻角附着流动逐步过渡到大攻角强分离流动，流动拓扑变化剧烈，贴体网格很难在全部工况同时兼顾求解精度与计算开销。第二类困境体现在动态过程仿真方面：海洋环境中风具备显著的随机突变特征，遭遇变风条件时帆体需要连续改变攻角，以此维持最优助推推力；该过程伴随动态失速、非定常尾迹演化等复杂物理现象。传统动网格技术在处理大幅度、高频次帆体转动时，容易出现网格畸变，需要频繁触发网格重构，计算开销大；重叠网格方法虽规避网格变形问题，但嵌套子域之间的信息传递会带来插值耗散与额外数值误差，难以高精度复现转帆过程中气动力迟滞效应与非定常流场演化，不利于开展精细化的风帆操纵策略研究。

2 结　论

针对上述问题，本文开发了基于单元自适应加密的动态笛卡尔网格流场求解器。在网格生成层面，基于团队 Hicart 网格生成模块实现了从三角面元几何模型到计算网格的全自动化流程，无需人工划分拓扑与调整网格质量，经大量复杂几何算例验证，网格质量与后续计算精度均满足工程应用要求。在动态网格追踪层面，采用高效的边界单元追踪算法，配合基于流场梯度的自适应加密准则，实现运动边界与流场特征的同步实时捕捉，有效抑制了网格动态调整过程中的数值振荡与计算失真。在边界处理层面，发展了动态壁面函数模型，在保障壁面边界处理精度的同时，缓解了高雷诺数工况下的近壁网格规模压力，提升了求解鲁棒性，保障了分离流等复杂流动的高保真求解。

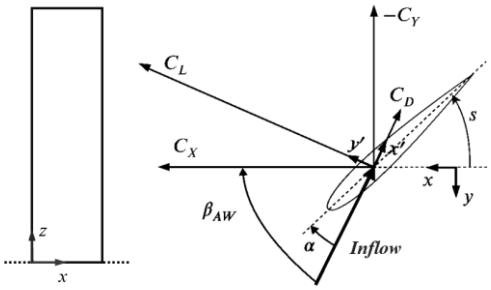


图 2 Oceanbird 运输船[5]风帆计算模型及气动力分布示意

基于 Oceanbird 风帆[5]全攻角气动力结果，我们获得了模型各风向对应的最优攻角与最大推力系数。利用动态笛卡尔网格对突变风下帆体转向开展非定常仿真，分别考察小攻角附着流、大攻角分离流转帆工况。结果表明，转帆过程流动分离与再附着存在明显迟滞，气动力的幅值、相位受转帆速率影响显著，动态流场与定常结果存在本质差异，所得结论为提升风帆助推系统的整体节能效益提供重要参考。整个仿真流程无需人工网格更新操作，凸显了该方法处理运动非定常边界的计算效率优势。

参 考 文 献:

[1] Fan, N., Li, J., Gao, H., Duan, W., Yuan, X., & Bi, L. (2025). A high-fidelity simulation method for moving bodies in flow fields based on dynamic Cartesian grids. Physics of Fluids, 37(9).

[2] 罗灿炎.浸入式笛卡尔网格数值方法及高速列车气动性能应用研究[D].中南大学,2024.DOI:10.27661/d.cnki.gzhnu.2024.000636.

[3] IMO. Initial IMO strategy on reduction of GHG emissions from ships. Available online: https://www.imo.org/en/OurWork/Environment/Pages/Vision-and-level-of-ambition-of-the-Initial-IMO-Strategy.aspx. (Accessed 5 October 2023).

[4] FREMAUX MC, Hall R M. COMSAC: computational methods for stability and control[R]. NASA/CP-2004-213028/PT1, Virginia, 2003.

[5] Malmek K, Larsson L, Werner S, et al. Rapid aerodynamic method for predicting the performance of interacting wing sails[J]. Ocean Engineering, 2024, 293: 116596.

RESEARCH

Hybrid Subdivision Volume Representation for Shape Optimization

Yuxin Chen[1,2] and Juan Cao[1,2*]

*Correspondence:
juancao@xmu.edu.cn
[1]School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, China
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

Shape optimization improves structural performance by modifying structural geometry while preserving topology and is widely used in engineering design. Existing parameterizations often face challenges in simultaneously preserving geometric features, maintaining smooth boundaries, and avoiding excessively large design spaces. This paper presents a feature-preserving subdivision-based framework for structural shape optimization and applies it to compliance minimization. A hybrid subdivision volume representation is introduced to establish a hierarchical representation linking the design variables and the physical analysis mesh. It couples 1-to-8 tetrahedral refinement in the volumetric interior with topologically compatible surface subdivision rules, with extended Loop subdivision adopted as a representative feature-preserving scheme. Leveraging the hierarchical relation across subdivision levels, the control-to-physical mesh mapping is formulated as a composed sparse matrix, whose transpose transfers compliance and volume sensitivities back to the control mesh. On this basis, a volume-constrained global-to-refined control-point activation strategy is developed. Numerical examples in 2D and 3D demonstrate compliance reduction and feature preservation with fewer design variables and lower computational cost than direct physical-mesh optimization at the same analysis resolution.

Keywords: Shape Optimization; Compliance Minimization; Hybrid subdivision volume representation; Sensitivity transfer; Volume constraint

Introduction

Structural optimization is fundamentally categorized into sizing, shape, and topology optimization, each playing a distinct role in the design of high-performance structures [1]. Topology optimization allows for changes in material connectivity to explore the global design space, whereas shape optimization focuses on enhancing structural performance through continuous boundary variations of a fixed topology [2]. In general, shape optimization seeks to determine an optimal boundary geometry subject to prescribed design constraints and performance objectives.

The finite element method (FEM) serves as the primary computational workhorse for structural performance evaluation. Traditionally, node-based shape optimization directly modifies the finite element mesh; however, this approach offers limited flexibility during large-scale boundary evolution, as large boundary updates may require mesh regeneration and introduce numerical instability [3, 4]. The boundary element method (BEM) alleviates the computational burden associated with large-scale FEM discretization by reformulating the governing equations as boundary integral equations, thereby reducing the dimensionality and scale of the numerical

analysis through boundary-only discretization [5]. However, conventional BEM still relies on a geometric representation that is distinct from the CAD model, thereby leaving a representation gap between design and analysis [6].

To mitigate the reliance on direct nodal updates, parameterized shape optimization approaches use geometric parameters, such as spline control points, as design variables [7], generating optimized shapes with smooth boundaries. Nevertheless, when the geometric design model and the finite element analysis (FEA) model are represented separately, CAD models define precise geometric boundaries, whereas FEA meshes provide discrete approximations of these boundaries for mechanical analysis. This separation requires information exchange between the geometric and analysis models during optimization, resulting in cumbersome model coupling and persistent data translation bottlenecks [7, 8].

Researchers have explored various strategies to alleviate these integration bottlenecks. One strategy is to reconstruct CAD geometries from topology optimization results and subsequently perform CAD-based shape optimization, where topologically optimized structures are represented using smooth parametric B-spline curves and surfaces [9]. Alternatively, isogeometric analysis (IGA) attempts to unify CAD and CAE representations using a shared spline-based basis [10]. However, shape optimization of CAD geometries composed of multiple non-matching NURBS patches remains challenging, as maintaining geometric compatibility and coordinating design variables across patch interfaces can complicate shape updates [11].

In this context, subdivision surfaces offer a powerful alternative, providing flexible multiresolution structures for arbitrary topologies while guaranteeing analytic high-order continuity of the resulting limit surfaces [12]. Subdivision surfaces have been successfully employed as a unified representation for geometric modeling and FEA of shell structures [12, 13]. For elastic solids, subdivision surfaces have also been combined with immersed finite elements for structural analysis [14], and volumetric subdivision has been explored to further integrate geometric modeling and physically based simulation [15]. However, existing approaches have mainly focused on shell analysis, boundary representation, or simulation, while subdivision-based representations for solid shape optimization remain less explored. In addition, maintaining volume constraints during boundary evolution remains a critical issue in optimization processes [14, 16].

To address these challenges, this paper proposes a feature-preserving subdivision-based shape optimization framework. The framework uses subdivision rules as an explicit mapping from a coarse control mesh to a refined volumetric analysis mesh, enabling design updates on the control mesh while performing three-dimensional FEA on the subdivided mesh. The proposed framework is evaluated through representative 2D and 3D numerical examples, where compliance minimization is adopted as a representative objective for structural shape optimization. The results demonstrate the effectiveness of the proposed approach in improving structural performance while preserving prescribed geometric features, with fewer design variables than direct optimization on subdivided physical meshes. The main contributions of this work are summarized as follows:

- We propose a hybrid subdivision volume representation (HSVR) for fixed-topology shape optimization. The proposed representation uses a compatible

surface subdivision to define the boundary geometry and a 1-to-8 tetrahedral refinement to construct the interior volumetric mesh, thereby establishing a mapping from a coarse control mesh to a refined volumetric analysis mesh. This enables optimization on the coarse control mesh while performing FEA on the refined volumetric mesh.

- We develop a subdivision-consistent shape optimization framework based on the hybrid subdivision volume representation. The framework formulates optimization in the control-mesh space by deriving design sensitivities through the transpose of the composed subdivision mapping and incorporates a consistent treatment of volume constraints during shape evolution.
- We introduce a global-to-refined control-point activation strategy, which switches the optimization from all movable control points to a selected subset in critical regions. This strategy adaptively concentrates design freedom while maintaining a compact set of design variables.

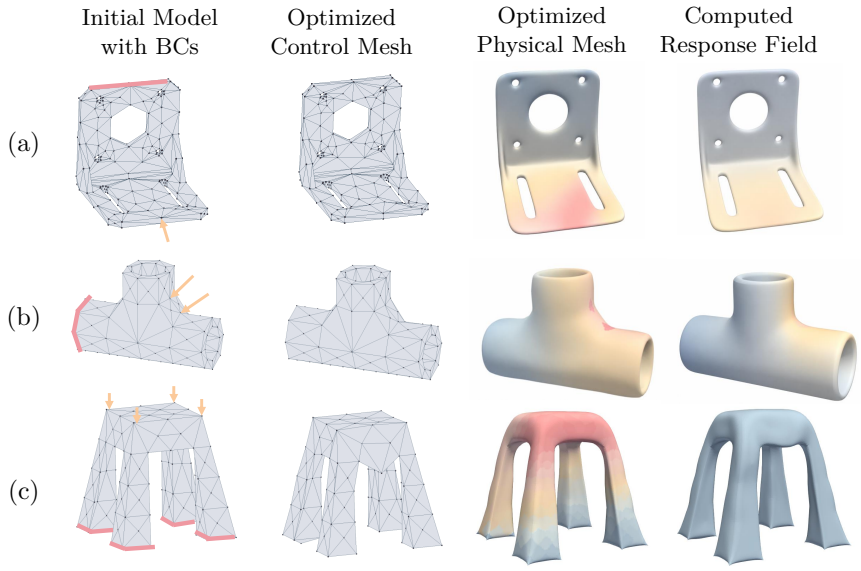


Figure 1 Optimization results of the 3D engineering examples using HSVR-Opt. (a) 3D example I; (b) 3D example II; (c) 3D example III. For each example, the columns from left to right show the initial model with boundary conditions, the optimized control mesh, the optimized physical mesh, and the corresponding finite element response field. The markers indicate fixed nodes or constrained regions, and the arrows indicate load application nodes and force directions.

Conclusion

This paper develops a hybrid subdivision volume representation for fixed-topology structural shape optimization, enabling optimization on a coarse control mesh and analysis on a refined volumetric mesh through compatible surface-volume subdivision. Based on this representation, a subdivision-consistent optimization formulation is established with direct sensitivity transfer through a composed sparse mapping. A global-to-refined control-point activation strategy is further introduced to adaptively regulate the design space. Numerical experiments demonstrate comparable structural performance with substantially fewer design variables than direct

optimization on subdivided physical meshes while preserving prescribed geometric features.

Several limitations of the proposed framework also suggest directions for future research. First, the current formulation is restricted to fixed-topology shape optimization. Extending the subdivision-based representation to topology optimization may enable a more complete design process, where topology exploration is followed by smooth boundary evolution and feature refinement. Second, although control-mesh validity is maintained throughout optimization and no physical-mesh inversion was observed in our experiments, this does not theoretically guarantee the validity or quality of the refined physical mesh under large geometric deformations. Incorporating physical-mesh quality monitoring and adaptive remeshing could further improve robustness for large shape variations. Third, the current use of uniform subdivision may introduce unnecessary computational cost for models with localized geometric or mechanical features. Adaptive subdivision strategies driven by geometric complexity or sensitivity information could further improve the scalability of the proposed framework.

Author details
[1]School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, China. [2]School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, Xiamen, China.

References

1. Haftka, R.T., Gürdal, Z.: Elements of Structural Optimization vol. 11. Springer, ??? (1992)
2. Bendsøe, M.P., Sigmund, O.: Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications. Springer, ??? (2003)
3. Haftka, R.T., Grandhi, R.V.: Structural shape optimization—a survey. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **57**(1), 91–106 (1986)
4. Le, C., Bruns, T.E., Tortorelli, D.A.: A gradient-based, parameter-free approach to shape optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **200**(9-12), 985–996 (2011)
5. Moghaddasi-Tafreshi, A., Fenner, R.T.: Design optimization using the boundary element method. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design **26**(4), 231–241 (1991). doi:10.1243/03093247V264231
6. Lian, H., Kerfriden, P., Bordas, S.P.A.: Implementation of regularized isogeometric boundary element methods for gradient-based shape optimization in two-dimensional linear elasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering **106**(12), 972–1017 (2016). doi:10.1002/nme.5149
7. Wall, W.A., Frenzel, M.A., Cyron, C.: Isogeometric structural shape optimization. Computer methods in applied mechanics and engineering **197**(33-40), 2976–2988 (2008)
8. Gao, J., Xiao, M., Zhang, Y., Gao, L.: A comprehensive review of isogeometric topology optimization: methods, applications and prospects. Chinese Journal of Mechanical Engineering **33**, 1–14 (2020)
9. Tang, P.-S., Chang, K.-H.: Integration of topology and shape optimization for design of structural components. Structural and Multidisciplinary Optimization **22**(1), 65–82 (2001). doi:10.1007/PL00013282
10. Hughes, T.J., Cottrell, A., Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **194**(39-41), 4135–4195 (2005)
11. Zhao, H., Kamensky, D., Hwang, J.T., Chen, J.-S.: Automated shape and thickness optimization for non-matching isogeometric shells using free-form deformation. Engineering with Computers, 1–24 (2024)
12. Cirak, F., Ortiz, M., Schröder, P.: Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering **47**(12), 2039–2072 (2000)
13. Bandara, K., Cirak, F.: Isogeometric shape optimisation of shell structures using multiresolution subdivision surfaces. Computer-Aided Design **95**, 62–71 (2018)
14. Bandara, K., Rüberg, T., Cirak, F.: Shape optimisation with multiresolution subdivision surfaces and immersed finite elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **300**, 510–539 (2016)
15. Altenhofen, C., Schuwirth, F., Stork, A., Fellner, D.W.: Volumetric subdivision for consistent implicit mesh generation. Computers & Graphics **69**, 68–79 (2017). doi:10.1016/j.cag.2017.09.005
16. Chandrasekhar, A., Sridhara, S., Suresh, K.: Auto: a framework for automatic differentiation in topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization **64**(6), 4355–4365 (2021)

基于概率分布重塑的高光表面三维高斯几何重建

李志豪，王琛，王鹏飞，魏广顺，周元峰

（山东大学软件学院，济南 250101）

摘　要：三维高斯泼溅（3D Gaussian Splatting，3DGS）具有高效渲染与显式场景表示优势，但在高光表面重建中易受跨视图光度不一致影响，产生表面内陷和几何失真。本文从射线方向高斯概率分布角度分析该问题，发现高光区域的几何退化主要表现为概率分布长尾与峰值漂移，导致深度期望偏离真实表面。针对这一现象，提出一种概率分布重塑框架，通过非对称空间蒸馏抑制非物理长尾分布，并结合蒸馏引导的法向校正增强表面几何一致性；同时引入光度残差自适应调制和物理启发神经着色，以缓解高光外观与几何优化之间的冲突。实验结果表明，该方法能够有效减少高光区域的几何内陷，并在多个合成与真实数据集上提升表面重建精度和细节完整性。

关键词：三维高斯泼溅；高光表面；三维重建；概率分布重塑；表面重建

0 引　言

多视图三维重建是计算机图形学与计算机视觉中的基础问题，广泛应用于数字孪生、虚拟现实和三维内容生成等领域。近年来，三维高斯泼溅（3D Gaussian Splatting，3DGS）凭借显式场景表示、高质量渲染和较高的计算效率，为表面几何重建提供了新的技术路径。然而，现有方法在高光和强镜面反射场景中仍面临明显挑战。由于高光外观随观察视角发生显著变化，跨视图光度一致性被破坏，使基于图像误差驱动的几何优化容易产生表面内陷、孔洞和法向不稳定等问题。本文从概率分布角度分析上述几何退化现象。对于一条相机射线，三维高斯泼溅的深度可视为沿射线分布的高斯基元贡献概率的一阶统计量。当高光区域存在强烈的跨视图颜色冲突时，真实表面附近高斯基元的贡献会受到抑制，概率质量逐渐向物体内部扩散，形成长尾分布并伴随概率峰值漂移，使渲染深度的期望偏离真实几何位置，最终导致系统性的几何内陷。针对这一问题，本文提出一种基于概率分布重塑的高光表面三维重建方法。通过非对称空间蒸馏抑制射线方向的非物理长尾分布，并利用蒸馏引导的法向校正增强高斯基元与真实表面的几何一致性；同时结合光度残差自适应调制与物理启发神经着色，缓解高光外观表达与几何优化之间的冲突。实验结果表明，该方法能够有效减少高光区域的几何内陷，并提升复杂反射场景中的表面重建精度与细节完整性。

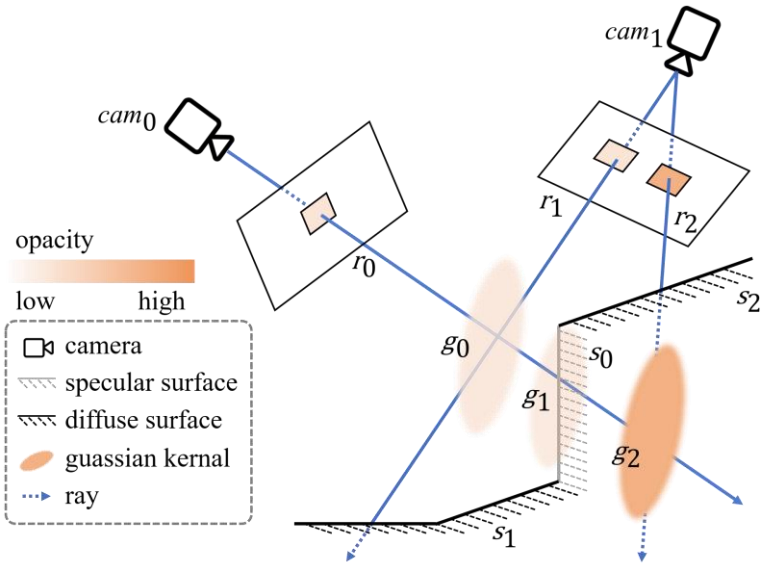
1 问题描述

在高光表面中，物体外观随观察方向发生显著变化，同一物理表面在不同视角下可能呈现明显不同的颜色。对于主要依赖光度误差优化的三维高斯泼溅，这种跨视图光度冲突会使真实表面附近的高斯基元难以同时满足不同视角的观测。如图一所示，为降低渲染误差，优化过程倾向于减小这些高斯基元的不透明度，并将部分表示能力转移至物体内部，从而造成高斯基元逐渐偏离真实表面。

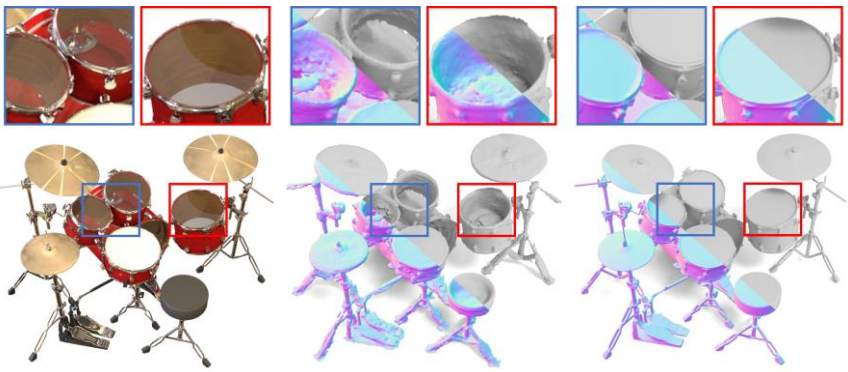
从概率角度看，对于一条相机射线 r，沿射线排列的高斯基元贡献权重 $W_i = \alpha_i T_i$可视为射线终止概率分布的离散形式，其渲染深度为

$$D_{\text{render}}(r) = \sum_{i=1}^{N} W_i \, d_i.$$

因此，渲染深度本质上对应于该概率分布的一阶矩。当高光引起真实表面附近的概率质量减弱并向物体内部扩散时，原本集中的分布会逐渐形成长尾分布和峰值漂移，使深度期望偏离真实物理表面，最终表现为系统性的几何内陷和表面失真。



图一 产生凹陷原理示意图 其中，cam0、cam1：不同相机视角（camera views）；g_0, g_1, g_2：沿射线分布的高斯基元（Gaussian primitives），分别对应离群基元、真实表面附近基元和物体内部基元；r_0, r_1, r_2：相机射线（camera rays）；s_0, s_1, s_2：对应射线上的表面位置；颜色由浅至深表示高斯基元不透明度（opacity）由低到高；斜线区域表示高光表面（specular surface），橙色表面表示漫反射/渲染表面（diffuse/rendered surface）。



（1）输入视角 （2）2DGS （3）我们的

图二 高光表面重建几何结果图

方法	NeRF Synthetic (CD↓)	Shiny (CD↓)
2DGS	0.146	0.069
PGSR	0.162	0.081
Rade-GS	0.135	0.071
本文方法	0.130	0.061

表一 方法结果图

针对高光区域中长尾分布和峰值漂移引起的几何内陷问题，本文提出概率分布重塑框架。该方法首先通过非对称空间蒸馏抑制真实表面之后的非物理长尾分布，使高斯概率质量重新聚集至表面附近；随后采用蒸馏引导的法向校正约束高置信度区域内高斯基元的方向一致性。进一步地，利用光度残差构建自适应调制权重，在高光区域增强几何约束、在稳定区域减弱约束；同时引入物理启发神经着色，利用反射相关特征提升高光外观表达能力，从而缓解外观拟合与几何优化之间的冲突。

本文在 NeRF Synthetic 和 Shiny 等数据集上进行了验证。结果表明，本文方法在多个数据集上均取得了较好的指标。图二的定性结果进一步显示，本文方法能够有效缓解高光区域常见的表面内陷与局部几何破损。

2 结 论

本文针对高光表面三维高斯重建中易出现的几何内陷问题，从射线概率分布角度分析其成因，并提出概率分布重塑框架。通过非对称空间蒸馏、蒸馏引导的法向校正、自适应调制以及物理启发神经着色，能够有效抑制高光区域的长尾分布和峰值漂移，在保持外观表达能力的同时提升表面几何的准确性与完整性。实验结果表明，该方法在多个合成与真实数据集上均取得了较好的重建效果。未来可进一步从以下几个方向展开：1）细粒度几何建模，提升对毛发、绒毛等尺度小于单个高斯基元空间范围的细小结构的表示能力。2),设计更稳健的判别机制，区分由高光引起的概率分布退化与真实高频几何细节，减少误约束。3)增加多尺度几何先验,引入更丰富的几何先验或多尺度表示，提高复杂材质和复杂结构场景下的重建稳定性与泛化能力

参 考 文 献:

[1] MILDENHALL B, SRINIVASAN P P, TANCIK M, et al. NeRF: Representing Scenes as Neural Radiance Fields for View Synthesis[J]. Communications of the ACM, 2021, 65(1):99-106.

[2] VERBIN D, HEDMAN P, MILDENHALL B, et al. Ref-NeRF: Structured View-Dependent Appearance for Neural Radiance Fields[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2022.

[3] CHEN D, LI H, YE W, et al. PGSR: Planar-Based Gaussian Splatting for Efficient and High-Fidelity Surface Reconstruction[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2024.

[4] HUANG B, YU Z, CHEN A, et al. 2D Gaussian Splatting for Geometrically Accurate Radiance Fields[C]//SIGGRAPH 2024 Conference Papers. 2024.

[5] ZHANG B, FANG C, SHRESTHA R, et al. RaDe-GS: Rasterizing Depth in Gaussian Splatting[J]. arXiv preprint arXiv:2406.01467, 2024.

[6] KERBL B, KOPANAS G, LEIMKÜHLER T, et al. 3D Gaussian Splatting for Real-Time Radiance Field Rendering[J]. ACM Transactions on Graphics, 2023, 42(4):1-14.

Surface Quadrilateral Mesh Generation Based on Weierstrass $\wp$ Function

Yiming Zhu, Qiankun Nie, Siquan Sun*, Siyu Fang, Na Lei, Zhongxuan Luo, Hang Si, Xianfeng Gu

The generation of structured surface quadrilateral meshes plays a pivotal role in solid modeling, physical simulation and a broad range of engineering applications. In particular, electronic design automation (EDA) for emerging 3D integrated circuit (3D-IC) technologies frequently relies on high-quality hexahedral meshes for multi-physics simulations to guarantee numerical accuracy and stability. To efficiently generate structured hexahedral meshes for such three-dimensional geometries, prevailing EDA workflows leverage the layered characteristics of IC layouts: quadrilateral meshes are first constructed on planar cross-sections and then extruded along the thickness direction to yield volumetric grids. When adopting this pipeline to create high-quality hexahedral meshes, a critical requirement is that the quadrilateral meshes defined on planar domains must be orthogonal to domain boundaries. Against this background, our work proposes a novel method based on Weierstrass $\wp$ function to generate quadrilateral meshes over rectangular planar domains, with the mesh edges enforced to be orthogonal to the boundary. Moreover, this method can be applied to produce quadrilateral meshes on closed genus 1 Riemann surfaces. Nevertheless, existing quad-meshing techniques for genus-one surfaces mostly rely on numerical parameterization or cross-field optimization. These heuristic pipelines often suffer from large conformal distortion, poor control over singularity layout, and lack of analytic guarantees for boundary orthogonality on planar rectangular domains. Moreover, they rely on iterative energy minimization, which incurs substantial computational overhead and slows down mesh generation for fine grids. Few prior approaches exploit analytic meromorphic differentials built from elliptic functions, and they cannot simultaneously achieve exact boundary orthogonality, controllable singularities, rigorous Riemann-surface theoretical interpretation and high computational efficiency.

Recent advancements have established the connection between meromorphic quartic differentials and quadrilateral meshes and have unveiled the governing equations—the Abel-Jacobi condition–for their singularities. To investigate the quadrilateral meshes on the Riemann surface of genus 1, we need to consider the meromorphic quartic differentials on this Riemann surface. With a meromorphic function f on the Riemann surface of genus 1, we can consider $dlog(f)$ on this Riemann surface, which is a meromorphic differential of order 1. For the meromorphic differential form $dlog(f)$ of order 1, it transforms the zeros of the meromorphic function f into simple poles of $dlog(f)$ with positive residues and

the poles of f are transformed into simple poles of $dlog(f)$ with negative residues. Also, the zeros of $dlog(f)$ comes from the saddle points of f, i.e., consiting of all the p belong to the Riemann surface such that $f'(p) = 0$. With this meromorphic differential 1-form in hands, we can take the power of 4 to produce a meromorphic quartic differentials, which corresponds to a quad mesh. So the problem of constructing quadrilateral meshes on genus 1 surfaces is transformed into constructing meromorphic functions on genus 1 surfaces.

The Weierstrass $\wp$ function provides a doubly periodic meromorphic function on the complex plane, which, when composed with a conformal mapping from the surface to the plane, directly induces a meromorphic function on the genus 1 Riemann surface. This function can be further transformed into a meromorphic quartic differential in accordance with the Abel-Jacobi condition, which naturally induces a quadrilateral mesh. Also, we can go step further from Weierstrass $\wp$ function to get σ-function, which can also be used to construct meromorphic functions on genus one Riemann surfaces. Our method is grounded in a rigorous theoretical framework and leverages the Weierstrass $\wp$ function and σ-function to achieve conformal surface parameterization, leading to quadrilateral meshes with high orthogonality and uniform local size transition. Also, our method constructs the meromorphic function or genus 1 Riemann surfaces directly, so algorithm runs fast compared with other methods. Furthermore, the algorithm allows users to prescribe the positions and indices of singularities of the quad-mesh. To demonstrate the simplicity, efficiency and versatility of our approach, we provide numerical experiments that confirm its theoretical validity and illustrate its practical advantages.

基于亚纯四次微分的无缝参数化与闭式锥奇异点优化

王昊，罗钟铉，史艳平，徐泽斌，郑晓朋*，雷 娜

（大连理工大学，大连 116620）

摘　要：本文从亚纯四次微分所诱导平直度量的角度，对亏格为零曲面上的无缝参数化解析框架进行了改进。我们证明了微分在不同球极投影坐标图之间的转换仅相差一个常数因子，从而能够稳定地构造全局一致的度量。通过将四次微分嵌入到度量表述中，消除了分支选择歧义；在此框架下，我们推导了奇异点移动、插入和合并所引起参数化度量变化的统一表达式。畸变变化无需重建微分或重新求解参数化即可进行闭式计算，因此能够支持并行计算。实验结果表明，本方法的运行时间与启发式方法相当，同时能够获得与优化方法相近的面积畸变；其引入的奇异点数量仅略多于优化方法，并少于启发式方法。

关键词：无缝参数化；亚纯四次微分；锥奇异点优化

0 引　言

曲面参数化是纹理映射、曲面重网格化以及四边形网格生成中的基础工具。无缝参数化进一步要求切割边两侧的参数坐标仅相差整数倍 $\pi/2$的旋转和平移。亚纯四次微分（Meromorphic Quartic Differential, MQD）所诱导的自然坐标之间的转换天然满足这一旋转结构，因此能够直接用于亏格为零曲面的无缝参数化[1]。

然而，现有 MQD 方法仍存在两个问题。一方面，单一球极投影在投影中心附近容易产生数值不稳定，直接积分 MQD 的四次方根还需要处理分支选择；另一方面，参数化的面积畸变高度依赖于锥奇异点的位置和数量。在无缝参数化中，直接根据共形因子的极值插入奇异点并不能保证畸变能量持续下降，而基于整数约束优化的奇异点构造方法[2,3] 通常需要求解混合整数优化问题，并依赖相应的优化求解器。

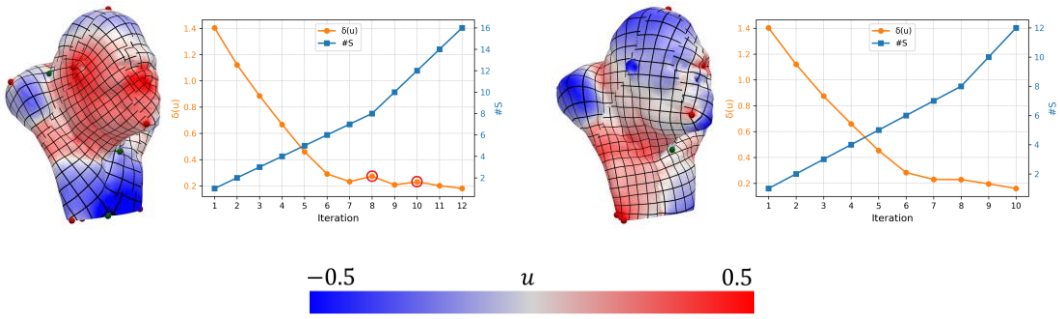


图 1 奇异点插入策略对比，左图：根据共形因子的极值插入锥奇异点的迭代式无缝参数化方法，该策略可能导致能量出现非单调变化（$\#s = 16, \delta(u) = 0.18$）；右图：本文提出的奇异点优化策略，根据畸变能量的变化对奇异点进行调整（$\#s = 12, \delta(u) = 0.16$）。其中，$\#s$ 表示奇异点数量，$\delta(u)$表示面积畸变。

本文从 MQD 诱导度量出发，建立稳定的双坐标图参数化框架，并推导奇异点移动、插入和合并所引起的畸变能量变化，从而实现高效的锥奇异点优化[4]。

1 问题描述

给定亏格为零三角网格$\mathcal{M}=(V,E,F)$，在局部复坐标 z下，亚纯四次微分表示为$\Phi=g(z)(dz)^4$，其中 $g(z)$由 MQD 的零点和极点决定，可由复有理函数来表示。其诱导的平直锥度量为

$$d_\Phi = | g(z) |^{1/4} | dz |。$$

MQD 的k阶极点和零点分别贡献 $+k\pi/2$和 $-k\pi/2$的锥曲率，并且亏格为零曲面上的零极点总阶数满足

$$m-n=8。$$

其中 m和 n分别表示极点和零点的总阶数。因此，改变 MQD 的零极点配置实际上就是改变无缝参数化中的锥奇异点配置。

本文采用面积加权的对数共形因子衡量参数化畸变能量：

$$E(u)=u^TAu。$$

其中 A为顶点面积权重构成的对角矩阵。目标是在保持 MQD 零极点阶数约束和无缝结构的同时，调整奇异点的位置与数量，使面积畸变尽可能降低，并避免过多奇异点和昂贵的重复参数化求解。

2 方　法

本文方法主要包括稳定的 MQD 度量构造和能量变化驱动的奇异点优化两个部分。整体流程如下图所示。

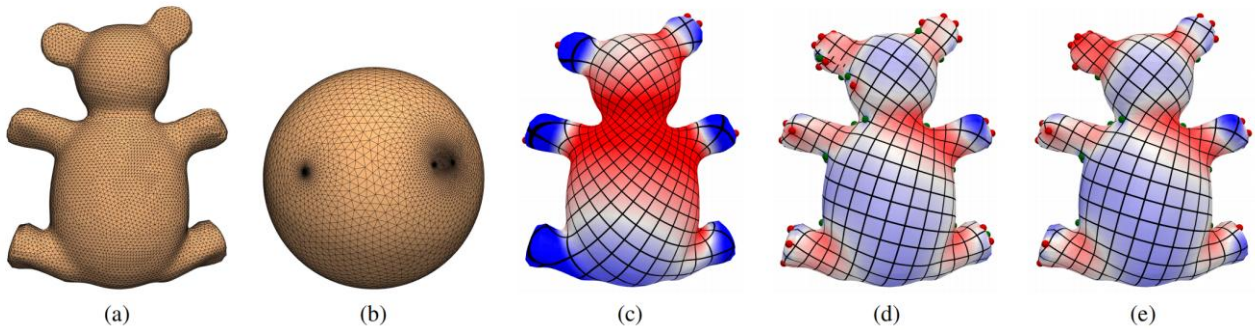


图 2 本文方法的整体流程。(a) 包含 19,394 个三角面片的输入三角网格；(b) 将网格调和映射到单位球面；(c)－(e) 奇异点优化及其对应的 MQD 诱导无缝参数化结果；(c) 移动初始的 8 个极点奇异点（8 个极点，$\delta(u)=0.54$）；(d) 插入额外的奇异点（21 个零点和 29 个极点，$\delta(u)=0.13$）；(e) 合并冗余奇异点（15 个零点和 23 个极点，$\delta(u)=0.14$）。

2.1 双坐标图 MQD 度量构造

首先将输入曲面调和映射到单位球面，并通过南、北两个球极投影获得局部复坐标 z和 w，二者满足

$$z=\frac{1}{w}。$$

本文证明，同一零极点配置在两个坐标图下构造的 MQD 满足

$$\Phi_z=C\Phi_w,$$

从而其诱导度量满足

$$d_{\Phi_z} = | C |^{1/4} d_{\Phi_w}。$$

因此，可以在不同半球分别选择数值稳定的球极投影计算局部 MQD 度量，再通过一个常数尺度因子转换到统一的参考度量。这避免了在投影中心附近直接计算所导致的数值误差。

同时，本文不直接积分多值的 $\sqrt[4]{\Phi}$，而是利用其模长定义的边度量进行平面嵌入。由于不同四次方根分支具有相同模长，该方法避免了显式的分支选择问题。

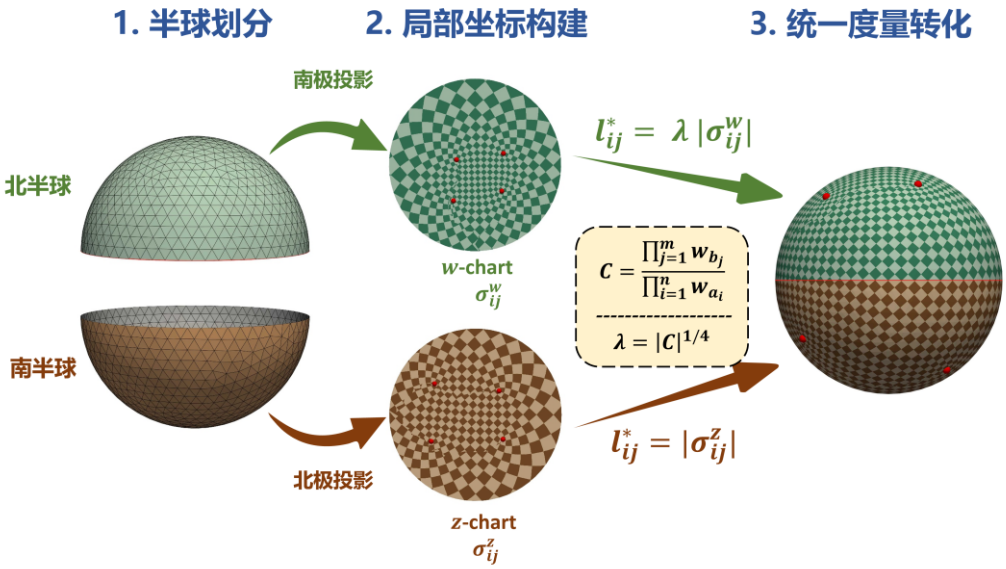


图 3 MQD 诱导度量的双坐标图计算。左：球面曲面的南、北半球区域划分。中：分别在两个球极投影坐标图中局部计算 MQD 诱导的微分 1-形式。右：将在 w坐标图中计算得到的度量长度转换到参考 z坐标图的度量中，用于后续的度量嵌入。

2.2 能量变化驱动的奇异点优化

本文将奇异点移动、插入和合并统一表示为 MQD 的乘性更新。例如，在 a插入一个零点、在 b插入一个极点对应有理因子

$$\rho_{a,b}(z) = \frac{z-z_a}{z-z_b}。$$

由此可以直接得到奇异点操作前后的度量变化，并进一步计算共形因子的变化 Δu。相应的畸变能量变化为

$$\Delta E = 2u^T A\Delta u + \Delta u^T A\Delta u。$$

因此，每个候选奇异点操作的效果可以直接由度量变化进行评价，而无需重新计算球面映射或重新构造二维参数化。不同候选操作相互独立，还可以并行计算。

优化过程包括三个阶段：首先移动初始极点；随后插入能够使 $\Delta E < 0$的零点 - 极点对以降低面积畸变；最后合并邻近的冗余零极点对，在仅允许少量畸变增加的情况下减少奇异点数量。

3 结　论

本文提出了一种基于亚纯四次微分诱导平直度量的亏格为零曲面无缝参数化与锥奇异点优化方法。通过证明两个球极投影坐标图下的 MQD 诱导度量仅相差一个常数尺度因子，实现了数值稳定的双坐标图构造；通过直接嵌入 MQD 诱导度量，避免了四次方根积分中的分支选择问题。在此基础上，本文推导了奇异点移动、插入和合并所引起的畸变能量变化，使候选奇异点操作能够在无需重复求解参数化的情况下进行高效评价。实验结果表明，该方法能够在面积畸变、奇异点数量和计算效率之间取得较好的平衡。

未来，我们将首先研究该框架向拓扑圆盘曲面的扩展。对于拓扑圆盘，可以通过平面共形参数化获得 MQD 所需的局部复坐标，因此无需处理球面双坐标图之间的转换。初步实验表明，本文提出的能量变化驱动奇异点优化方法同样可以应用于拓扑圆盘曲面。然而，仅通过 MQD 的零极点配置无法自动保证参数化边界与给定边界曲线或特征方向对齐（图 4），因此需要进一步引入显式的边界条件和特征约束。



图 4 拓扑圆盘曲面上的 MQD 无缝参数化初步结果

参 考 文 献:

[1] Lei, N., Zheng, X., Luo, Z., Luo, F., Gu, X. Quadrilateral mesh generation II: Meromorphic quartic differentials and Abel–Jacobi condition. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 366, 112980.

[2] Zhang, Z., Li, M., Zhao, Z., Fang, Q., Fu, X. Practical integer-constrained cone construction for conformal parameterizations. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2024, 30(8), 5227–5239.

[3] Du, W., Fang, Q., Liu, L., Fu, X. Efficient computation of integer-constrained cones for conformal parameterizations. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2026, 32(7), 5304–5316.

[4] Wang, H., Luo, Z., Shi, Y., Xu, Z., Zheng, X., Lei, N. Closed-form cone singularity optimization for seamless parameterization via meromorphic quartic differentials. Computer-Aided Design, 2026, 200, 104150.

HiQu3DGen：一致性多视图引导的高质量 3D 资产生成

李镇宇[1]，高珊珊[2]，魏广顺[1,*]，张佳宁[1]，王文平[3]，周元峰[1,*]

（1.山东大学，济南 250000；2.山东财经大学，济南 250000；3.Texas A&M University，College Station 77840)

摘　要：高质量三维资产生成是计算机图形学中的长期挑战，其核心难点在于如何在单视图输入条件下，准确恢复与输入图像一致的几何结构和外观纹理。现有生成范式难以从单张图像中施加可靠的结构与外观约束，往往导致生成结果中存在几何和纹理不一致问题。针对这一挑战，本文提出 HiQu3DGen，一种一致性驱动的高质量三维资产生成框架。该框架通过合成视角一致的多视图表征来引导三维资产生成，并采用双向递归多视图生成策略，在生成过程中显式增强视角间依赖关系，从而减少相互矛盾视图的产生。在结构一致的多视图观测基础上，本文进一步构建稳健的几何中间表示，并通过紧密耦合多视图外观线索来细化几何结构和纹理信息，最终生成高质量带纹理三维资产。在简单和复杂三维资产生成基准上的大量定量与定性实验表明，本文方法在几何一致性和纹理保真度方面均优于现有方法。

关键词：单图三维生成，多视图一致性，视图合成，带纹理网格，三维资产生成

0 引　言

复杂几何对象的三维建模与网格生成是计算机图形学、数字孪生、仿真分析和工程设计中的基础环节。传统三维资产构建通常依赖专业建模软件、三维扫描设备或人工后处理流程，在处理复杂外形、细长结构和丰富纹理对象时成本较高。近年来，基于深度学习的单图三维生成方法为快速构建三维对象提供了新的可能，用户只需输入一张参考图像，模型即可推断物体的三维形状和外观，从而显著降低三维建模门槛。

然而，单图像到三维生成仍面临明显挑战。由于输入图像只能提供有限视角信息，物体背面、侧面和遮挡区域存在较强不确定性。现有方法常通过前馈网络直接预测三维表示，或先生成多个视角图像再进行三维重建。前者通常具有较高效率，但容易依赖类别先验而忽略输入实例的细节；后者能够提供更多伪观测，却容易受到多视图图像不一致的影响。当不同视角中的纹理位置、局部结构或几何轮廓无法对应时，这些误差会传递到后续三维重建阶段，最终表现为几何不稳定、表面破碎、纹理模糊或局部结构错误。

对于面向网格生成和几何处理的应用而言，仅生成视觉上合理的三维对象并不足够。生成结果还需要在几何结构上尽可能稳定，在局部细节上尽可能忠实于输入图像，并具有较好的后续处理潜力。因此，如何从单张图像出发建立可靠的多视图约束链，并将输入实例的信息稳定传递到最终三维资产中，是提升智能几何建模质量的关键问题。

本文围绕这一问题提出 HiQu3DGen[1]，一种一致多视图引导的高质量三维资产生成方法。该方法强调从多视图生成、粗几何估计到三维资产细化的整体一致性建模，使生成的几何与纹理在不同阶段保持连续约束，从而提升复杂对象的实例保真度和结构稳定性。



图 1 从单张参考图像生成高质量三维资产的示例

1 方法概述

HiQu3DGen 的核心思想是构建一条从二维输入到三维资产的连续约束链。给定单张参考图像，首先采用双向递归多视图生成模块（Bidirectional Recursive Multi-View Generation，BR-MVG）生成一组环绕目标对象的多视图图像。与并行生成所有视角不同，双向递归策略通过相邻视角之间的条件传递增强局部连续性，同时从两个方向展开以减轻长序列递归中的误差累积。随后，方法利用生成的多视图图像及其相机参数进行前馈几何估计（Feed-Forward Geometry Estimator，FGE），预测各视角深度与置信度，并将可靠深度点融合为粗几何代理。该代理虽然并非最终几何，但能够为后续三维生成提供稳定的结构。

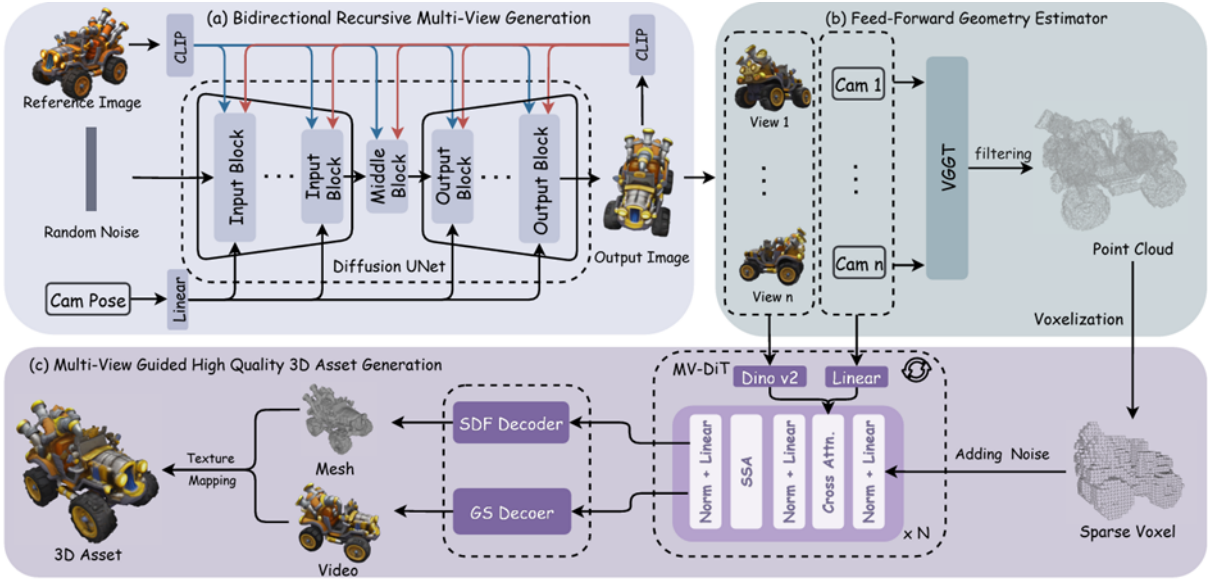


图 2 HiQu3DGen 方法框架图。给定参考图像，将其输入（a）BR-MVG 以生成对象的多视图图像。然后通过（b）FGE 重建多视图图像以求解多视图几何表示。最后，通过（c）MV3DG 模块对粗糙几何形状进行细化，从而生成高质量的纹理网格。

初始化。最后，方法将粗几何代理转化为稀疏三维表示，并通过多视图引导的三维生成模块（Multi-View Guided High Quality 3D Asset Generation，MV3DG）逐步融合不同视角的图像条件，在稀疏结构中细化几何和纹理信息，最终输出高质量带纹理三维网格资产。

2 复杂几何对象生成结果

为验证方法在复杂对象上的有效性，本文重点考察具有复杂轮廓、细长部件、遮挡区域和丰富纹理的三维资产生成场景。与仅依赖单视图先验的前馈生成方法相比，HiQu3DGen 能够更充分地利用多视图观测信息，使生成结果在整体形状和局部结构上更接近输入图像。对于复杂对象中常见的薄片、支架、凸起、凹陷和重复纹理区域，本文方法能够更好地保持结构连续性，减少局部断裂和几何漂移。

从视觉对比可以看出，现有方法在复杂对象上常出现两类问题：一是几何结构过度平滑或局部缺失，导致生成模型虽然类别正确但实例细节不足；二是纹理与几何之间缺少稳定对应关系，导致不同视角下出现纹理错位或表面模糊。相比之下，HiQu3DGen 通过一致多视图生成和粗几何代理约束，使多视角信息在三维空间中形成更稳定的对应关系，从而提升最终三维资产的几何完整性和纹理一致性。

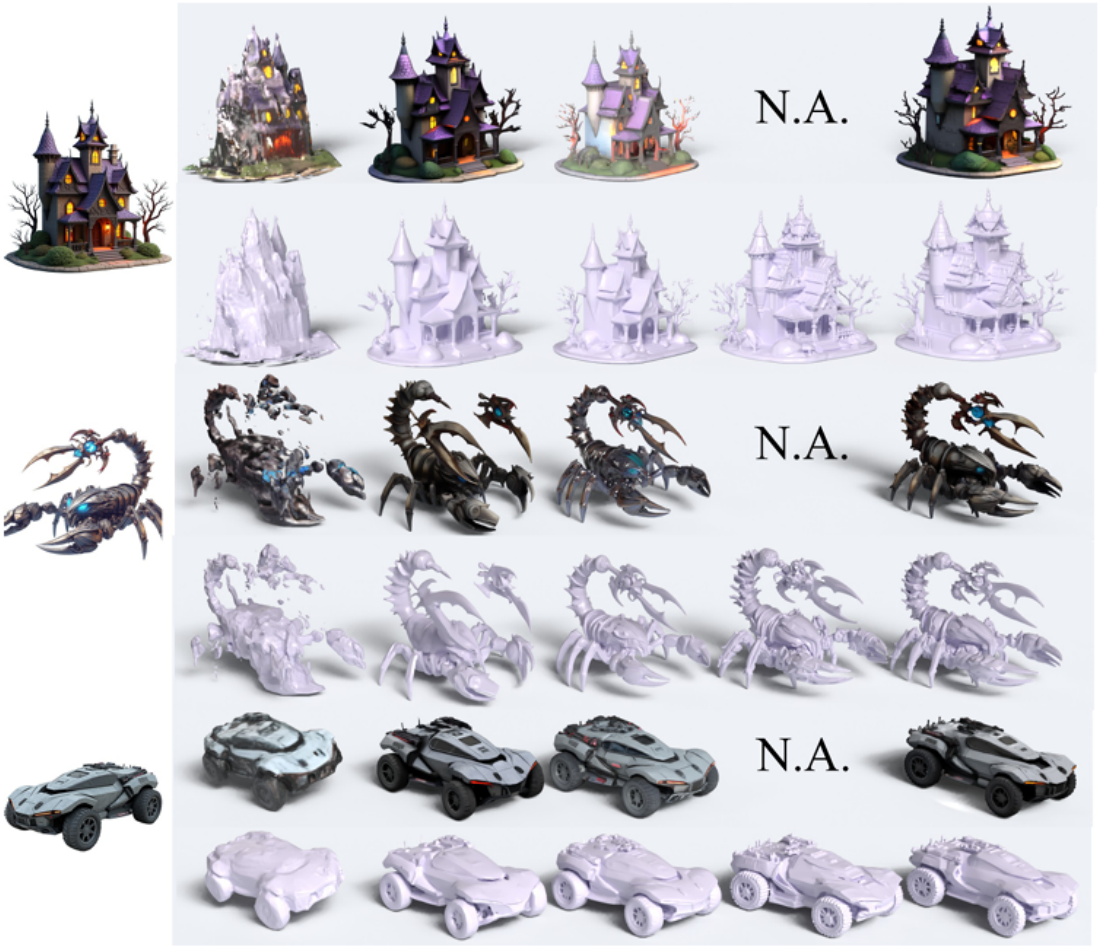


图 3 复杂对象三维资产生成对比

3 结论

本文提出了一种一致多视图引导的高质量三维资产生成方法 HiQu3DGen。该方法通过双向递归多视图生成增强跨视角一致性，通过粗几何代理提供结构初始化，并在多视图条件约束下逐步细化三维几何与纹理。相比现有单图三维生成方法，HiQu3DGen 在复杂对象场景中能够生成更稳定、更符合输入实

例的三维资产，为智能几何建模、复杂对象重建以及后续网格生成前处理提供了有价值的技术参考。

本文相关成果已发表于 ACM Multimedia 2026。未来工作将进一步探索生成资产的可编辑结构表达、面向生产流程的几何规整化，以及与自动网格生成工具链的深度结合，从而提升生成三维资产在工程分析和实际生产流程中的可用性。

参 考 文 献:

[1] Li Z, Gao S, Wei G, Zhang J, Wang W, Zhou Y. HiQu3DGen: Consistent Multi-View Guided High Quality 3D Asset Generation[C]. Proceedings of the 34th ACM International Conference on Multimedia (MM '26), Rio de Janeiro, Brazil, 2026.

[2] Long X, Guo Y C, Lin C, et al. Wonder3d: Single image to 3d using cross-domain diffusion[C]//2024 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2024: 9970-9980.

[3] Xiang J, Lv Z, Xu S, et al. Structured 3d latents for scalable and versatile 3d generation[C]//2025 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2025: 21469-21480.

[4] Hunyuan3D T, Yang S, Yang M, et al. Hunyuan3d 2.1: From images to high-fidelity 3d assets with production-ready pbr material[J]. arXiv preprint arXiv:2506.15442, 2025.

[5] Wu S, Lin Y, Zhang F, et al. Direct3d-s2: Gigascale 3d generation made easy with spatial sparse attention[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2026, 38: 170778-170804.

基于线性网格曲线化的高阶 CFD 网格生成技术

戚姝妮，尹强，史万里，李艳亮

（航空工业空气动力研究院，沈阳 110034）

摘　要：高阶 CFD 数值模拟对边界几何逼近精度要求高，直接生成高阶网格实现难度大。针对商业网格软件大多仅能输出线性直边网格的工程现状，本文研究从现有一阶线性网格出发，通过间接法实现可自定义阶数的高阶曲线网格生成，用户可灵活调整输出网格的多项式阶数。分别阐述非结构网格四步曲线化流程与块结构网格单元聚合曲线化方案，包含阶数提升、边界节点投影、扰动场传播光顺、网格有效性检测等关键算法，并给出典型算例结果。该方法复用成熟线性网格生成能力，变形主要局限于近壁区域，计算成本可控，可输出 P1~P4 范围内用户指定阶数的高阶网格，适配高阶 CFD 求解器的输入需求。

关键词：高阶 CFD；曲线化网格；非结构网格；结构网格；线性网格；可配置网格阶数；网格质量

0 引　言

高阶 CFD 方法空间离散精度达到三阶及以上，相比传统二阶有限体积法，能够以更少网格、更低计算开销获得更高计算精度。但局部高阶重构类方法（DG、FR 等）高度依赖曲边网格对 CAD 几何曲率的准确逼近。已有研究表明：弯曲边界采用直边单元进行离散，不仅无法实现高阶收敛，甚至会得到物理错误的计算结果。

当前商用网格工具存在明显局限：ICEM 仅输出线性直边网格；Pointwise 最高支持 1-4 阶高阶网格输出；ANSA 仅支持固定 2 阶曲边网格，高阶网格生成需要特殊工作流，用户难以自由按需调整网格阶数。

本文构建一套完整的由线性网格向高阶曲线网格转换框架，支持用户自主设置目标网格阶数，灵活生成 P2/P3/P4 等不同阶次曲线网格。

1　非结构网格曲线化技术

非结构网格曲线化整体分为四个核心步骤：用户指定阶数完成线性网格阶数提升、边界节点投影构建曲面扰动场、扰动场向体网格内部传播与网格光顺、网格有效性检测与质量改进。整套流程中，网格多项式阶数作为外部输入参数，由用户按需配置。

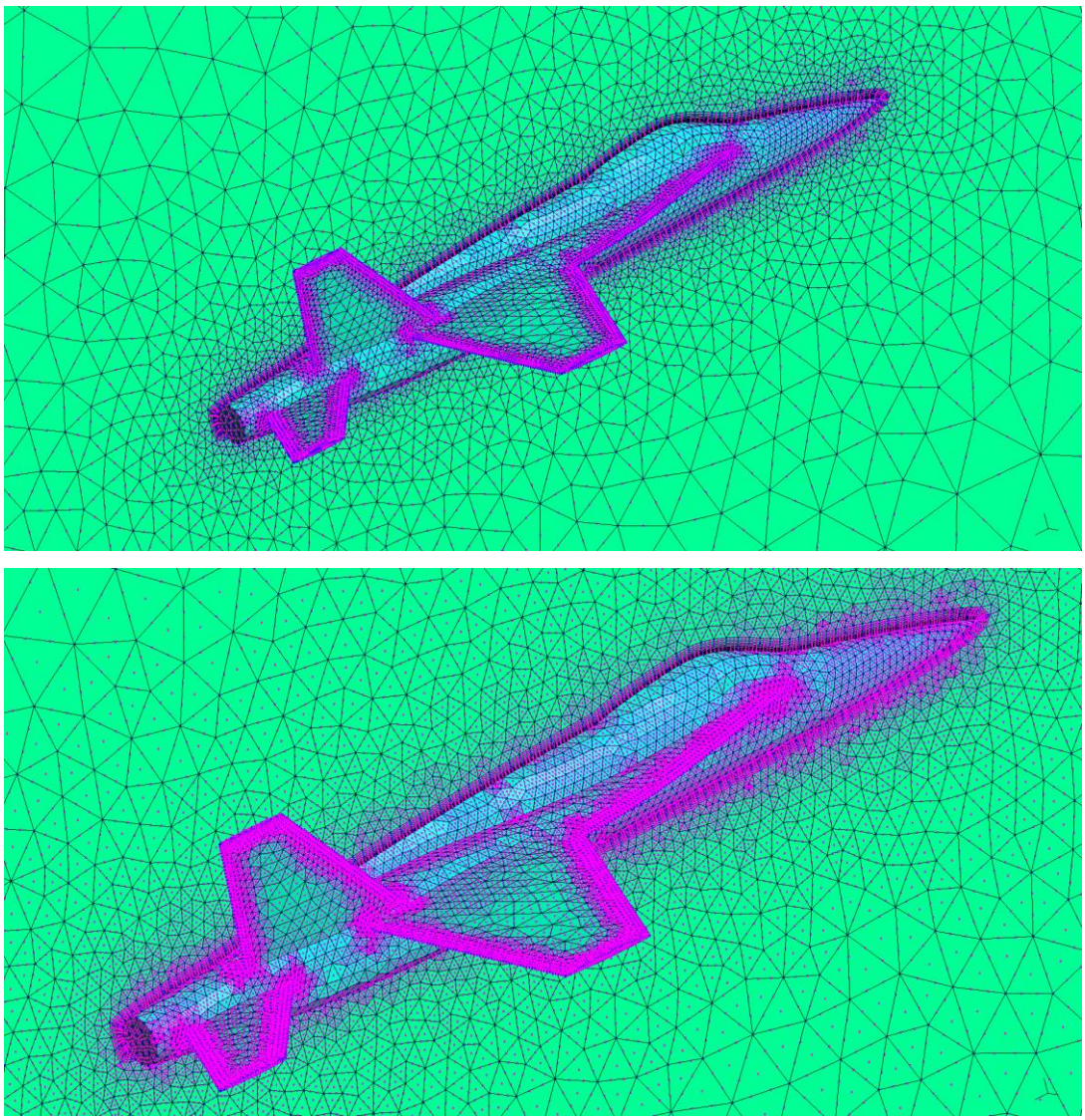


图 2 类战斗机构型的二阶和三阶网格

2 结构网格曲线化技术

块结构化网格具备拓扑有序特性，采用单元聚合策略实现高阶网格生成，不需要迭代变形计算，同样支持用户自定义输出网格阶数。

1. 首先生成精细的线性结构化网格，根据用户指定的高阶多项式阶数计算细化因子 N_g；

2. 将 $(N_g+1)\times(N_g+1)\times(N_g+1)$ 个细线性单元聚合为一个高阶六面体单元。

该策略优点：保证 C_0 连续，从根源避免单元反转；局限性：网格相邻单元增长率过大时，会造成单元雅可比行列式品质劣化，工程应用中需要控制网格增长率。

2 结　论

本文采用间接法开展高阶曲线网格生成，复用现有成熟线性网格资源，核心特点是网格阶数由用户自由配置，分为非结构网格和块结构网格两套方案。该套技术可以输出用户指定的 1-4 阶高阶曲线网格，能够为 DG、FR 等高阶 CFD 求解器提供高质量网格输入。后续将进一步完善 CFD 求解、高阶物理场可视

化阶数调整的相关技术，打通 CFD 高阶模拟的全流程自动化链路。

参 考 文 献:

[1] Bassi, F., Rebay, S. High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 138(2): 251-285.

[2] Persson, P.-O., Peraire, J. Curved mesh generation and mesh refinement using Lagrangian solid mechanics[C] Proceedings of the 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Orlando, Florida: AIAA, 2009.

[3] Hindenlang, F., Gassner, G., Munz, C.-D. On improving the accuracy of discontinuous Galerkin methods at boundary layers[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2014.

面向扫掠体分解的方向场引导的 Query-Mask 点云网络

潘帅宏，吴海燕，徐岗

（杭州电子科技大学，杭州 310018)

摘　要：针对复杂 CAD 模型六面体网格生成中扫掠体分解依赖人工交互和启发式规则的问题，本文提出一种方向场引导的点云 Query-Mask 网络。该方法将扫掠体分解问题转化为实例分割问题，以模型点云作为输入，其坐标、局部方向场和部分距离拓扑信息作为网络特征输入。网络首先采用 Point Transformer 提取多尺度点特征，通过点 Query-Mask 网络查询解码器预测各潜在扫掠块的整体、底面和侧面点掩码；随后利用点—面关联聚合形成面特征，由面 Query-Mask 网络查询解码器预测扫掠块所包含的面集；最后输出可扫掠块集合（每个扫掠体包含的面集）。此外，基于 Fusion 360 Gallery 建立了用于有监督训练的数据集，共包含 20,000 余个数据样本。在包含 1～3 个扫掠块的验证子集（100 个独立样本）上，网络的解码 IoU 达到 84.39%，Recall@0.50 达到 89.49%，Recall@0.75 达到 81.14%。结果表明，该方法能够有效学习复杂模型中的扫掠块实例结构，用于后续六面体网格生成。

关键词：CAD 模型；扫掠体分解；六面体网格；点云；Point Transformer；Query-Mask

0　引言

高质量体网格是有限元分析、计算流体力学、等几何分析及多物理场仿真的重要基础。然而，对于包含复杂特征的模型，自动生成与几何边界一致、拓扑有效且高质量的全六面体网格，仍是计算几何与计算机辅助工程领域长期未完全解决的问题[1]。扫掠法是工程六面体网格生成中应用广泛的一类方法。其基本思想是在源面上生成二维四边形网格，再沿给定方向、轨迹或参数映射将网格逐层传播到目标面，从而构造体六面体单元。对于拓扑简单、扫掠方向明确的扫掠体，其自动网格生成已较为成熟；但对于不能直接作为一个整体扫掠的复杂模型，需要将其分解为若干可扫掠体。

在现有的方法中，基于潜在局部扫掠方向的方法从边界几何中提取候选方向和相关面集，再构造可能的切割面[2]；Wu 等[3] 通过模糊聚类方法识别潜在可扫掠体。这些方法依赖预设形状假设、人工阈值和启发式规则，然而，对于复杂模型，规则数量和组合复杂度会迅速增加。此外，利用机器学习处理块分解的研究目前仍处于早期阶段。Zhang 等[4]将三维 B-rep 实体分解表示为树形马尔可夫决策过程，结合行为克隆与 Soft Actor-Critic 选择参考面和离散切割动作等，但该方法仍受到预定义动作库、长序列误差传播、准确性和模型复杂度等因素限制。

针对上述问题，本文将扫掠体块分解转化为实例分割的预测任务，并提出基于点云网络的全监督的 query-mask 多对多扫掠体分解网络，提高了扫掠体分解的泛化能力和准确性。

1　问题描述和研究方法

本文的原始输入是边界表示（boundary representation，B-rep）的模型。设输入模型为$M = (\mathcal{T}, \mathcal{G}, \tau_{\mathrm{cad}}), \Omega =$

$\Omega(M) \subset \mathbb{R}^3$，其中，$\mathcal{T}$表示各类实体之间的拓扑关系，$\mathcal{G}$表示曲线曲面等精确几何，$\tau_{\text{cad}}$表示几何容差；$\Omega$为闭实体；将 B-rep 模型进行体采样作为神经网络输入。输出是面集合$\mathbb{B} = \{B_k\}_{k=1}^{K}, 1 \le K \le K_{\max}$，其中$K$为扫掠体个数，$B_k$为第$k$个扫掠体包含的扫掠面。

网络以模型的体采样点云为输入，每个点以坐标、方向场和位置场作为主要特征。网络的架构如图 1 所示。首先采用 Point Transformer[5]提取多尺度点云特征，随后利用 Transformer 解码器（point query mask 网络）[6-7]预测每个 query 在点域上的整体、底面和侧面点掩码。再根据点和面关系，将点特征与点掩码聚合到面，通过 face query mask 网络直接预测出各个可扫掠块所包含的面集。

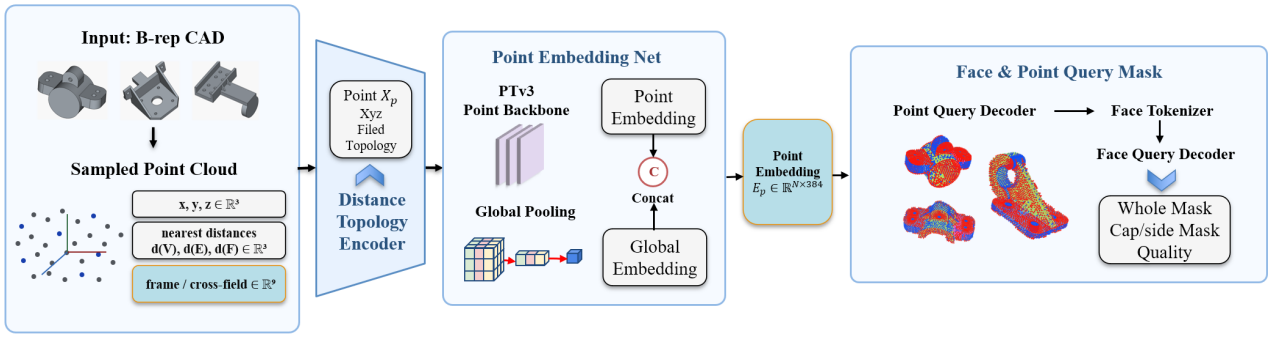


图 1 整体网络架构图

网络的总损失主要由 query mask 决定，定义为

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \lambda_{\text{mask}}\mathcal{L}_{\text{mask}} + \lambda_{\text{quality}}\mathcal{L}_{\text{quality}} + \lambda_{\text{exist}}\mathcal{L}_{\text{exist}} + \lambda_{\text{cap/side-dist}}\mathcal{L}_{\text{cap/side-dist}}$$

其中，$\mathcal{L}_{\text{mask}}$使用加权二元交叉熵与 Dice 损失联合监督 mask 掩码，衡量预测扫掠块与真实扫掠块在整体区域、底面区域和侧面区域上的差异；$\mathcal{L}_{\text{quality}}$衡量预测掩码与真实扫掠块掩码计算得到的 IoU，使质量较高的扫掠块候选获得更高的预测分数；$\mathcal{L}_{\text{exist}}$判断每个查询是否对应一个真实、有效的扫掠块，本质上是一个二分类损失；$\mathcal{L}_{\text{cap/side-dist}}$衡量预测距离与真实距离之间的差异。系数$\mathcal{L}$分别为控制各项损失的系数。

网络采用全监督方式进行训练，基于 Fusion 360 Gallery[8]和程序化构造的多扫掠模型建立监督数据集，包含 19,900+训练样本，2,200+验证样本和 100+独立测试样本。

2 实验与结论

在阶段性实验中，模型在验证集 （K=1-3，1 到 3 个扫掠体）等权平均下取得 84.39%的解码 IoU、89.49%的 Recall@0.50 和 81.14%的 Recall@0.75。

实测部分的模型分解结果如图 2 所示，其中在点 query mask 结果中，不同颜色代表不同的点的类型（底面/侧面）；在面 query mask 结果中，不同颜色代表分解出来的不同扫掠体所包含的面。由图中典型模型的分解结果可见，所提出网络能够在含孔、曲面及多特征等几何条件下有效识别潜在扫掠结构。点 Query Mask 较为准确地区分了各扫掠块的底面和侧面，面 Query Mask 进一步将离散点云的预测结果映射为边界

清晰、空间连续且与 CAD 拓扑面一致的扫掠块面集，实现了多个扫掠块之间的多对多预测。上述结果表明，基于方向场的点云特征与点/面的 Query-Mask 预测能够有效学习复杂 CAD 模型中的扫掠体实例结构，并用于后续的六面体网格生成生成。

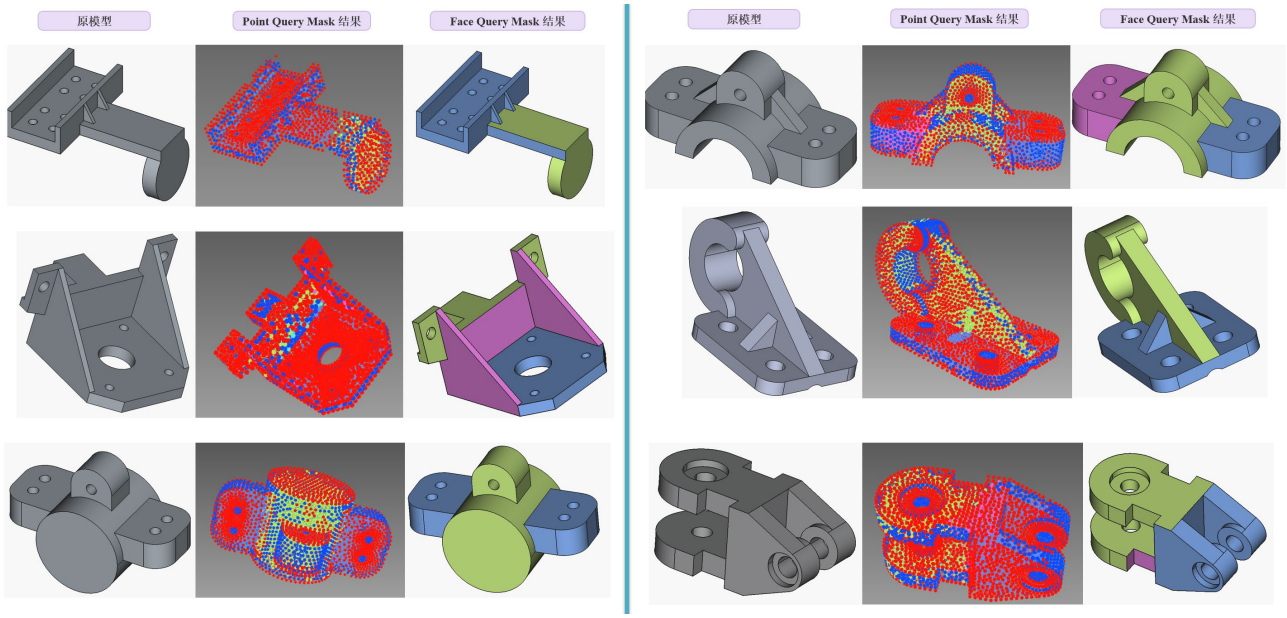


图 2 部分模型分解结果图

参考文献：

[1] PIETRONI N, CAMPEN M, SHEFFER A, et al. Hex-mesh generation and processing: A survey[J]. ACM Transactions on Graphics, 2023, 42(2): 1-44. DOI: 10.1145/3554920.

[2] WU H, GAO S. Automatic swept volume decomposition based on sweep directions extraction for hexahedral meshing[J]. Procedia Engineering, 2014, 82: 136-148. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.10.379.

[3] WU H, GAO S, WANG R, et al. Fuzzy clustering based pseudo-swept volume decomposition for hexahedral meshing[J]. Computer-Aided Design, 2018, 96: 42-58. DOI: 10.1016/j.cad.2017.10.001.

[4] ZHANG S, GUAN Z, WANG X, et al. Reinforcement learning based automatic block decomposition of solid models for hexahedral meshing[J]. Computer-Aided Design, 2025, 182: 103850. DOI: 10.1016/j.cad.2025.103850.

[5] WU X, JIANG L, WANG P S, et al. Point Transformer V3: Simpler, faster, stronger[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2024: 4840-4851.

[6] CARION N, MASSA F, SYNNAEVE G, et al. End-to-end object detection with transformers[C]//Computer Vision—ECCV 2020. Cham: Springer, 2020: 213-229. DOI: 10.1007/978-3-030-58452-8_13.

[7] CHENG B, MISRA I, SCHWING A G, et al. Masked-attention Mask Transformer for universal image segmentation[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2022: 1290-1299.

[8] WILLIS K D D, PU Y, LUO J, et al. Fusion 360 Gallery: A dataset and environment for programmatic CAD construction from human design sequences[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): Article 54. DOI: 10.1145/3450626.3459818.

基于几何与拓扑特征的复杂三角网格自适应细缝修复方法

顾博文，沈淑伟，肖周芳*

（杭州电子科技大学，杭州 310018）

摘　要：三角网格中的细缝一般由表面扫描、CAD 模型生成以及不同内核间的数据转换产生，可使体网格生成和表面重建等下游算法失败。现有基于体的方法可能损失小尺度几何特征，而主要依赖固定距离阈值的表面方法则容易在复杂细缝处发生模糊匹配。本文面向伪细缝、连通细缝和非连通细缝，提出一种结合局部几何与拓扑特征的表面细缝修复方法。该方法先以全局-局部自适应容差合并重复或坐标近似重合的顶点，再依据边界度检测与拆分孔洞；连通细缝由尖点和宽长比识别，非连通细缝由代理几何中心、Hausdorff 距离与面积相似度共同识别。对每个细缝一次性生成并优化真实顶点或虚拟顶点配对，同步收缩后判断是否存在局部短边。使用 Thingi10k 中 804 个含边界边的模型试验后，747 个模型的全部细缝被修复；122 个仅含细缝的模型修复后均成为水密模型，其中 121 个模型可由 TetGen 直接四面体化。对比不同方法修复结果显示，该方法能够在保持几何特征和多组件结构的同时获得无边界边、无非流形边的修复结果。本研究为复杂离散模型的细缝修复及后续体网格生成提供了有效、鲁棒的表面网格处理路径。

关键词：细缝检测，连通细缝，非连通细缝，细缝闭合，复杂细缝

0　引　　言

三角网格的两类主要来源是对象的表面扫描[1]和 CAD 模型的表面网格生成[2][3]。不同的 CAD 内核采用的容差不同，加之模型数据转换，细缝在 CAD 及其离散表面中频繁出现，这会导致 TetGen 体网格生成或 Poisson 表面重建等下游算法失败。与相交和孔洞修复算法相比，复杂细缝的自动修复研究较少。关键困难在于：细缝既具有“狭窄孔洞”的几何特点，又可能包含边界交叉、多孔洞相互对应或顶点近似重合等拓扑特征。如果只凭借空间距离和单一阈值进行逐步缝合，容易把不同边界错误合并，如果直接补面可能增加自相交和退化面。

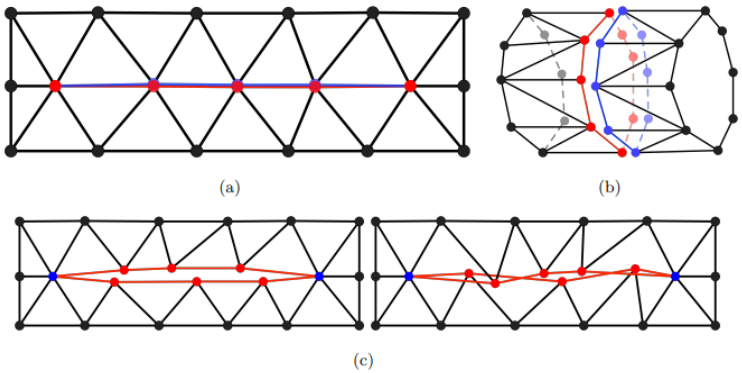


图 1 细缝的三种类型。（a）伪细缝；（b）连通细缝；（c）非连通细缝

研究的目标不是统一消除所有网格缺陷，而是针对细缝建立可解释的分类、检测和修复流程。依据几何与拓扑特征，如图 1 所示，细缝被定义为三类：伪细缝是由重复或近似重合顶点造成，面积接近于

零；连通细缝是边界顶点相互连通的狭长孔洞，通常至少包含两个内角接近于零的凸尖点；非连通细缝由两个拓扑不连通、空间位置接近且形状相似的孔洞组成。以上分类使不同缺陷在修复前得到针对性处理，也把真正的孔洞的细缝区分开来。

1 方法概述

算法首先将仅被一个三角面共享的边定义为边界边，其端点为边界顶点。定义边界边集合 E，边界顶点 v 的边界度 D(v,E)为 E 中与 v 相邻的边数，所有顶点边界度均为 2 的是简单孔洞，最大边界度大于 2 的是复杂孔洞，存在最小边界度为 1 的是脏孔洞。算法使用并查集和 flood-filling[4]按拓扑连通性聚类边界边，随后对复杂孔洞机进行分割，对于简单脏孔洞将被丢弃，而复杂脏孔洞先分割再丢弃简单脏孔洞。

为消除面积接近零的伪细缝，并降低复杂边界的拓扑复杂度，算法采用全局-局部顶点合并。全局阈值在实验中取 10^{-5}，且应小于输入模型最短边长，以免删除孔洞附近的小特征。全局合并后重新检测和分割孔洞；对每个简单孔洞，局部阈值取该孔洞最短边长的 1/4。距离小于该阈值、但不由同一条边直接连接的顶点被合并，从而避免边折叠使孔洞拓扑反而复杂化。

连通细缝被视为极狭长的简单孔洞。内角小于 $\pi/6$ 的顶点定义为凸尖点，内角大于 $11\pi/6$ 的顶点定义为凹尖点，尖点将边界分成若干边的组合。每个边界顶点到其不所属边的组合的最小投影距离为该点宽度，孔洞宽度取所有点宽度的最大值，长度取周长的一半；宽长比小于 0.2 时判为连通细缝。若孔洞缺少可用于分组的尖点，则以 ear-clipping[5]方法对空洞进行三角剖分，计算三角形面积和作为孔洞面积，面积除以周长来近似孔洞宽度。

未被判断为连通细缝的简单孔洞继续进行非连通细缝检测。孔洞边界顶点的几何中心作为代理几何中心；两个中心的距离小于模型包围盒对角线的 0.03 倍时视为空间邻近。对于邻近孔洞，若 Hausdorff 距离小于孔洞平均边长的 0.5 倍，则形成非连通细缝的候选；当一个孔洞可以匹配多个候选时，选择面积相似度最大的孔洞配对，面积相似度为两个孔洞面积最小值与最大值的比值。空间位置、边界形状与面积大小的联合约束降低了仅靠距离产生错误候选的概率。

细缝修复采用非迭代的顶点配对与收缩。算法先为除凸尖点外的每个边界顶点寻找 stitching vertex，再同步处理全部配对。候选边必须位于顶点的垂直投影域内，边参数域以 $\varepsilon=0.05$ 扩展；投影距离阈值自适应为细缝平均边长的 2 倍。投影点距边的端点小于孔洞平均边长的 1/100 时生成真实顶点对进行配对，否则在边上创建虚拟顶点。配对经过去重和交叉检测，交叉对则依据边界拓扑距离交换端点，以避免非流形单元的产生。收缩时，虚拟顶点移至原始边界顶点，两个同源顶点则移至中点；最后折叠短于细缝平均边长 0.15 倍的局部边。修复后若检测到新的自相交，则撤销该次操作。

2 实验结果分析

实验在 3.2 GHz CPU、16 GB 内存的个人计算机上完成，从 Thingi10k 选取 804 个含边界边的离散模型。模型可同时包含细缝、孔洞或孤立单元，但算法仅处理细缝。修复后再次运行细缝检测，结果表明 747 个模型中已无细缝；对于其余 57 个模型虽然检测出细缝，但它们上是由于实际为特殊几何结构而被误认为是细缝。例如孤立狭长三角形，由于其边界边之间已有三角形连接，细缝修复阶段会拒绝这种细缝。

表 1 展示了五个不同规模尺度的离散模型修复所花费的时间。804 个模型中边界边最多的 No.338910 模型包含 112,320 条自由边界边和 1,538 个非连通细缝，顶点合并、细缝检测和细缝闭合分别耗时 15.02、46.09 和 0.31 s，总耗时 61.42 s，其中细缝检测时间约占总时间的 75%，这是因为它有大量的孔洞，这些孔洞中的大多数可以与另一个孔洞形成非连通细缝。因此，在非连通细缝检测步骤中，耗时较长。其余模型的细缝检测耗时均在 3.5 s 内。804 个模型中仅含细缝缺陷的 122 个模型在修复后，均无法检测到边界边；TetGen 对其中 121 个模型成功生成四面体网格，剩余一个因原始表面质量较差而失败，经各向同性重网格化操作后生成成功。

表 1 不同规格模型的时间消耗

模型	顶点合并（s）	细缝检测(s)	细缝缝合（s）	总时间（s）	边界边数
No. 338910	15.02	46.09	0.31	61.42	112,320
No. 1041419	0.77	3.24	0.24	4.25	26,567
No. 317215	0.15	1.60	0.04	1.79	13,292
No. 42817	0.03	0.07	0.01	0.11	4,477
No. 1088139	0.019	0.15	0.04	0.28	1,196

由多个组件组成的 No.37653 模型同时包含连通和非连通细缝，输入含 35,444 个顶点、68,988 个三角面片和 2,132 条边界边。本文方法耗时 0.18 s，输出 35,104 个顶点和 70,208 个三角面片，边界边与非流形边均为 0，Hausdorff 距离为 8.18×10^{-2}，Hausdorff 距离越小则说明两个网格之间的点集越接近，两个网格的形状越相似，最小和最大投影距离分别为 0 与 1.84×10^{-3}，投影距离越小则说明网格产生的形变越小。为了证明方法的优势，将方法与 MeshFix[6]、MeshLab[7]等方法进行对比。MeshFix 修复结果仅保留面片数量最多的组件；MeshLab 的结果仍有 1,113 条边界边并引入 58 条非流形边；TetWild[8]使用的方法引入 293 条非流形边，且修复后的网格偏移较大；CGAL[9]和 MeshProcess 无法在 1 h 的限时内完成。

另一复杂模型初始含 7,495 条边界边，并同时具有大量细缝和若干真正孔洞。MeshFix 删除大量三

角面片，MeshLab 修复后仍有 3,657 条自由边界边，TetWild 未生成正确网格，CGAL 与 MeshProcess 方法失败。本文方法修复了模型全部细缝，但因不处理孔洞，仍保了 774 条边界边，经过简单 ear-cutting 填充孔洞后，可由 TetGen 生成四面体网格。

3 结　论

研究表明，将网格的几何特征与拓扑特征结合起来修复细缝，比现有的仅利用几何信息修复的方法更加鲁棒。全局-局部顶点合并先消除伪细缝并简化边界，连通以及非连通细缝的分类为不同拓扑建立相应匹配，一次性生成、优化并同步收缩全部顶点对则兼顾了细缝闭合和几何保持。大规模数据集实验、下游体网格生成验证和多方法对比共同支持该方法的有效性、鲁棒性与效率。研究为 CAD 离散模型、扫描表面和工程仿真模型提供直接作用于表面三角网格的复杂细缝修复方法，并提高体网格生成等后续处理的输入可靠性。

当前方法仍有三项局限：连通细缝检测适用于带凸尖点的细缝，无凸尖点时以面积和周长估计宽度，对复杂孔洞可能不准确；作为基于表面的方法，算法不能完全保证不与其他面片产生新的自相交，目前依靠闭合后检测并撤销来避免自相交；算法还依赖若干用户参数，尽管给出了建议值，特定模型仍可能需要调整。因此，无凸尖点复杂细缝的准确识别、参数依赖的降低及全局自相交处理仍是后续研究方向。

参 考 文 献:

[1] Bernardini F, Rushmeier H. The 3D model acquisition pipeline. In: Computer graphics forum. Vol. 21, Wiley Online Library; 2002, p. 149 – 72, no. 2.

[2] George PL, Seveno É. The advancing-front mesh generation method revisited. Internat J Numer Methods Engrg 1994;37(21):3605 – 19.

[3] Watson DF. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. Comput J 1981;24(2):167 – 72.

[4] Burtsev S, Kuzmin YP. An efficient flood-filling algorithm. Comput Graph 1993;17(5):549 – 61.

[5] Mei G, Tipper JC, Xu N. Ear-clipping based algorithms of generating high-quality polygon triangulation. In: Proceedings of the 2012 international conference on information technology and software engineering: software engineering & digital media technology. Springer; 2013, p. 979 – 88.

[6] Attene M. A lightweight approach to repairing digitized polygon meshes. Vis Comput 2010;26:1393 – 406.

[7] Cignoni P, Callieri M, Corsini M, Dellepiane M, Ganovelli F, Ranzuglia G, et al. Meshlab: an open-source mesh processing tool. In: Eurographics Italian chapter conference. Vol. 2008, Salerno, Italy; 2008, p. 129 – 36.

[8] Hu Y, Zhou Q, Gao X, Jacobson A, Zorin D, Panozzo D. Tetrahedral meshing in the wild. ACM Trans Graph 2018;37(4):60.

[9] CGAL(v56). CGAL user and reference manual. 5th ed.. CGAL Editorial Board; 2023, [Online]. Available: https://doc.cgal.org/5.6/Manual/packages.html.

体分解后扫掠顺序规划与六面体网格生成方法研究

李　骞

（中国久远高新技术装备有限公司，北京 100089）

摘　要：六面体网格具有计算精度高、收敛性能好等优势，在大变形、接触等复杂有限元分析中具有重要应用价值。对于复杂模型，六面体网格通常采用扫掠法生成，但模型经过体分解后，子区域之间存在边界匹配约束及扫掠顺序依赖关系，传统方法对人工操作依赖较大，通常需要人工确定体分解后子区域的扫掠顺序；同时，对于复杂的压印约束，往往需要进一步对模型进行体分解，限制了复杂模型扫掠六面体网格生成的自动化程度。针对上述问题，本研究面向体分解后的多子区域模型，研究多子区域扫掠顺序自动规划方法以及考虑压印约束的六面体网格生成方法，以提高复杂模型六面体网格生成的自动化程度。

关键词：六面体网格；扫掠法；扫掠顺序规划；压印约束

0 引　言

随着计算机辅助工程技术的发展，数值模拟已成为科学研究和工程设计中的重要工具，而网格生成是数值模拟过程中的重要基础[1]。在三维有限元分析中，常用的体网格单元主要包括四面体单元和六面体单元[2]。相比四面体网格，六面体网格在数值稳定性、计算精度和计算效率等方面具有明显优势，在航空航天、汽车、船舶及能源等领域得到了广泛应用[3]。然而，六面体网格的生成难度较高，一直是网格生成领域的研究重点[4]。

在目前众多的六面体网格生成方法中，扫掠法具有生成效率高、网格质量好、工程适用性强等特点，已成为目前六面体网格生成中应用最为广泛的方法之一。应用扫掠法首先需要将复杂模型分解为多个可扫掠子区域。但是，在实际的工程应用中，即使是处理体分解后的模型，扫掠法仍然存在自动化程度不足、过度依赖用户交互等问题。为了提高扫掠六面体网格生成的自动化程度，本研究以已完成体分解的实际工程模型为研究对象，围绕分解后含压印组合面的子区域在六面体网格生成过程中所面临的关键问题展开研究，形成了一套完整的面向复杂工程模型的扫掠六面体网格生成方法。

1　问题描述

目前，模型的体分解过程在商业软件中主要依赖人工构建分割面完成模型分解，如图 1 所示，该过程对用户的工程经验与操作能力要求较高。然而，即使是完成分解后的模型，在商业软件中使用扫掠法进行六面体网格生成仍然是一个非常耗时的过程，主要面临以下挑战：

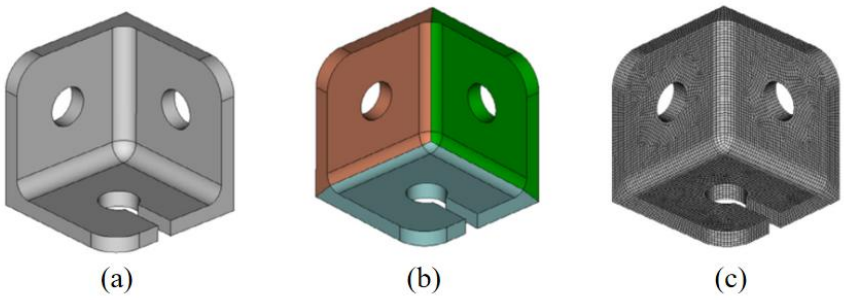


图 1 复杂模型中应用扫掠法生成六面体网格的主要过程[5]：(a) 原始模型；(b) 分解后的模型；(c) 分解后扫掠生成的网格

（1）挑战一：对于分解后的模型，为保证相邻子区域能够生成边界一致的六面体网格，通常需要对相邻边界进行压印处理，如图 2 所示。然而，由于压印约束会改变原有扫掠体的几何结构与拓扑连接关系，目前商业软件中对于压印后的模型常常难以直接应用扫掠法，如图 3 所示，此时需要在压印区域进一步进行模型分解，从而增加了额外的人工干预成本。

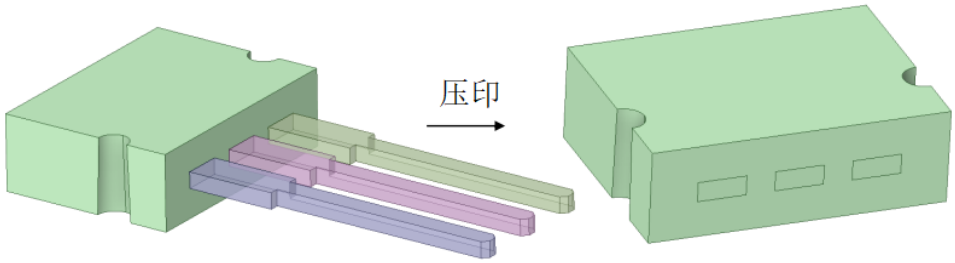


图 2 压印示意图

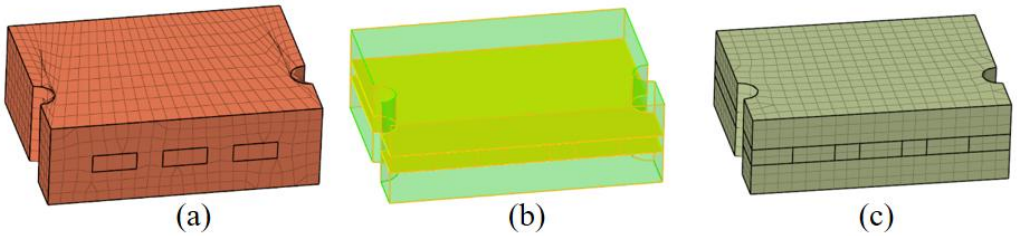


图 3 在 HyperMesh 中对压印后的模型应用扫掠法：(a) 自动扫掠网格生成失败；(b) 在压印区域进行进一步分解（黄色面为分解面）；(c) 分解后可以扫掠生成网格

（2）挑战二：在复杂模型整体扫掠过程中，分解后得到的子区域之间通常存在扫掠顺序依赖关系。目前，主流商业软件对人工依赖较强，常常需要人工指定扫掠源面以及确定子区域的扫掠顺序，扫掠约束在不同子区域间传递时容易产生冲突，进而导致网格生成失败，需要不断调整扫掠顺序并重新生成网格，存在操作复杂、耗时较长等问题。

由于仿真分析中模型的多样性，模型的分解本身就具有很高复杂性，目前仍难以通过自动方法稳定解决。因此，本研究以已经完成体分解的模型为研究对象，重点研究压印约束条件下边界一致六面体网格的自动生成问题，以及复杂模型中子区域扫掠顺序的自动规划问题，即上文挑战一和挑战二，以提高

扫掠法生成六面体网格的自动化程度。

2 结　论

本研究面向分解后的多子区域模型，针对压印边界约束下传统扫掠法难以直接生成六面体网格的问题，研究了考虑压印约束的扫掠网格生成方法。通过对压印形成的复杂边界的网格生成进行协调处理，增强扫掠法对分解及压印后模型的适应能力，实现了压印约束下多子区域模型六面体网格的生成。

在此基础上，进一步针对多子区域扫掠过程中存在的顺序依赖问题，结合子区域的拓扑连接关系与扫掠约束，研究了多子区域扫掠顺序自动规划方法，通过将复杂的扫掠依赖关系转化为有向无环拓扑邻接图的数学模型，实现了子区域扫掠顺序的自动规划，减少了人工干预，提高了复杂模型六面体网格生成的自动化程度。如图 4 展示了部分典型模型在体分解后自动扫掠生成的边界一致的六面体网格。

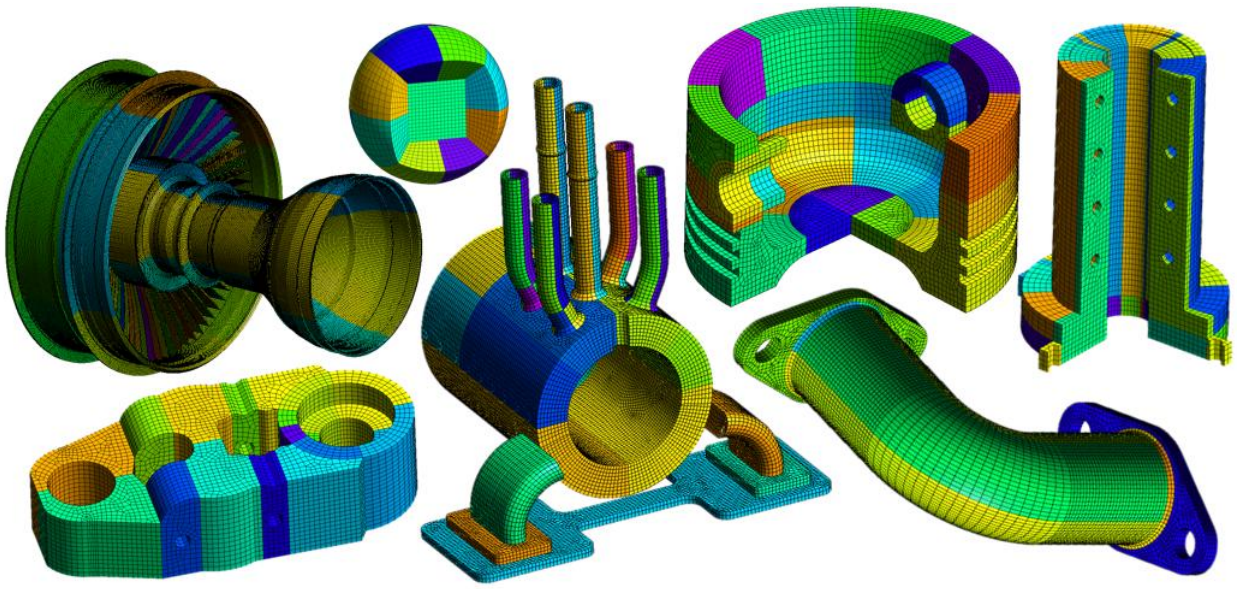


图 4 边界一致的六面体网格生成结果

参 考 文 献:

[1] Pietroni N, Campen M, Sheffer A, et al. Hex-mesh generation and processing: a survey[J]. ACM transactions on graphics, 2022,42(2): 1-44.

[2] 王瑞, 高曙明, 吴海燕. 六面体网格生成和优化研究进展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020,32(5): 693-708.

[3] Schneider T, Hu Y, Gao X, et al. A large-scale comparison of tetrahedral and hexahedral elements for solving elliptic PDEs with the finite element method[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2022,41(3): 1-14.

[4] 雷娜, 冯宇豪, 段君毅, 等. 有限元网格生成方法综述[J]. 电子科技大学学报, 2024,53(06): 816-843.

[5] Lu J H, Quadros W R, Shimada K. Evaluation of user-guided semi-automatic decomposition tool for hexahedral mesh generation[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2017,4(4): 330-338.

Adaptive Cartesian Mesh Generation Based on Distance Field

Yuefan Hu[a], Honglei Bai[a], Chunguang Xu[a], Huaibao Zhang[a,*]

[a]*School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518000, China*

Abstract

A novel distance-field-driven framework for adaptive Cartesian mesh generation is presented. The proposed framework employs distance field as a unified geometric descriptor to guide the entire mesh generation process, including uniform refinement, feature-aware refinement, and body-fitted mesh construction. Unsigned distance field is used in the uniform and feature-aware refinement stages, enabling a seamless transition from global refinement to geometry-aware local adaptation. The mesh refinement strategy adopts cell-independent operations, eliminating the need for dynamic maintenance of topological relationships and facilitating parallel computation. For body-fitted mesh construction, the cut-cell method is adopted. Signed distance field is introduced, and a parallel Marching Cubes algorithm is developed to efficiently extract zero-level isosurfaces, facilitating robust cut-cell treatment and accurate boundary representation. Benefiting from the smooth variation of distance field, the proposed framework naturally achieves graded mesh transitions across refinement levels. Numerical experiments demonstrate that the proposed method achieves high mesh generation performance compared with traditional methods, and further validate its robustness and suitability for large-scale engineering applications.

Keywords: cartesian mesh generation; marching cubes; distance field; zero isosurface; parallel algorithm

1. Introduction

Mesh generation is a critical step in numerical simulations, including the finite element method [1], finite volume method [2], and finite difference method [3]. Mesh types can be broadly classified into structured meshes [4, 5], unstructured meshes [6, 7], and Cartesian meshes [8, 9]. Among these, both structured and unstructured meshes are body-fitted, typically generated by propagating from the model surface to the surrounding computational domain. However, engineering models frequently suffer from dirty geometry issues, such as non-manifold edges, overlapping surfaces, and gaps [10, 11]. These defects significantly hinder the automatic generation of watertight surface meshes [12, 13], thereby necessitating geometry cleanup and optimization to improve mesh quality [14, 15]. In contrast, Cartesian mesh generation adopts a strategy that proceeds from the background grid toward the model surface, effectively mitigating the impact of dirty geometry while enabling a high degree of automation. Additionally, Cartesian meshes offer notable advantages,

*Corresponding author.

Email addresses: hyfgrid@163.com (Yuefan Hu), baihlei3@mail.sysu.edu.cn (Honglei Bai), xuchg5@mail.sysu.edu.cn (Chunguang Xu), zhanghb28@mail.sysu.edu.cn (Huaibao Zhang)

including high computational efficiency, straightforward parallelization, and convenient implementation of high-order schemes [16, 17, 18]. Consequently, Cartesian meshes have been widely applied in engineering practice [19].

The conventional adaptive Cartesian mesh generation process is illustrated in Fig. 1(a), while Fig. 1(b) demonstrates the practical performance of this algorithm using the DLR-F6 benchmark case [20, 21]. Within this algorithmic workflow, the cell refinement criterion identifies cells intersecting the geometry surface and recursively refines these intersected cells until a predefined level is reached. Consequently, mesh generation involves numerous geometric queries and Boolean operations. Various algorithms have been developed to accelerate these operations and applied to Cartesian mesh generation [22, 23, 24, 25]. Common spatial search structures include alternating digital trees (ADT), k-d trees, and bounding volume hierarchies (BVH). Bonet and Peraire [26] introduced the ADT for 3D geometric searches and intersection tests. Subsequent studies improved k-d tree construction efficiency and parallelization [27, 28], investigated its performance in nearest neighbor search and high-dimensional spaces [29], and enhanced BVH construction and storage efficiency through GPU-based methods and neural representations [30, 31, 32]. Partitioned parallel algorithms have also been proposed [33, 34]. Despite these advances, frequent geometric queries and intersection tests remain major bottlenecks in large-scale mesh generation.

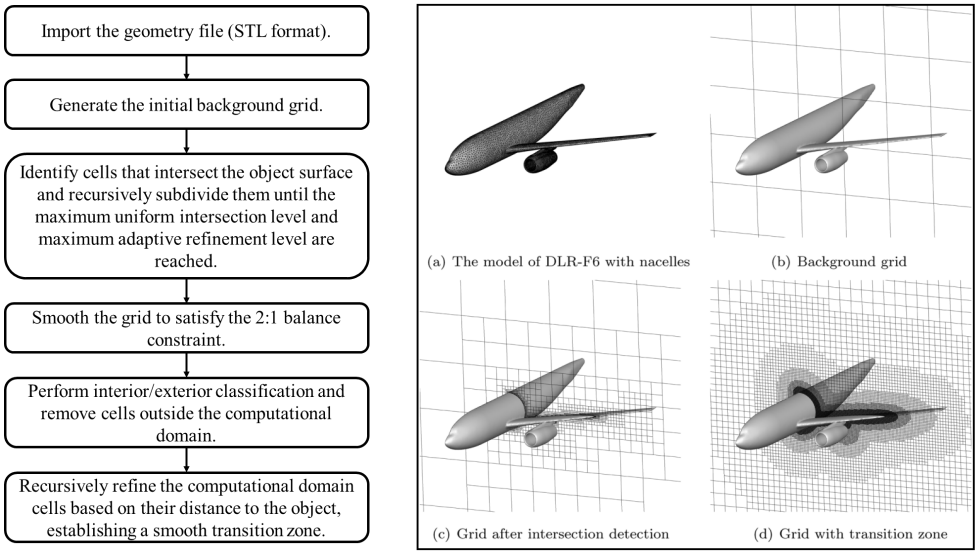


Fig. 1: (a) Traditional adaptive Cartesian mesh generation algorithm; (b) grid evolution during the mesh generation process of the DLR-F6 model.[21]

Several methods have been developed for generating body-fitted Cartesian meshes, including the hybrid mesh method [35, 36], the immersed boundary method (IBM) [37, 38], and the cut-cell method [39, 40]. The cut-cell method is adopted in this study. Conventionally, intersected Cartesian cells are cut to conform

to the underlying geometry. However, for complex geometries, this method suffers from low computational efficiency due to the high cost of intersection detection and limited robustness, as overlapping surfaces and geometric gaps may cause inaccurate cutting results and require additional corrections. Consequently, its performance is highly sensitive to geometric complexity [41].

To address the limitations of existing Cartesian mesh generation methods, a distance-field-driven adaptive framework is developed, using the distance field (DF) as a unified scalar representation of geometry. By storing the minimum distance from each point to the surface, the DF compactly represents complex geometries without explicitly tracking surface connectivity. Its continuous distance property, well-defined isosurfaces, and smooth gradients [42] support uniform refinement, feature-aware refinement, and body-fitted mesh construction. The framework employs unsigned distance fields (UDFs) for uniform and feature-aware refinement, avoiding explicit intersection calculations and reducing Boolean operations. Independent cell subdivision also facilitates parallelization. Meanwhile, signed distance fields (SDFs), which distinguish inside and outside regions by the sign of the distance, are constructed for domain classification and body-fitted mesh generation. A parallel Marching Cubes algorithm extracts the SDF zero isosurface to identify cut cells and construct body-fitted meshes for complex or imperfect geometries. The main contributions of the present work can be summarized as follows:

- A distance-field-driven adaptive Cartesian mesh generation framework is proposed, in which the key stages of the mesh generation process are completed under the guidance of a unified distance field.
- A distance-field-driven refinement strategy that avoids explicit geometric intersections and reduces Boolean operations, while enabling independent refinement of individual cells, eliminating explicit topological dependencies and domain decomposition constraints.
- An efficient cut-cell treatment based on a parallel Marching Cubes algorithm is developed for body-fitted mesh generation of complex geometries.
- Numerical validation demonstrating the efficiency and applicability of the proposed framework to large-scale engineering problems.

The remainder of this paper is organized as follows. Section 2 presents an overview of the proposed method. Section 3 describes its implementation in detail. Section 4 demonstrates the overall performance of the method through a series of computational examples across multiple scenarios. Finally, Section 5 concludes the paper and outlines directions for future work.

2. Framework of the Proposed Method

Conventional Cartesian mesh generation methods typically rely on geometric intersection tests for both mesh refinement and cut-cell processing. Such approaches often incur significant computational cost due to extensive geometric queries and Boolean operations. In contrast, the present framework introduces the DF

as a unified driving mechanism, restricting explicit geometric intersection operations to a minimal cell classification stage. As a result, the overall computational burden is shifted from expensive Boolean operations to distance field evaluations, which are considerably more efficient [43].

Within the proposed framework, the UDF serves as the sole refinement indicator for mesh refinement. The refinement procedure is organized into two successive stages. First, a uniform refinement is applied to intersecting layers identified by the UDF, ensuring a consistent baseline resolution near geometric boundaries. Second, a feature-aware adaptive refinement is performed in regions of geometric complexity, enabling enhanced local resolution while maintaining control over the overall mesh size. Following mesh refinement, domain classification is performed, and the SDF is constructed simultaneously. The cut-cell method is then employed for body-fitted mesh generation. The zero isosurface of the SDF is extracted using the parallel Marching Cubes algorithm to identify and process cut cells, thereby generating a body-fitted mesh. All stages of the algorithm are designed for parallel execution using Intel Threading Building Blocks (TBB), ensuring high scalability and efficiency.

The overall procedure of the proposed framework can be summarized as shown in Fig.2.

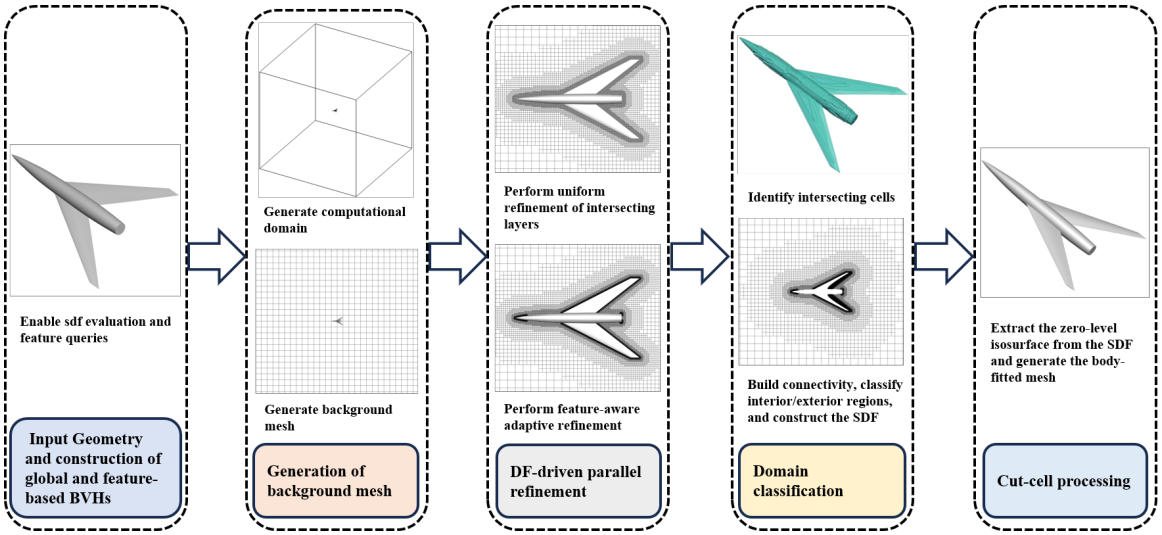


Fig. 2: Algorithm flowchart of the proposed mesh generation framework

3. Algorithmic Details of the Framework

3.1. Acceleration Structures for DF Evaluation

The proposed method takes STL-format geometry as input. Various spatial data structures have been developed to improve query efficiency. Among these, BVH has gained particular popularity due to its robust performance, ease of construction, and natural support for dynamic scenes. In this work, we adopt a BVH-based acceleration scheme to enable fast and reliable geometric queries. The BVH construction process is shown in Fig. 3. Specifically, the open-source library FCPW [44] is employed to construct the acceleration

structure, which provides efficient support for nearest point queries, distance evaluation, and ray–surface intersection tests.

This geometry acceleration structure, realized as a BVH built for the model, provides essential support for uniform refinement, feature-aware adaptive refinement, and domain classification. Geometric features of the model primarily include regions of high curvature, sharp corners, and edges. Adaptive mesh refinement based on geometric features in these regions can significantly improve the accuracy of numerical simulations while effectively controlling the overall mesh size. To this end, geometric model features are first automatically identified and labeled. A feature-based acceleration structure, constructed solely for the feature regions, is then established to support feature-aware adaptive refinement. For uniform refinement, an acceleration structure is constructed for the entire model. In addition, the proposed method allows user-defined feature regions. Based on engineering considerations, users can specify regions requiring refinement and construct corresponding feature-based acceleration structures, thereby enabling targeted control and further optimization of the adaptive mesh refinement process. During the domain classification process, the BVH acceleration structure is utilized to efficiently locate candidate cells that may intersect with the geometry, followed by exact geometric intersection tests to identify the true intersecting cells.

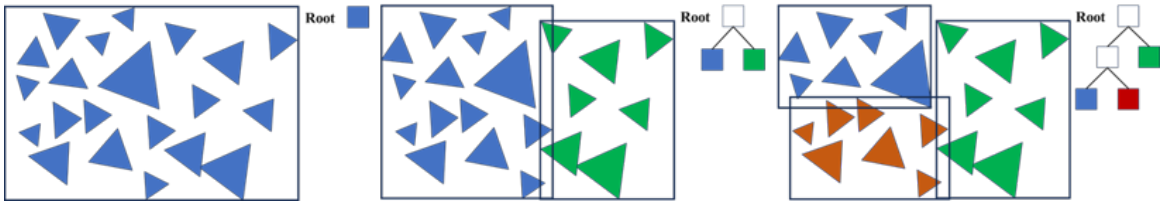


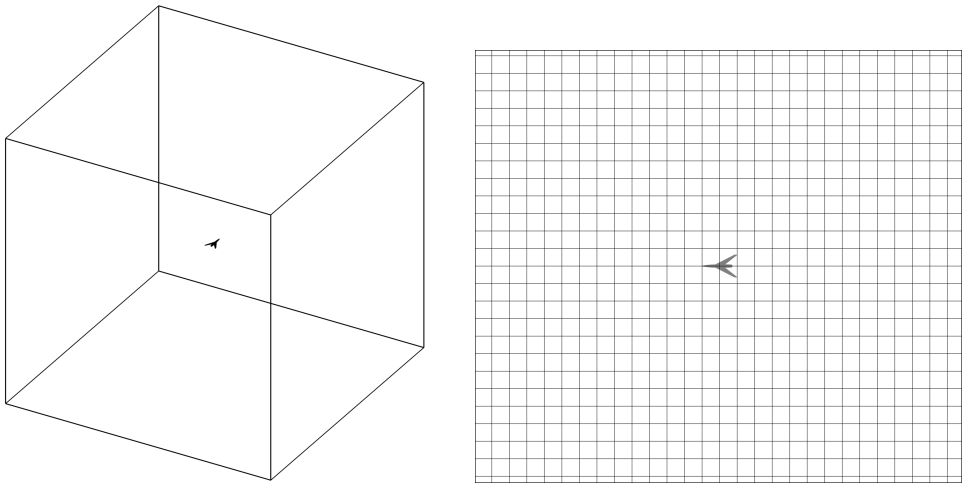
Fig. 3: BVH construction.

3.2. Background Cartesian Mesh Initialization

The far-field boundary of the computational domain is defined according to the maximum extent of the model bounding box. A parameter $m_{\text{far_scale}}$ is introduced to control the size of the computational domain, where the far-field boundary is set as $m_{\text{far_scale}}$ times the maximum extent of the model bounding box. This parameter can be adjusted according to the actual computational requirements. After determining the computational domain, a uniform Cartesian background mesh is constructed with an initial refinement level L_0, providing a consistent baseline resolution for subsequent mesh refinement. Here, L_0 denotes the number of background mesh layers. These parameters remain adjustable and can be tuned depending on specific problem requirements. Fig. 4 presents the computational domain with $m_{\text{far_scale}} = 8$ and the corresponding background mesh with $L_0 = 4$ for an aircraft configuration.

3.3. DF-Driven Adaptive Mesh Refinement

During mesh refinement, the subdivision criterion is defined solely based on the DF evaluated at cell centers. Cells satisfying a level-dependent DF threshold are recursively subdivided, resulting in a simple



(a) (b)

Fig. 4: (a) Computational domain and (b) corresponding uniform Cartesian background mesh for the aircraft model.

and inherently local refinement strategy that is well suited for parallel execution. Since subdivision decisions are made independently for each cell, no explicit topological relationships or inter-cell data dependencies are required during the refinement stage, leading to minimal synchronization overhead. In the subsequent global assembly phase, such as mesh point merging and indexing, limited synchronization is introduced to ensure consistency. Nevertheless, the method maintains high parallel efficiency due to the dominance of the cell-local refinement process. The parallel implementation is based on Intel TBB.

3.3.1. Distance Field

The SDF is an implicit geometric representation based on a scalar field [45]. Its fundamental principle is as follows: for any point $\mathbf{x}$ in the computational domain, a function $\phi(\mathbf{x})$ is defined as the shortest Euclidean distance from $\mathbf{x}$ to the nearest boundary, with the sign indicating whether the point lies inside or outside the domain. A key advantage of the SDF lies in its decoupling from the underlying geometric model, which provides enhanced numerical stability and robustness. These properties make it particularly well suited for representing complex geometric boundaries [46]. The mathematical formulation is given as follows:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\min\limits_{\mathbf{y}\in\partial\Omega} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, & \mathbf{x}\in\Omega, \\ \\ \min\limits_{\mathbf{y}\in\partial\Omega} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, & \mathbf{x}\notin\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

The UDF and SDF share the same distance metric, while the SDF additionally incorporates a sign function to distinguish the spatial relationship with the geometry. Since mesh refinement only requires the magnitude of the geometric distance, the UDF is employed to drive uniform and feature-aware refinements. In contrast, the SDF is constructed during domain classification to provide inside/outside information for cut-cell treatment and body-fitted mesh generation. The UDF provides a continuous geometric metric that

establishes a direct relationship between geometric proximity and mesh resolution requirements. For a given point $\mathbf{x}$, the distance field $\phi(\mathbf{x})$ represents the minimum distance to the geometric boundary. Therefore, regions with smaller distance values indicate closer proximity to the geometry and require higher mesh resolution, while regions with larger distance values can be represented using coarser cells.

Based on this property, the refinement level of each Cartesian cell can be determined directly according to the distance value. Specifically, a hierarchical refinement criterion is defined by associating the distance threshold with the cell size at each refinement level:

$$\phi(\mathbf{x}) < d_l, \tag{2}$$

where d_l denotes the distance threshold corresponding to the l-th refinement level. When the distance value of a cell satisfies the refinement criterion, the cell is subdivided into finer cells; otherwise, the current refinement level is maintained. Consequently, the distance field converts geometric information into a continuous spatial refinement metric, enabling automatic determination of mesh resolution without explicitly relying on geometric topology or complex intersection operations.

Furthermore, the transition behavior between different refinement levels can be flexibly controlled by adjusting the growth rate of the distance threshold. Assuming that the threshold between adjacent refinement levels follows:

$$d_{l+1} = \alpha d_l, \tag{3}$$

where α is the threshold growth factor. A larger α produces a slower variation of refinement levels and a wider transition region, resulting in a smoother mesh-size variation. Conversely, a smaller α leads to a faster transition from fine to coarse regions and a more compact refinement zone. Therefore, the proposed distance-field-driven strategy provides an effective mechanism for controlling not only the local mesh resolution but also the spatial distribution and transition rate of adaptive refinement.

Fig. 5 illustrates the UDF of the aircraft model. It can be observed that the UDF exhibits smooth gradients and a well-defined hierarchical structure. The resulting adaptive mesh demonstrates smooth and continuous spatial variation. Fig. 5 further demonstrates the effects of different values of α on Cartesian mesh refinement.

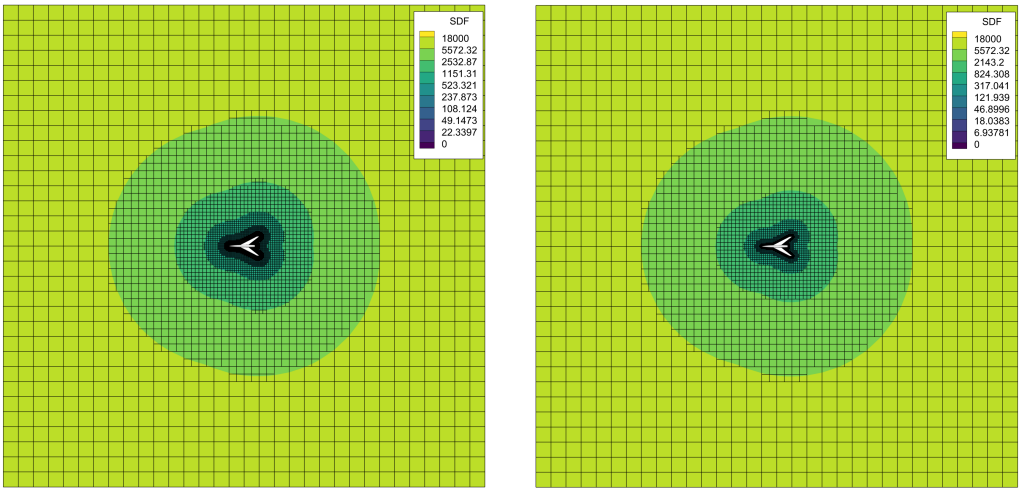
3.3.2. Grid 2:1 Balance

A 2:1 balance constraint is enforced on adjacent Cartesian grid cells, i.e.,

$$\max\left(l_i - l_j\right) \leq 1, \quad \forall \text{cells } i \text{ and } j \text{ that share a face}, \tag{4}$$

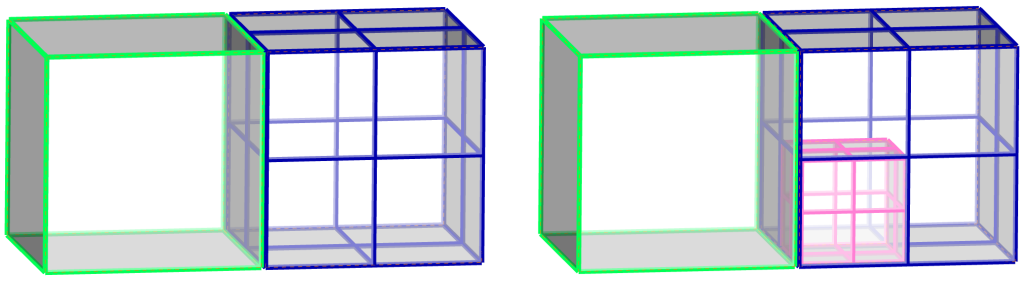
where l denotes the refinement level of a cell. This corresponds to a maximum size ratio of $2:1$ between neighboring cells, as shown in Fig. 6. This constraint is introduced to manage algorithmic complexity and computational cost while preserving numerical accuracy and stability.

The UDF naturally provides a mechanism for achieving the 2:1 balance constraint by controlling the spatial variation of refinement levels. Assuming cells C_i and C_j are transition cells, the key to preventing



(a) (b)

Fig. 5: Adaptive mesh refinement controlled by different UDF threshold growth rates: (a) growth rate 1.1; (b) growth rate 1.3.



(a) (b)

Fig. 6: The level difference between adjacent Cartesian cells must comply with the 2:1 balance constraint: (a) valid configuration; (b) invalid configuration that requires mesh balancing.

level jumps between them lies in ensuring that adjacent cells undergo optimization at most once. Specifically, the optimization threshold at the respective levels of the two cells requires that $|d_{l_i} - d_{l_j}|$ be greater than twice the cell size of $\max(C_i, C_j)$. Specifically, the optimization threshold at the respective levels of the two cells requires that $|d_{l_i} - d_{l_j}|$ be greater than twice the cell size of $\max(C_i, C_j)$, ensuring that no intermediate optimization level exists between C_i and C_j. Consequently, the difference in refinement levels between neighboring cells is naturally constrained, ensuring:

$$|l_i - l_j| \leq 1.$$

3.3.3. Uniform Refinement

The number of uniform refinement layers is introduced to define the uniform refinement depth of the Cartesian mesh, which represents the number of additional subdivision levels applied beyond the background mesh. For each Cartesian cell, the refinement decision is determined by comparing its distance value with the threshold associated with the current refinement layer. Specifically, a cell is subdivided when the evaluated distance satisfies the criterion of the corresponding layer. After completing one refinement layer, the distance threshold is updated according to the prescribed mesh growth rate to determine the refinement region for the next layer. This recursive procedure continues until the specified number of uniform refinement layers is reached, after which the uniform refinement stage is terminated. During the uniform refinement process, the distance evaluation is accelerated using a BVH constructed from the entire input geometry model. The initial distance threshold is defined as one-quarter of the characteristic length of the computational domain bounding box. For subsequent refinement layers, the distance thresholds are adaptively recalculated based on the current subdivision level and the prescribed mesh growth rate, allowing the refinement region to expand progressively while maintaining a smooth transition between different mesh resolutions. The distance threshold for each refinement layer is updated according to Eq. (3), where $\alpha = 1/(2.0g)$ denotes the threshold scaling factor derived from the prescribed mesh growth rate g.

Since the mesh refinement process relies solely on the distance value, and each cell requires only a single distance field evaluation during refinement, no additional storage is required for the distance information. Therefore, the cell data structure retains only the essential attributes, including the indices of the eight vertices defining the cell, the refinement level (used to determine whether the prescribed maximum refinement depth has been reached), and the region tag (indicating whether the cell is inside the computational domain, intersecting the geometry, or outside the domain). This compact representation significantly reduces memory consumption and facilitates large-scale mesh generation. Cell adjacency relationships are constructed only temporarily during the inside–outside partitioning process and the generation of solver input files. During the mesh refinement stage, the proposed method completely avoids the maintenance of explicit connectivity information, since each cell can be refined independently based solely on its local distance value. Consequently, the cell data structure remains compact and is defined as follows:

```
struct Cell
```

```
{
    unsigned int ids[8];
    unsigned int depth;
    unsigned char tag;
};
```

Furthermore, the cell-independent refinement strategy naturally enables parallel execution. Each thread processes an individual cell independently, and no thread synchronization is required during the subdivision process. Synchronization is only introduced in the subsequent vertex deduplication stage, where multiple refined cells may generate identical vertices and access shared data structures. By minimizing synchronization overhead, the proposed strategy maximizes parallel efficiency and improves the scalability of large-scale Cartesian mesh generation.

The implementation of the parallel uniform refinement procedure is summarized in Algorithm 1. L_1 is the number of uniform refinement layers. L_0 is the number of background mesh layers. Fig. 7 illustrates the resulting Cartesian mesh after the completion of the uniform refinement stage.

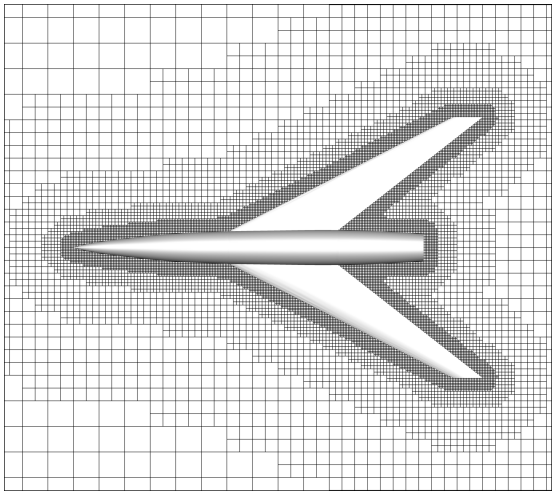


Fig. 7: Uniform refinement of intersecting layers in the Cartesian mesh.

3.3.4. Feature-aware Adaptive Refinement

In the feature-aware refinement stage, a feature-based region-constrained BVH acceleration structure is employed to evaluate the distance, thereby restricting refinement to geometrically significant regions. Cells are recursively refined according to the distance threshold until the prescribed number of feature-adaptive refinement levels is reached. Except for the localized search region adopted during distance evaluation, the feature-aware adaptive refinement follows the same algorithmic procedure as the uniform refinement stage. Consequently, the two refinement strategies can be seamlessly integrated within a unified framework, where the feature-aware adaptive refinement is performed immediately after the completion of uniform refinement.

Data: Cell set to be refined C_0 (background Cartesian mesh); Model acceleration structure; Refinement parameters: maximum number of intersecting layers L_1, mesh growth rate r.

Result: Set of intersecting layer cells C_{int}.

begin
  Initialize the distance threshold: $d_i \leftarrow \frac{1}{4}B_{\text{bbox}}$;
  foreach *cell* $c \in C_0$ ***in parallel*** **do**
    Evaluate the distance at the cell center: $\phi(\mathbf{x}_c)$;
    if $\phi(\mathbf{x}_c) \leq d_i$ **then**
      Mark c as a candidate for refinement;
    end
    else
      Add c to the exterior cell set and return;
    end
    Perform a uniform subdivision of the cell c to generate the child cell set C_i;
    for $i = L_0 + 1$ **to** $L_1 - L_0$ **do**
      Update the distance threshold: $d_{i+1} \leftarrow \alpha d_i$;
      foreach *cell* $c \in C_i$ **do**
        Evaluate the distance: $\phi(x_c)$;
        if $\phi(x_c) \leq d_{i+1}$ **then**
          Add c to the next-layer candidate set C_{i+1};
        end
        else
          Add c to the exterior cell set;
        end
      end
      Perform uniform subdivision on C_{i+1} and swap containers with C_i;
    end
    Merge results C_{int} with limited synchronization and perform node index remapping;
  end
  return C_{int};
end

Algorithm 1: Parallel Uniform Refinement Procedure.

Fig. 8 illustrates the resulting feature-adaptive refinement configuration.

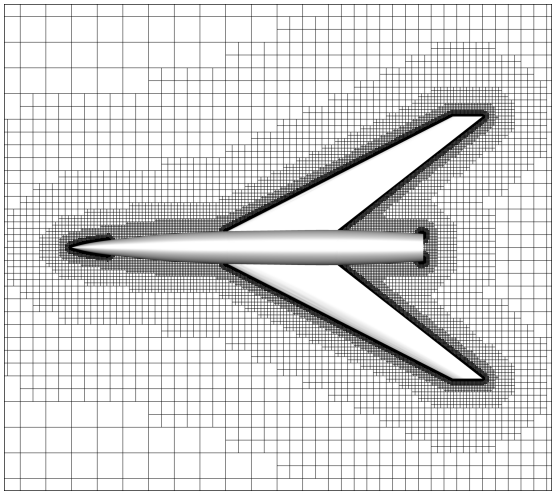


Fig. 8: Cartesian mesh undergoing feature-adaptive refinement.

3.4. Domain Classification

After mesh refinement, the computational domain, defined by its bounding box, is fully populated with Cartesian mesh. In external flow simulations, the model's outer surface serves as the object boundary, while the computational domain's bounding box defines the external field boundary. Only the mesh cells in the exterior region of the model are retained, whereas the interior cells are removed. In this work, a randomized weighted union-find based flood-fill algorithm is employed to distinguish the interior and exterior regions.

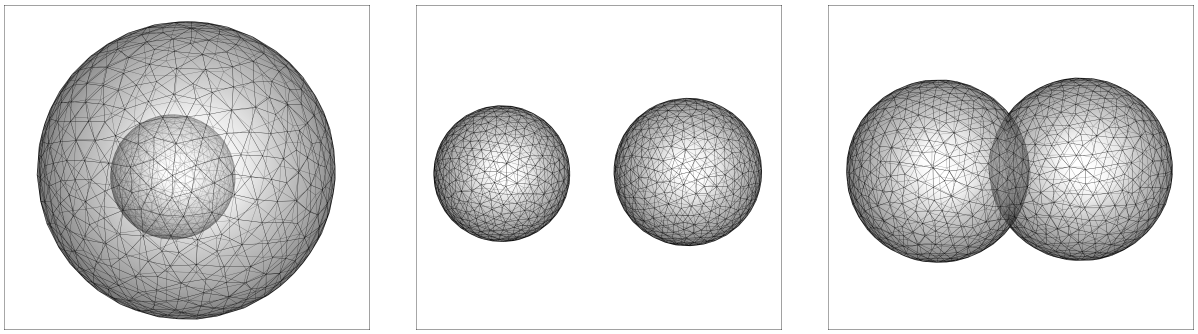
3.4.1. Randomized Weighted Union-Find

To efficiently classify connected domains in large-scale Cartesian meshes, a randomized weighted union-find algorithm is adopted. Unlike conventional union-find methods that may generate unbalanced trees depending on the merging order, the proposed approach assigns a random priority to each root node and merges sets according to this priority, thereby maintaining an approximately balanced disjoint-set structure. Meanwhile, path compression is applied during the *find* operation to further reduce tree depth. As a result, both *find* and *union* operations achieve nearly constant amortized complexity of $O(\alpha(N))$, while requiring only linear memory consumption.

In Cartesian mesh classification, each grid cell is initially treated as an independent set. Neighboring cells satisfying the connectivity criterion are iteratively merged through the *union* operation, and cells belonging to the same connected region are identified by their common root index. The proposed strategy avoids explicit graph construction and recursive traversal, making it particularly suitable for large-scale Cartesian meshes with millions or billions of cells.

3.4.2. Flood-Fill Algorithm

A topology-based flood-fill algorithm is developed for efficient inside–outside classification of large-scale Cartesian meshes. First, boundary-intersected cells are identified through a BVH-accelerated collision detection procedure, where candidate cells are rapidly filtered by BVH and verified using exact geometric intersection tests in parallel. These intersected cells act as topological barriers that isolate the external region from internal regions. After removing the intersected cells, the remaining cells are clustered using a randomized weighted union-find data structure according to cell adjacency, producing connected components with nearly linear computational complexity. An arbitrary boundary seed cell is then selected to label the external component through the established connectivity. Since intersected cells completely block the topology between the exterior and enclosed regions, the proposed method can robustly handle complex geometric configurations, including common geometric defects, internal components, multiple components, and intersecting components 9. The remaining unlabeled cells are consequently classified as interior regions.



(a) (b) (c)

Fig. 9: Robust domain classification for geometrically models, including internal components, multiple components, and intersecting components.

The workflow of the algorithm is summarized in Algorithm 2, and Fig. 10 illustrates its operation.

3.5. Body-Fitted Mesh Generation

3.5.1. Isosurface Extraction

In the proposed framework, the zero-level set of the signed distance field (SDF) provides an implicit representation of the target geometry. Based on this representation, the Marching Cubes algorithm [47] is employed in parallel to extract the zero isosurface from the Cartesian mesh, which is subsequently used for cut-cell identification and body-fitted mesh construction. For well-resolved intersecting cells, the SDF-driven reconstruction strategy can directly generate body-fitted cells using standard Marching Cubes templates. As illustrated in Fig. 11, when the SDF signs at all cell vertices are correctly classified, the zero-level intersection points along the crossed edges are accurately obtained through linear interpolation. The corresponding boundary fragments are then reconstructed according to the predefined templates. However, when geometric

Data: Cartesian mesh C and geometric model M.

Result: Exterior cell set C_{ext}.

begin

Intersecting Cell Detection: Construct a BVH structure for the geometric model M and identify candidate cells through BVH traversal. Perform exact intersection tests in parallel to obtain the intersecting cell set C_{cut}, which isolates the exterior and interior regions;

Topology Connectivity Construction: Initialize each non-intersecting cell as an independent set. For adjacent non-intersecting cells, merge their connected components using the randomized weighted union-find algorithm;

Exterior Seed Selection: Select an arbitrary boundary cell c_s located in the exterior region as the seed cell;

Exterior Region Identification: Find the root node of c_s using the union-find structure. All cells sharing the same root node are classified as exterior cells:

$$C_{\text{ext}} = \{c_i | \text{Root}(c_i) = \text{Root}(c_s)\};$$

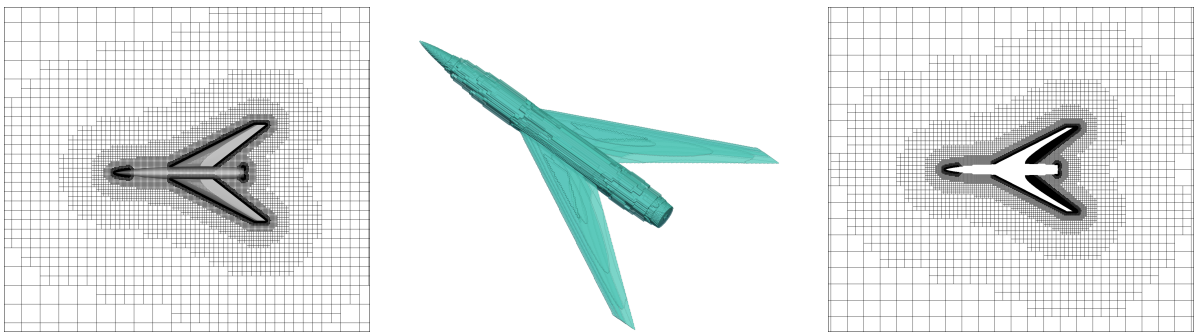
Cut-Cell Classification: Identify intersecting cells adjacent to C_{ext} as boundary cut cells;

SDF Sign Assignment: Assign positive SDF values to grid points associated with C_{ext} and negative SDF values to the remaining interior region;

Interior Region Extraction: Remove all cells that do not belong to C_{ext} and preserve the exterior Cartesian mesh;

end

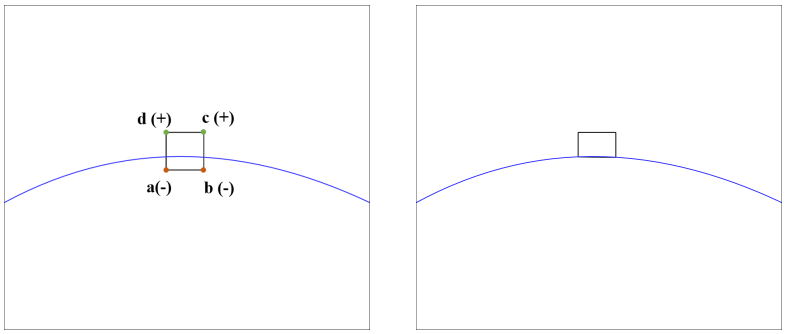
Algorithm 2: Randomized Weighted Union-Find Based Flood-Fill Identification of Exterior Cells.



(a) (b) (c)

Fig. 10: Flood-fill identification of interior and exterior regions: (a) Cartesian mesh showing both interior and exterior regions; (b) intersecting Cartesian mesh cells with the model; (c) exterior Cartesian mesh after removing interior cells.

features are under-resolved by the Cartesian background grid, such as narrow gaps or sharp features, the local SDF representation may become inaccurate, resulting in unreliable surface reconstruction. A special cell treatment strategy is therefore introduced to improve the robustness of body-fitted mesh generation, as described in the following section.



(a) (b)

Fig. 11: Body-fitted cell reconstruction for well-resolved intersecting cells using the Marching Cubes algorithm in a 2D case. The blue curve represents the geometric boundary. (a) A cell intersected by the boundary, where the four vertices a, b, c, and d have correct region labels, with a and b located inside the geometry and c and d located outside. (b) Zero-level points on all intersected edges are calculated by linear interpolation, and the corresponding body-fitted cells are reconstructed using predefined templates.

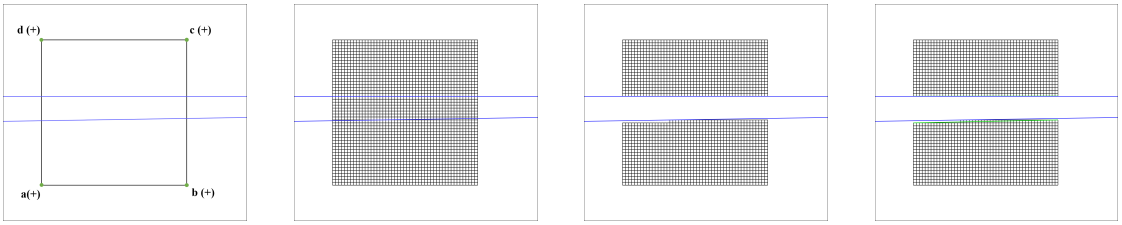
Compared with traditional geometry-based intersection approaches, the SDF-based representation avoids expensive explicit intersection operations and provides a unified description of complex geometries. Moreover, the cell-independent nature of the Marching Cubes algorithm enables efficient parallel implementation, making it suitable for large-scale Cartesian mesh generation.

3.5.2. Special Cell Treatment

Although the SDF-based isosurface extraction provides a robust and efficient approach for body-fitted mesh construction, its accuracy is inherently limited by the resolution of the underlying Cartesian mesh. Due to memory and computational constraints, excessive refinement of the background grid is generally impractical. Consequently, geometric features such as narrow gaps, sharp corners, and thin structures may not be sufficiently resolved, resulting in inaccurate local SDF representations and potential errors during isosurface reconstruction.

To improve numerical robustness while maintaining computational efficiency, a subcell-based geometric approximation strategy is introduced for these problematic cells. Instead of performing exact geometric cutting, which is computationally expensive for complex models, the affected Cartesian cells are recursively subdivided into virtual subcells. The volume fraction, surface area, face centroid, and outward normal vectors are then estimated from the reconstructed subcell geometry. Fig. 12 demonstrates the subcell-based geometric approximation strategy for a typical narrow-gap case. These geometric quantities are directly

provided to the finite-volume solver as the required control-volume information. Since finite-volume methods rely on the integral conservation over control volumes rather than exact surface representation, the proposed approximation strategy can preserve the conservation properties while significantly reducing the complexity of cut-cell construction.



(a) (b) (c) (d)

Fig. 12: Subcell-based geometric approximation strategy for special cells. The green curve denotes the reconstructed boundary. (a) A geometry-intersected cell with all vertices outside the computational domain, where SDF interpolation fails to determine the zero-level intersections. (b) The cell is uniformly subdivided into virtual subcells. (c) Interior virtual subcells are removed. (d) The cell is reconstructed into two polyhedral control volumes, and the geometric quantities required by the finite-volume solver are independently evaluated.

Furthermore, excessively small cut cells may introduce numerical instability due to restrictive time-step constraints in explicit CFD solvers. Therefore, a threshold-based geometric correction strategy is adopted. Specifically, when the absolute SDF value of a mesh point satisfies

$$|\phi(\mathbf{x})| < \epsilon,$$

the point is projected onto the surface along the local SDF gradient direction:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x} - \phi(\mathbf{x}) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|}.$$

This operation eliminates degenerate small-volume cells near the boundary while preserving the geometric fidelity of the reconstructed surface.

4. Numerical Experiments

The proposed framework was evaluated in terms of parallel scalability of Cartesian mesh refinement, overall computational performance, and the numerical applicability of the generated body-fitted meshes. The proposed framework is currently designed for shared-memory parallelism on a single workstation, with thread-level parallelization implemented using Intel Threading Building Blocks (TBB). All experiments were conducted on a workstation equipped with a 13th Gen Intel® Core™ i9-13900HX processor (24 cores and 32 threads), 32 GB of RAM, and an NVIDIA® GeForce RTX™ 4060 GPU with 8 GB of VRAM.

4.1. Parallel Scalability of Cartesian Mesh Refinement

The parallel scalability of the proposed adaptive Cartesian mesh refinement method is evaluated using the DLR-F6 and Rocket models, as summarized in Table 1 and Table 2. In the table, the parameter *Levels* represents the refinement configuration, where the first value denotes the number of uniform refinement levels and the second value indicates the number of feature-aware adaptive refinement levels. The *Speedup* is calculated as $S_p = T_1/T_p$, where T_1 and T_p represent the execution time using one thread and p threads, respectively. The parallel *Efficiency* is defined as $E_p = S_p/p$.

For the DLR-F6 model, three mesh resolutions containing 2.44 million, 6.60 million, and 19.78 million cells are tested. As shown in Table 1, when using 16 threads, the proposed method achieves speedups of 3.760 times, 3.677 times, and 3.390 times, respectively, corresponding to efficiencies of 23.50%, 23.00%, and 21.20%. The speedup remains relatively stable as the mesh resolution increases, indicating that the proposed refinement strategy maintains good parallel scalability for increasingly large Cartesian meshes. The slight reduction in efficiency is mainly attributed to the increasing irregularity of adaptive refinement and the higher memory access cost associated with larger mesh structures.

Table 1: Parallel performance of the proposed Cartesian mesh refinement method for the DLR-F6 model.

Model	Input triangles	Levels	Cells	Threads	Time (s)	Speedup	Efficiency
DLR-F6	530546	12/14	2437856	1	6.753	1.000	100.00%
				2	3.495	1.932	96.60%
				4	3.245	2.081	52.00%
				8	1.944	3.474	43.40%
				16	1.796	3.760	23.50%
DLR-F6	530546	13/15	6603738	1	13.185	1.000	100.00%
				2	6.811	1.936	96.80%
				4	6.596	1.999	50.00%
				8	3.799	3.471	43.40%
				16	3.586	3.677	23.00%
DLR-F6	530546	14/16	19776086	1	32.108	1.000	100.00%
				2	17.832	1.801	90.10%
				4	17.064	1.882	47.00%
				8	11.929	2.692	33.60%
				16	9.473	3.390	21.20%

For the Rocket model, larger mesh cases with 10.82 million, 42.32 million, and 70.26 million cells are evaluated, as presented in Table 2. With 16 threads, the obtained speedups are 2.704 times, 2.243 times, and 1.816 times, respectively. Although the acceleration decreases with increasing mesh size, the parallel

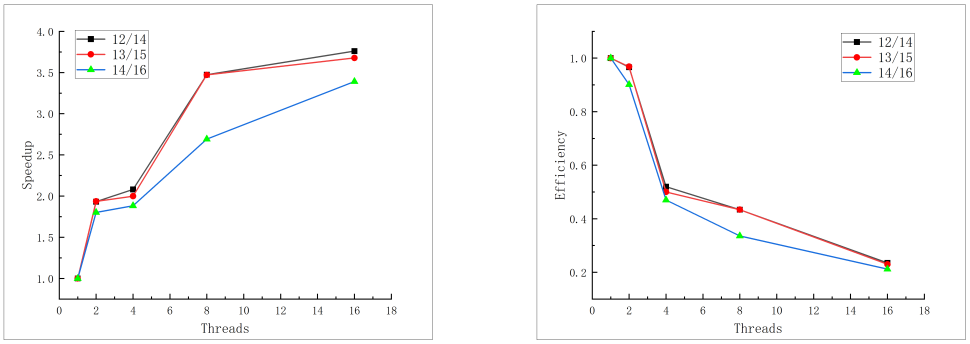
implementation consistently reduces the computational time compared with the serial version. The reduced scalability for large-scale cases is mainly attributed to the limited memory access efficiency, as the increased data volume leads to higher pressure on memory bandwidth and cache utilization, thereby reducing the benefits of further parallelization.

Table 2: Parallel performance of the proposed method for the Rocket model.

Model	Input triangles	Levels	Cells	Threads	Time (s)	Speedup	Efficiency
Rocket	99674	14/15	10821525	1	13.375	1.000	100.00%
				2	7.641	1.750	87.50%
				4	7.248	1.845	46.10%
				8	5.254	2.545	31.80%
				16	4.944	2.704	16.90%
Rocket	99674	15/16	42317486	1	45.281	1.000	100.00%
				2	29.829	1.518	75.90%
				4	28.562	1.585	39.60%
				8	21.422	2.114	26.40%
				16	20.188	2.243	14.00%
Rocket	99674	15/17	70261731	1	71.660	1.000	100.00%
				2	50.070	1.431	71.60%
				4	49.549	1.447	36.20%
				8	42.235	1.697	21.20%
				16	39.458	1.816	11.30%

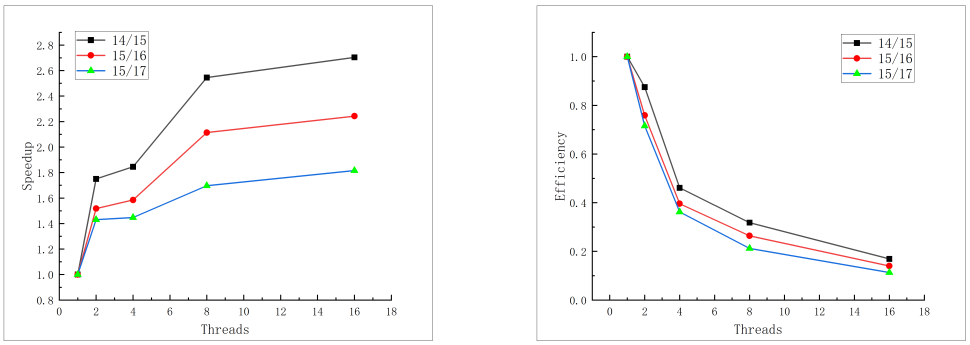
Fig. 13 and Fig. 14 present the parallel scalability results for two representative models. The speedup increases with the number of threads, demonstrating the effectiveness of the proposed refinement strategy. However, the parallel efficiency decreases as the number of threads increases. This behavior may be attributed to several factors. First, memory bandwidth limitations may reduce scalability as more threads compete for memory resources during cell refinement and geometric data access. Second, thread synchronization and scheduling overhead may become increasingly significant at higher thread counts, limiting the benefits of additional parallelism. Third, workload imbalance may arise from variations in the number and complexity of cells processed by different threads, particularly in geometrically complex regions. These factors are consistent with the observed sublinear speedup, especially when the thread count increases from 8 to 16. Nevertheless, the larger DLR-F6 cases achieve speedups of up to 3.39, indicating that the proposed method retains practical parallel scalability for large-scale mesh refinement. It should be noted that this analysis is primarily based on the algorithmic principles, characteristics of parallel tasks, and experimental results. A detailed quantitative analysis of memory bandwidth utilization, thread synchronization overhead, and workload imbalance has not yet been conducted. Future work will focus on systematic performance profiling

to identify the major bottlenecks and further improve parallel efficiency.



(a) (b)

Fig. 13: Parallel scalability analysis for the DLR-F6 model. (a) Speedup with different numbers of threads; (b) parallel efficiency corresponding to different thread counts.



(a) (b)

Fig. 14: Parallel scalability analysis for the Rocket model. (a) Speedup with different numbers of threads; (b) parallel efficiency corresponding to different thread counts.

4.2. Performance Evaluation of the Complete Mesh Generation Framework

In this subsection, seven representative models from different application domains, namely Rocket, Submarine, Car, Train, Spaceship, DLR-F6, and Aircraft, are considered to evaluate the efficiency and robustness of the proposed method. These models exhibit varying degrees of geometric complexity, providing a challenging testbed for Cartesian mesh generation. A comparison is conducted between the proposed distance-field-driven Cartesian mesh generation method and a conventional geometry-intersection-based Cartesian mesh generation approach (GI-CMG). The GI-CMG implementation is developed within our in-house mesh generation framework and follows the general geometry-intersection strategy reported in [20]. Both methods

employ the same Cartesian data structure, parallel computing framework, and mesh processing procedures, with the primary difference being the refinement criterion. Since the two approaches employ different mesh generation strategies, the generated meshes are not identical. Therefore, similar mesh resolutions are adopted to ensure that both methods produce meshes satisfying engineering-quality requirements. For each model, the total mesh generation time is recorded, and the corresponding speedup is calculated. The quantitative results are summarized in Table 3.

As shown in Table 3, both methods successfully generate high-quality Cartesian meshes for all test cases, demonstrating their robustness in handling complex geometries. However, the proposed method consistently achieves lower computational costs, with speedups ranging from 3.8 to 7.5 times compared with GI-CMG. The superior efficiency of the proposed method can be attributed to two main factors. First, the refinement criterion is directly defined using the DF, enabling cell subdivision decisions without performing repeated geometric intersection tests. Second, the refinement process is inherently cell-local, allowing parallel execution and avoiding the expensive reconstruction of explicit geometric relationships during mesh generation.

The visual comparisons in Fig. 15 further demonstrate the advantages of the proposed approach. For geometries with pronounced curvature variations, such as the Rocket and Submarine models, the DF-driven method provides improved geometric feature representation while maintaining smooth mesh transitions. Regarding overall mesh quality, both approaches produce comparable results, indicating that the proposed method achieves substantial computational acceleration without sacrificing mesh fidelity.

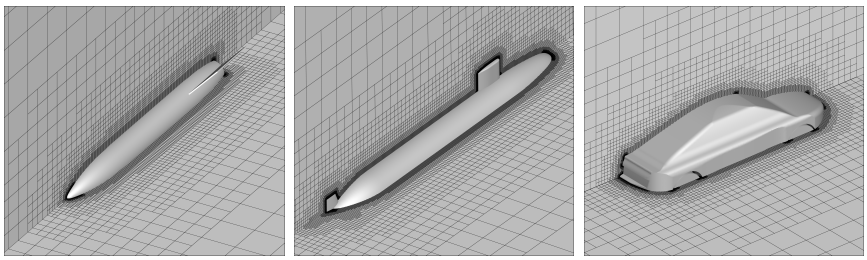
Unlike conventional structured and unstructured meshes, cut-cell Cartesian meshes contain cells with irregular geometries, making traditional quality metrics, such as aspect ratio and orthogonality, less suitable for mesh quality assessment. Moreover, approximate treatments are applied to special cells in this study. Therefore, CFD simulations are performed to evaluate mesh quality based on the accuracy and reliability of the numerical results.

4.3. CFD Validation

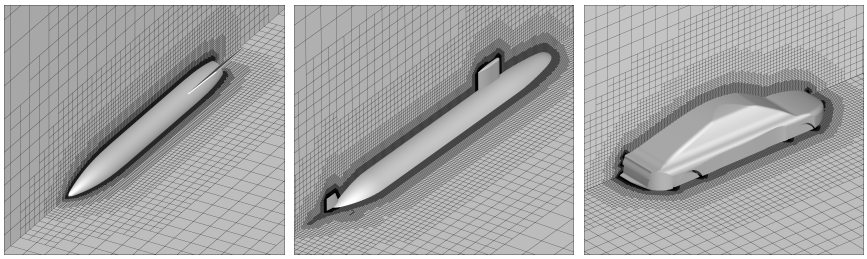
The HB-2, CHN-F1, and AIM-7 Sparrow standard models were adopted for validation, as they provide well-established reference data. The generated meshes were evaluated to determine their suitability for CFD simulations.

4.3.1. HB-2

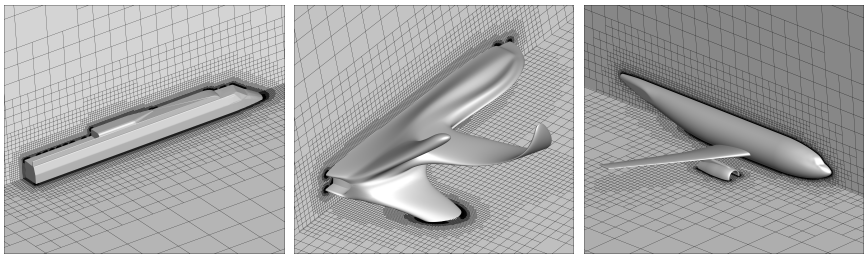
The HB-2 standard model, a canonical geometry for hypersonic wind tunnel experiments with well-established reference data, was adopted to validate the generated mesh and assess its suitability for CFD simulations. The model has a characteristic length of 0.49 m. The simulations were conducted at a Mach number of 9.46, with the angle of attack varying from -8° to 8° and a sideslip angle of 0°. The freestream static temperature and pressure were 52.6 K and 32.7 Pa, respectively.



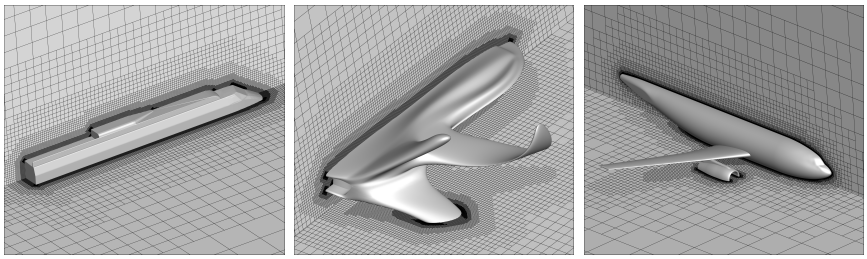
The proposed method



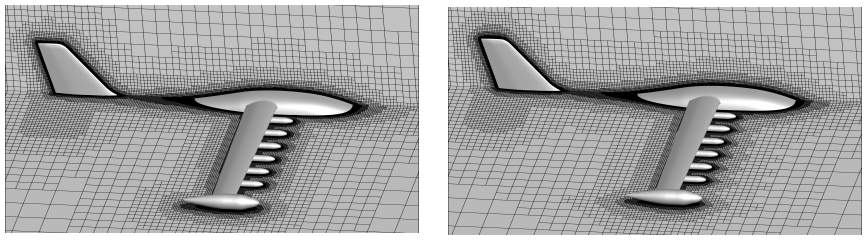
GI-CMG



The proposed method



GI-CMG



The proposed method GI-CMG

Fig. 15: Comparison of meshes generated by the proposed method (top) and GI-CMG (bottom) for the following models: Rocket, Submarine, Car, Train, Spaceship, DLR-F6, and Aircraft.

Table 3: Performance comparison between the proposed method and GI-CMG

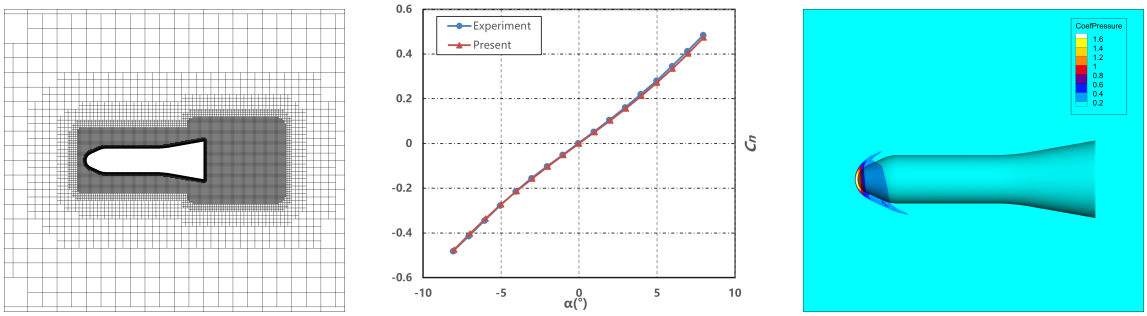
Model	Method	$\text{Cells}_{\text{out}}$	Pts_{out}	T_{total} (s)	Speedup
Rocket	Proposed	1,682,952	1,969,193	1.968	5.829
	GI-CMG	1,724,291	1,931,956	11.472	–
Submarine	Proposed	2,589,088	2,968,309	3.238	3.985
	GI-CMG	2,521,225	2,851,784	12.905	–
Car	Proposed	5,341,482	7,097,379	6.541	5.219
	GI-CMG	5,377,939	6,245,762	34.137	–
Train	Proposed	10,196,723	12,010,153	10.902	5.842
	GI-CMG	10,064,521	11,781,833	63.689	–
Spaceship	Proposed	13,260,030	15,479,899	21.490	3.874
	GI-CMG	13,209,658	15,545,459	83.254	–
DLR-F6	Proposed	21,015,765	27,305,001	24.933	7.491
	GI-CMG	21,381,084	25,354,901	186.771	–
Aircraft	Proposed	30,841,066	37,709,171	39.422	5.354
	GI-CMG	29,053,739	33,303,602	211.063	–

Speedup: indicates how many times faster the proposed method is compared to GI-CMG.

The computational mesh generated by the proposed method is shown in Fig. 16(a). In addition to geometry-based refinement, a customized feature-based adaptive refinement strategy was employed to improve the mesh resolution in regions of interest, such as the vicinity of shock waves. Since the proposed framework is designed as a general-purpose mesh generation method and is not currently coupled with the flow solver for solution-based adaptive refinement, a user-defined box-based refinement strategy was adopted. This experiment demonstrates that the proposed framework can support different adaptive refinement strategies and provides a flexible foundation for future solver-driven adaptive mesh refinement. Numerical simulations were conducted over an angle-of-attack range from -8° to 8°, and the results were compared with experimental data. As shown in Fig. 16(b), the numerical predictions are in good agreement with the experimental data in terms of the normal force coefficient C_n, accurately capturing their variation with the angle of attack. The numerical results obtained using the generated mesh are compared with experimental data to evaluate the accuracy and applicability of the proposed mesh generation approach. The corresponding pressure coefficient (C_p) distribution at an angle of attack of $\alpha = 5^\circ$ is presented in Fig. 16(c).

4.3.2. CHN-F1

The CHN-F1 flying-wing model was simulated under supersonic flow conditions at a Mach number of 1.48, with the angle of attack varying from -2° to 16° and a sideslip angle of -3°. The Reynolds number and unit Reynolds number were 1.09×10^7 and 2.16×10^7 m^{-1}, respectively. The freestream static temperature

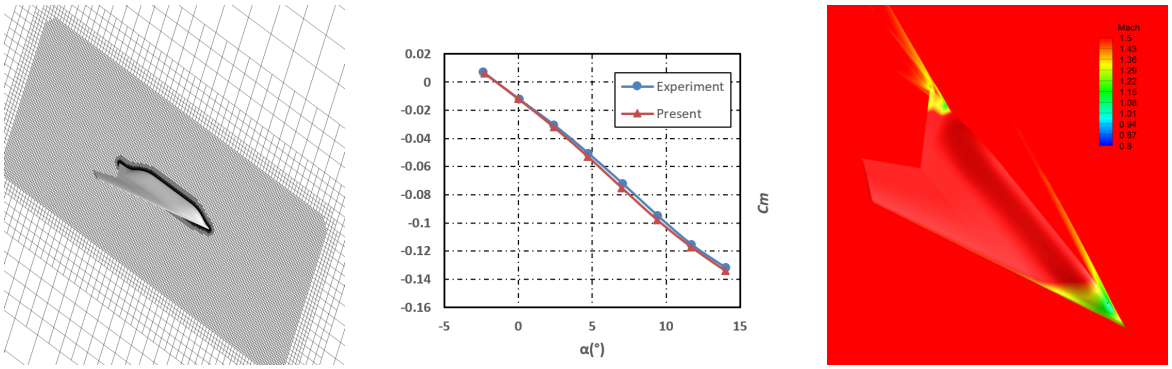


(a) (b) (c)

Fig. 16: The HB-2 model: (a) Mesh generated using the proposed method; (b) comparison of numerical and experimental normal force coefficients (C_n) for angles of attack ranging from $\alpha = -8°$ to $8°$; (c) pressure coefficient (C_p) distribution at an angle of attack of $\alpha = 5°$.

and pressure were 300 K and 67367.74 Pa, respectively.

Figure 17(a) shows the mesh generated for the CHN-F1 model using the proposed method. Figure 17(b) compares the computed pitching moment coefficients (C_m) with the experimental data over the tested angle-of-attack range. The numerical results agree well with the experimental measurements and accurately capture the decreasing trend of C_m with increasing angle of attack, with only minor deviations observed. This agreement supports the accuracy and reliability of the proposed mesh generation method for CFD simulations. Figure 17(c) presents the Mach number distribution at an angle of attack of 2.4°, illustrating the flow field around the model.



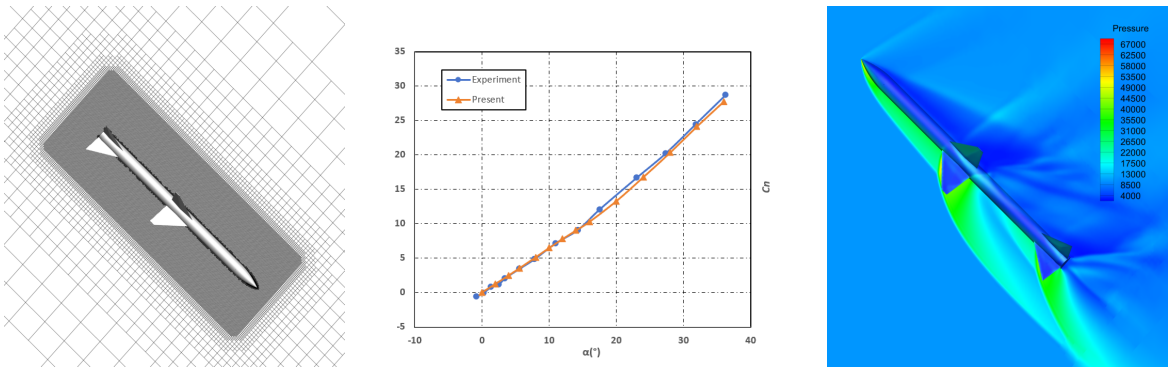
(a) (b) (c)

Fig. 17: The CHN-F1 model: (a) Mesh generated using the proposed method; (b) comparison of numerical and experimental pitching moment coefficients (C_m) for angles of attack ranging from $\alpha = -2°$ to $14°$; (c) Mach number (Ma) distribution at an angle of attack of $\alpha = 2.4°$.

4.3.3. AIM-7 Sparrow

The AIM-7 Sparrow missile model was simulated under high-angle-of-attack conditions at a Mach number of 2.0 and a sideslip angle of 0°. The angle of attack varied from 0° to 36°. The freestream static temperature and pressure were 188.333 K and 10147.679 Pa, respectively.

Figure 18(a) shows the mesh generated for the AIM-7 Sparrow model using the proposed method. Figure 18(b) compares the computed and experimental normal force coefficients (C_n) of the AIM-7 Sparrow model under high-angle-of-attack conditions. The computed C_n increases progressively with the angle of attack, capturing the overall trend observed in the experimental data. Although some discrepancies are present, particularly at low and high angles of attack, the numerical results reproduce the general variation in normal force with increasing angle of attack. These results demonstrate the applicability of the proposed mesh generation method to high-angle-of-attack supersonic flow simulations. Figure 18(c) illustrates the pressure distribution at an angle of attack of 36°, demonstrating the applicability of the generated mesh to high-angle-of-attack supersonic flow simulations.



(a) (b) (c)

Fig. 18: The AIM-7 Sparrow model: (a) Mesh generated using the proposed method; (b) comparison of numerical and experimental normal force coefficients (C_n) for angles of attack ranging from $\alpha = 0°$ to 36°; (c) pressure distribution at an angle of attack of $\alpha = 36°$.

5. Conclusion

This paper presents a DF-driven parallel adaptive Cartesian mesh generation framework, where uniform refinement, feature-aware refinement, and body-fitted mesh generation are unified under a single DF representation. The DF serves as the sole criterion for mesh subdivision, enabling a simple and fully local refinement strategy that is naturally suitable for parallel execution. By avoiding explicit geometric intersection operations and topological connectivity maintenance during refinement, the proposed method achieves high mesh generation efficiency. Meanwhile, the smooth gradient property of the DF ensures consistent hierarchical transitions between different refinement levels. A parallel Marching Cubes algorithm combined

with a subcell-based geometric approximation strategy is further developed for efficient cut-cell processing and robust body-fitted mesh construction. In addition, a Randomized Weighted Union-Find algorithm is employed for efficient domain classification. Comprehensive numerical experiments demonstrate that the proposed framework achieves excellent scalability for large-scale adaptive Cartesian mesh generation. Although the parallel efficiency decreases for extremely large meshes due to memory access limitations, the proposed method still provides significant improvements in mesh generation efficiency compared with conventional Cartesian mesh generation approaches while maintaining comparable mesh quality.

Despite these advantages, the current Cartesian mesh generation framework lacks dedicated boundary layer resolution and is therefore not directly applicable to high-fidelity viscous flow simulations. Future work will focus on incorporating boundary layer mesh generation capabilities to extend its applicability to viscous flow problems.

References

[1] V. Jagota, A. P. S. Sethi, K. Kumar, Finite element method: an overview, Walailak J. Sci. Technol. 10 (1) (2013) 1–8.

[2] I. Demirdžić, S. Muzaferija, Finite volume method for stress analysis in complex domains, Int. J. Numer. Methods Eng. 37 (21) (1994) 3751–3766.

[3] S. K. Godunov, I. Bohachevsky, Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, Mat. Sb. 47 (3) (1959) 271–306.

[4] S. Zhang, G. Xu, H. Wu, et al., Medial hex-meshing: high-quality all-hexahedral mesh generation based on medial mesh, Eng. Comput. 40 (2024) 2537–2557.

[5] L. Qi, Q. Wu, G. Xu, et al., Drl-meshgen: automated block-structured mesh generation framework via deep reinforcement learning and optimal conformal mapping, Eng. Comput. 41 (2025) 4293–4315.

[6] J. Qian, Y. Zhang, Automatic unstructured all-hexahedral mesh generation from b-reps for non-manifold cad assemblies, Eng. Comput. 28 (4) (2012) 345–359.

[7] X. Liang, Y. Zhang, An octree-based dual contouring method for triangular and tetrahedral mesh generation with guaranteed angle range, Eng. Comput. 30 (2014) 211–222.

[8] M. Aftosmis, M. Berger, G. Adomavicius, A parallel multilevel method for adaptively refined cartesian grids with embedded boundaries, 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (2000) 808.

[9] Z. J. Wang, K. Srinivasan, An adaptive cartesian grid generation method for 'dirty' geometry, Int. J. Numer. Meth. Fluids 39 (8) (2002) 703–717.

[10] M. Gammon, A review of common geometry issues affecting mesh generation, 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting (2018) 1402.

[11] M. A. Park, W. L. Kleb, W. T. Jones, et al., Geometry modeling for unstructured mesh adaptation, AIAA Aviation 2019 Forum (2019) 2946.

[12] X. Yang, F. Yu, Y. Zhou, P. Zhou, G. Z. Zhao, Z. Q. Guan, A method of surface mesh generation for industrial cad models by constructing conforming discrete representation, Comput.-Aided Des. 188 (2025) 103914.

[13] J. Chen, B. Cao, Y. Zheng, et al., Automatic surface repairing, defeaturing and meshing algorithms based on an extended b-rep, Adv. Eng. Softw. 86 (2015) 55–69.

[14] A. Sheffer, Model simplification for meshing using face clustering, Comput.-Aided Des. 33 (13) (2001) 925–934.

[15] A. Thakur, A. G. Banerjee, S. K. Gupta, A survey of cad model simplification techniques for physics-based simulation applications, Comput.-Aided Des. 41 (2) (2009) 65–80.

[16] J. Gullbrand, X. S. Bai, L. Fuchs, High-order cartesian grid method for calculation of incompressible turbulent flows, Int. J. Numer. Meth. Fluids 36 (6) (2001) 687–709.

[17] W. Thacher, H. Johansen, D. Martin, A high order cartesian grid, finite volume method for elliptic interface problems, J. Comput. Phys. 491 (2023) 112351.

[18] D. Calhoun, E. Chudzik, C. Helzel, The cartesian grid active flux method with adaptive mesh refinement, J. Sci. Comput. 94 (3) (2023) 54.

[19] J. Abras, N. S. Hariharan, R. P. Narducci, Wake breakdown of high-fidelity simulations of a rotor in hover, AIAA Scitech 2019 Forum (2019) 0593.

[20] X. Li, M. Yang, L. Bi, R. Xu, C. Luo, S. Yuan, X. Yuan, Z. Tang, An efficient cartesian mesh generation strategy for complex geometries, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 418 (2024) 116564.

[21] X. Qi, Y. Yang, L. Tian, et al., A parallel methodology of adaptive cartesian grid for compressible flow simulations, Adv. Aerodyn. 4 (1) (2022) 21.

[22] T. Akenine-Möller, Fast 3d triangle-box overlap testing, J. Graph. Tools 6 (1) (2001) 29–33.

[23] J. Pantaleoni, Voxelpipe: A programmable pipeline for 3d voxelization, in: Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on High Performance Graphics, 2011, pp. 1–8.

[24] S. Meng, D. Zhou, L. Bi, X. Li, C. Luo, H. Du, Anisotropic cartesian grid generation strategy for arbitrarily complex geometry based on a fully threaded tree, Comput. Aided Des. 155 (2023) 1–14.

[25] S. Meng, D. Zhou, X. Yuan, X. Li, H. Chen, L. Bi, Enhanced strategy for adaptive cartesian grid generation with arbitrarily complex 3d geometry, Adv. Eng. Softw. 174 (2022) 1–14.

[26] J. Bonet, J. Peraire, An alternating digital tree (adt) algorithm for 3d geometric searching and intersection problems, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 31 (1) (1991) 1–17.

[27] Y. Cao, H. Wang, W. Zhao, B. Duan, X. Zhang, S. Cheng, A new method to construct the kd tree based on presorted results, Complexity 2020 (2020) 1–7.

[28] M. Shevtsov, A. Soupikov, A. Kapustin, Highly parallel fast kd-tree construction for interactive ray tracing of dynamic scenes, Comput. Graph. Forum 26 (3) (2007) 395–404.

[29] P. Ram, K. Sinha, Revisiting kd-tree for nearest neighbor search, in: Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining, 2019, pp. 1378–1388.

[30] S. M. Rubin, T. Whitted, A 3-dimensional representation for fast rendering of complex scenes, in: Proceedings of the 7th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH 1980), 1980, pp. 110–116.

[31] W. Barbier, M. Paulin, Fused collapsing for wide BVH construction, Comput. Graph. Forum (2025).

[32] P. Weier, A. Rath, É. Michel, I. Georgiev, P. Slusallek, T. Boubekeur, N-BVH: Neural ray queries with bounding volume hierarchies, in: ACM SIGGRAPH 2024 Conference Papers, 2024, pp. 1–11.

[33] H. Chen, Z. Wang, L. Tian, J. Liu, N. Qin, N. Zhao, A dynamic partition weight strategy for accelerating parallel adaptive cartesian grid generation, Chinese J. Aeronaut. (2025) 103921.

[34] C. Burstedde, L. C. Wilcox, O. Ghattas, p4est: Scalable algorithms for parallel adaptive mesh refinement on forests of octrees, SIAM J. Sci. Comput. 33 (3) (2011) 1103–1133.

[35] P. Mondal, N. Munikrishna, N. Balakrishnan, Cartesian-like grids using a novel grid-stitching algorithm for viscous flow computations, J. Aircraft 44 (5) (2007) 1598–1609.

[36] T. Huang, H. Zhao, H. Chen, et al., A hybrid cartesian-meshless method for the simulation of thermal flows with complex immersed objects, Phys. Fluids 34 (10) (2022) 103318.

[37] B. Constant, S. Péron, H. Beaugendre, et al., An improved immersed boundary method for turbulent flow simulations on cartesian grids, J. Comput. Phys. 435 (2021) 110240.

[38] X. J. Zhang, Y. S. Zhu, K. Yan, et al., New immersed boundary method on the adaptive cartesian grid applied to the local discontinuous galerkin method, Chin. J. Mech. Eng. 31 (1) (2018) 22.

[39] M. P. Kirkpatrick, S. W. Armfield, J. H. Kent, A representation of curved boundaries for the solution of the navier–stokes equations on a staggered three-dimensional cartesian grid, J. Comput. Phys. 184 (1) (2003) 1–36.

[40] Z. Xie, T. Stoesser, A three-dimensional cartesian cut-cell/volume-of-fluid method for two-phase flows with moving bodies, J. Comput. Phys. 416 (2020) 109536.

[41] M. Meinke, L. Schneiders, C. Günther, et al., A cut-cell method for sharp moving boundaries in cartesian grids, Comput. Fluids 85 (2013) 135–142.

[42] S. Osher, R. P. Fedkiw, Level set methods: an overview and some recent results, J. Comput. Phys. 169 (2) (2001) 463–502.

[43] S. Liang, H. Huang, H. Liang, W. Tang, A. Bao, E. Shen, J. Wang, Y. Yang, Efficient boolean operations for b-rep models, J. Comput.-Aided Des. Comput. Graph. 37 (11) (2025) 1993–2005.

[44] R. Sawhney, Fcpw: Fastest closest points in the west, 1.0 (2021).

[45] S. Osher, J. A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations, J. Comput. Phys. 79 (1) (1988) 12–49.

[46] J. A. Sethian, Level set methods and fast marching methods, Cambridge Univ. Press (1999).

[47] W. E. Lorensen, H. E. Cline, Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm, Seminal graphics: pioneering efforts that shaped the field (1998) 347–353.

面向复杂工程几何的域分解与子域优化全四边形网格生成方法

刘舒畅[1]，徐权[1,2]，董庆利[1,2]

（1. 中物院高性能数值模拟软件中心，北京 100088；

2. 北京应用物理与计算数学研究所，北京 100088）

摘要：复杂工程几何的全四边形网格生成需要兼顾几何适应性、网格质量与自动化程度。针对基于域分解与模板法生成全四边形网格时，初始分解结果虽然能够满足基本拓扑生成条件，但局部子域形态和边界分段配置仍可能与模板生成要求不完全匹配的问题，本文在已有域分解与模板生成框架基础上，对初始分解修正和子域优化环节进行针对性补充。首先，基于约束 Delaunay 三角剖分对计算域进行初始分解，并对相邻 junction 三角形补充共享边分割；随后，根据子域边界网格分段数识别狭长四边形和六边形子域，通过二次分解分散模板内部较为集中的网格过渡；对于具有较强内凹特征的子域，利用累计内凹角选择具有代表性的分割位置，并沿局部角平分线实施二次分割。完成子域调整后，通过边界分段偶数规划协调新增内部边的分段数，并采用模板法生成各子域的全四边形网格。典型算例对比显示，所测试算例的最小角和最大角指标均有所改善，部分算例的角度超限单元数量有所减少。该方法不改变基础生成框架，主要为复杂工程几何条件下的域分解修正与模板适配性优化提供一种可实现的处理思路。

关键词：全四边形网格；域分解；模板法；子域优化；复杂工程几何

1 引言

全四边形网格广泛应用于有限元、有限体积等数值分析过程。与三角形网格相比，四边形网格具有不同的拓扑结构和方向性特征，其自动生成不仅需要满足复杂几何边界约束，还需要协调边界离散、内部网格拓扑以及单元质量等多方面要求。现有四边形网格生成技术包括映射与子映射、铺砌、基于场的分块以及域分解与模板生成等多种技术路线，不同方法在适用几何类型、自动化程度以及网格拓扑控制能力方面各具特点[1]。

面向复杂工程应用，四边形网格生成能力可概括为几何适应性、高质量和自动化三个相互关联的方面。在几何适应性方面，对于拓扑较简单、边界对应关系明确的区域，可采用映射或子映射方法；对于一般复杂区域，可采用铺砌等非结构方法；随着孔洞、内部约束、复杂凹凸边界等特征增加，还需要采用更加灵活的区域处理和分解策略。在网格质量方面，除生成算法本身外，还可以通过节点位置调整和网格拓扑调整进一步改善局部单元形态和整体网格结构。在自动化方面，则需要自动完成边界分段协调、子域之间的相容性处理以及不同局部生成策略之间的衔接。上述技术主线及其关系如图 1 所示。

复杂工程模型中还常存在内部孔洞、硬点、硬边及相交约束等特征。已有研究已对复杂内部几何约束下的四边形网格自动生成进行探索。例如，Ma 等将约束线、约束点等特征视作零面积内部孔，实现不同内部约束的统一处理[2]；进一步的研究通过自动子域分解以及整数规划协调边界节点数，实现了大量内部线约束条件下的全四边形网格生成[3]。因此，本文将复杂约束的统一拓扑表达作为工程输入处理基础，而不将其作为主要创新内容。

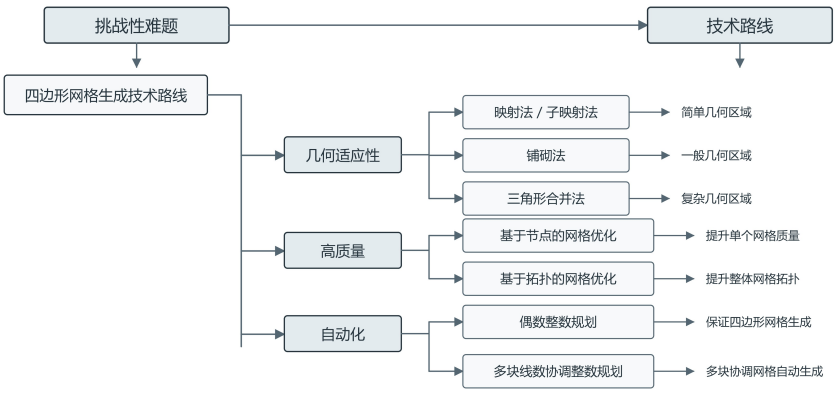


图 1 复杂工程四边形网格生成总体技术体系

在复杂区域的自动全四边形网格生成方面，Yang 等提出了基于域分解与模板的边界约束四边形网格生成方法：利用约束 Delaunay 三角剖分（Constrained Delaunay Triangulation，CDT）识别适宜的分割位置，将复杂区域分解为若干简单子域，并通过边界离散调整和模板法分别完成各子域网格生成[4]。该方法为复杂区域提供了统一的自动生成框架，但其初始域分解主要面向拓扑可生成性；在部分工程几何中，子域几何形态和边界分段比例与模板之间仍可能存在适配不足。

本文在上述框架基础上，围绕三类可能影响模板适配性的局部情形进行补充处理：相邻 junction 三角形导致的分割不足、边界分段数明显失衡形成的狭长子域，以及连续内凹边界形成的强内凹子域。本文工作的重点是完善域分解结果与模板生成之间的衔接关系，而不是改变基础域分解或模板生成方法。通过补充分割和有条件的二次分解，期望使所得子域在满足全四边形拓扑生成条件的同时，更便于后续模板过渡和几何映射。

2 域分解与模板法全四边形网格生成总体流程

本文方法以经过几何清理和边界离散的二维计算域为输入。对内部孔洞、硬点和硬边等约束，采用统一的边界化表达并并入约束集合。总体流程由初始域分解、子域适配性分析与优化、边界分段协调、模板生成与映射、网格后处理及质量评价五个阶段组成。各阶段之间的衔接关系如图 2 所示。

首先，在几何边界和内部约束的共同作用下构造 CDT，并根据三角形边与区域边界的邻接关系识别端部三角形、连接三角形和 junction 三角形。以 junction 三角形为核心组织局部三角区域，生成初始分割边，将复杂区域转化为三角形、四边形、五边形或六边形等简单多边形子域。

其次，相邻 junction 三角形的补充分割在初始域分解阶段完成，用于修正分割不足；在获得初始分解结果并完成新增内部边的首次分段协调后，再对各子域计算几何角度、边界链长度及边界网格分段数等属性。对于模板适配性不足的子域，仅按第 3.2 节和第 3.3 节的策略实施二次分解。每次二次分解产生新内部边后，均重新进行相应的分段协调，使各子域边界分段总数满足全四边形网格存在所需的偶数条件，并尽量使内部边单元尺寸接近相邻边界目标尺寸[3-4]且符合尺寸场要求。

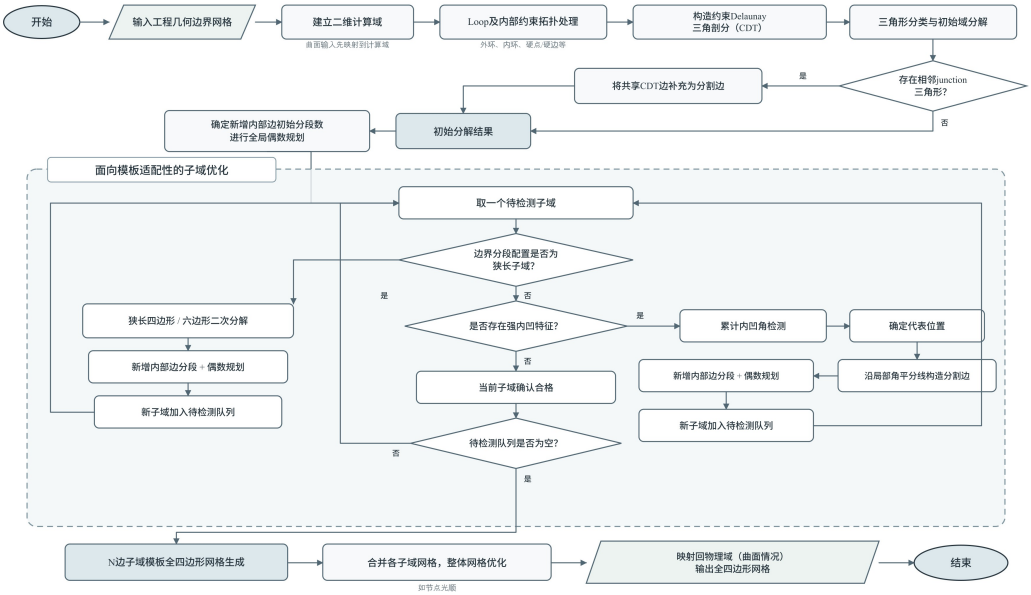


图 2 域分解与子域优化全四边形网格生成总体流程

$$\min \sum \mathrm{w}_{\mathrm{i}} \left| n_i - \frac{l_i}{h_i} \right| \tag{1}$$

$$s.t. \sum n_e = 2m_k, n_e \in Z^+, e \in \partial\Omega_k \tag{2}$$

式中，n_i为第 i 条可调边的分段数，l_i和 h_i分别为边长与目标单元尺寸，w_i为权重；Ω_k为第 k 个子域，m_k为正整数。对于相邻子域共享的内部边，采用同一分段变量以保证网格相容，其中可调边为全新插入的内部边，固定边为原有边界边。式(1)用于控制分段数与目标尺寸的偏差，式(2)给出各子域边界分段总数的偶数约束。

最后，根据子域边数、各边分段数及必要的奇异点配置选择相应模板，在标准参数域中生成拓扑网格，再通过超限插值或有限元插值映射至物理子域[4,5]。对子域交界处合并重合节点，并采用节点平滑和必要的局部拓扑调整改善单元形态。

3 面向模板适配性的域分解与子域优化

本节包含两个算法层级：第 3.1 节属于初始域分解阶段的补充修正；第 3.2 节和第 3.3 节属于首次偶数规划之后、面向模板适配性的子域二次优化。二次优化每产生一条新内部边，均重新执行相应的分段协调。

3.1 相邻 junction 三角形的补充分割

CDT 中 junction 三角形通常反映了区域骨架的分叉位置，是确定分割结构的重要依据。当两个 junction 三角形相邻并共享一条内部边时，若仍仅依据各自独立的分支关系生成分割边，可能将两个局部分叉结构合并到同一子域中，导致所得子域边数增加、边界链对应关系复杂，或在模板中引入不必要的奇异点集中。

为此，本文在完成 junction 三角形识别后增加相邻性检查。设 junction 三角形集合为 T^J，若 $t_i, t_j \in T^J$且二者共享 CDT 内部边 e_{ij}，则将 e_{ij}加入候选分割边集合。经合法性检查后，以该共享边作为补充分割边，使两个分支结构分别归属于相邻子域。合法性检查包括：分割边位于计算域内部、不与已有约束或分割边发生非端点相交、分割后不产生退化子域，并保持子域边界闭合。

该策略不改变 CDT 本身，而是补充由三角形类别及其邻接关系所反映的局部分割信息。对于相邻 junction 三角形，该处理有助于避免多个分叉结构集中在同一子域中，从而为后续边界分段规划和模板匹配提供相对简单的子域结构。其实际改善程度仍需结合具体几何和网格尺度进行判断。

3.2 狭长四边形与六边形子域的二次分解

初始域分解得到的四边形或六边形子域在拓扑上通常可由模板直接生成，但当不同边界链的分段数差异较大时，模板可能需要在较短距离内完成较多网格线的汇聚或发散，从而增加局部过渡集中、尺寸变化较快或单元角度偏离理想值的可能性。因此，本文以边界网格分段数作为识别狭长子域的主要依据之一，而不单独依赖几何长宽比。本文所称“狭长子域”是指模板对应边链分段数显著失衡的子域，不完全等同于几何长宽比较大的区域。

对于四边形子域，设按环向排列的边界分段数为 n_1,n_2,n_3,n_4，定义两组对边分段失衡指标如式(3)所示。

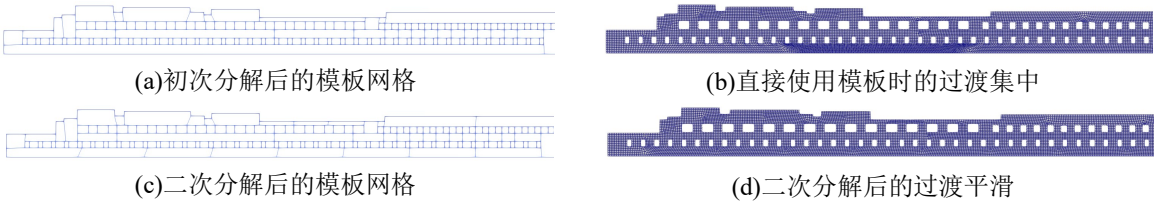
$$|n_0 - n_2| > \min(n_1, n_3) \text{ 或 } |n_1 - n_3| > \min(n_0, n_2) \tag{3}$$

对于六边形子域，设按环向排列的边界分段数为 n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6，定义两组对边分段失衡指标如式(4)所示。

$$n_i > 2*\max(n_{i+1}, n_{i+3} + n_{i+4} + n_{i+5}) \text{ 且 } n_{i+2} > 2*\max(n_{i+1}, n_{i+3} + n_{i+4} + n_{i+5}) \tag{4}$$

当失衡且无法通过小范围分段调整消除时，将该子域标记为待二次分解子域。

对于被识别为狭长子域的区域，二次分解优先在高分段边界链与其对应的低分段边界链之间建立新的内部连接，以尝试将集中于一个模板中的网格过渡分散到两个或多个子域。候选分割点从边界离散节点中选取，并考虑分割后各子域边数及分段均衡程度确定候选分割方案。狭长子域二次分解前后的模板网格及过渡情况如图 3 所示。



(a)初次分解后的模板网格　(b)直接使用模板时的过渡集中

(c)二次分解后的模板网格　(d)二次分解后的过渡平滑

图 3 狭长子域的识别与二次分解结果对比

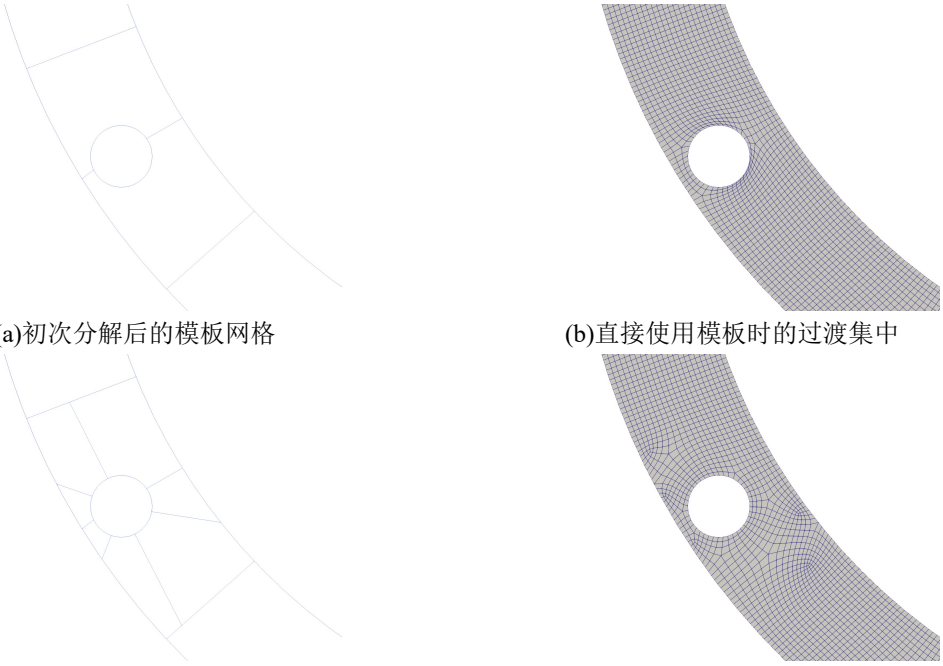
设待分割边为第 i 条边。对于四边形子域，将分解为多个新四边形子域，分割段数 N 如式(5)所示。

$$N = \left\lceil \frac{|n_i - n_{i+2}|}{\min(n_{i+1}, n_{i+3})} \right\rceil \tag{5}$$

对于六边形子域，将距离第 i 条边起点第 n_{i+1} 个点与距离第 i+2 条边终点第 n_{i+1} 个点连接形成新的边，将原有六边形子域分解为一个新的六边形子域与四边形子域。

3.3 强内凹子域的累计内凹角分割

对于具有连续内凹边界的子域，单个顶点的内角可能并未达到较大的异常值，但多段边界方向变化累积后仍可能形成明显回折。若将整条内凹边界链置于同一模板中，参数映射可能出现较强剪切，并增加凹部附近单元角度质量下降的风险。为描述这类由连续边界共同形成的几何特征，本文引入累计内凹角作为辅助判据。内凹子域二次分解前后的网格变化如图 4 所示。



(a)初次分解后的模板网格　(b)直接使用模板时的过渡集中

(c)二次分解后的模板网格　(d)二次分解后的过渡平滑

图 4 内凹子域的识别与二次分解结果对比

设子域边界按逆时针方向排列，顶点 v_i的内角为θ_i。仅累计超过平角的内凹部分，定义边界链 C 上从起点 v_a到顶点 v_k的累计内凹角如式(6)所示。

$$A(k)=\sum \max_{i=a,\ldots,k}(0,\theta_i-\pi) \tag{6}$$

当整条候选内凹链的累计值 A 超过阈值 45°时，将其判定为强内凹子域。

在该链上寻找使 A(k)最接近 A/2 的代表性顶点 v_k，以避免仅依据最大单点内角而忽略整体回折分布。

分割方向取 v_k处两条相邻边单位切向的角平分方向，并指向子域内部。沿该方向发射射线，与不相邻边界或已有内部分割边的首个合法交点构成候选分割边。若首选方向产生过短边、较小夹角或退化子域，则在代表性顶点邻域内依累计角顺序搜索备选点，并综合分割后的累计内凹程度、分割边长度和最小夹角选择方案。该构造旨在降低单一模板承担较强内凹变形的程度，其适用范围仍取决于阈值设置和候选边合法性。

4 算例验证

为验证所提方法的有效性，选取包含相邻分支结构、边界分段显著失衡以及连续强内凹边界的典型二维复杂几何进行测试。所有算例均采用相同的边界目标尺寸设置原则和后处理流程，对比“基础域分解与模板法”和“加入本文子域优化策略”两种结果。计算环境为 Intel(R) Xeon(R) Gold 6248 CPU、64G 内存，程序采用 C++实现。

网格质量采用单元最小内角、最大内角指标进行评价。其中，理想四边形内角为 90°；最小角越大、最大角越小，说明角度畸变越弱。除极值外，同时统计最小角小于 45°和最大角大于 135°的单元数量，以避免仅用个别极端单元代表整体质量。两种方法的典型网格结果如图 5 所示，相应的子域数量及网格质量指标见表 1。

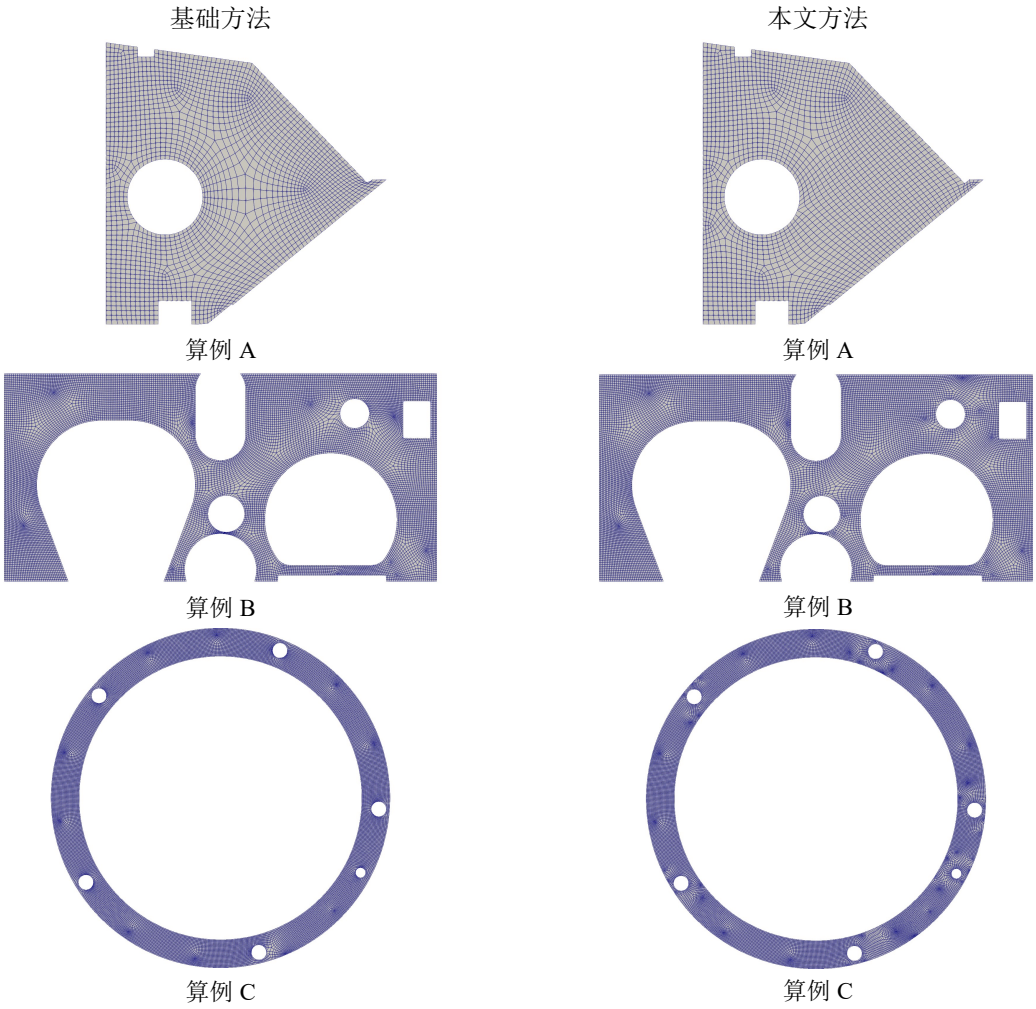


图 5 典型几何工程算例网格结果

表 1 优化前后网格生成结果与质量指标对比

算例	方法	子域数	四边形单元数	最小角/(°)	最小角<45°单元数	最大角/(°)	最大角>135°单元数
A	基础方法	9	2185	11.18	15	203.37	16
	本文方法	12	2199	39.62	4	146.71	8
B	基础方法	20	12740	6.76	23	353.94	40
	本文方法	27	12665	20.17	24	159.96	38
C	基础方法	21	17877	16.33	124	173.31	160
	本文方法	52	17477	33.63	17	151.66	21

由表 1 可见，在所测试的三个算例中，本文方法均提高了最小角，并降低了最大角。算例 A 和 C 中，两类角度超限单元数量均有所减少；算例 B 中，大于 135°的单元数由 40 降至 38，而小于 45°的单元数由 23 增至 24，表明局部极值改善并不一定伴随所有角度超限指标同步改善。二次分解也增加了子域数量，其中算例 C 由 21 个增至 52 个。因此，该处理以增加一定子域数量为代价改善局部网格质量，其收益需要结合子域规模与质量指标综合评价。

5 结论

针对基于域分解与模板法处理复杂工程几何时，部分初始子域虽然满足基本拓扑生成条件，但与模板边界分段配置仍可能不完全适配的问题，本文在既有框架上给出了三类针对性处理策略。对

于相邻 junction 三角形，将其共享 CDT 边补充为分割边，以简化局部分叉结构；对于对应边链分段数明显失衡的四边形和六边形子域，采用二次分解分散模板过渡；对于具有连续强内凹特征的子域，利用累计内凹角选择代表性位置，并沿局部角平分方向构造候选分割边。这些处理主要用于完善域分解与模板生成之间的衔接，并不替代原有的 CDT 域分解、偶数规划和模板生成方法。在本文测试的三个算例中，最小角和最大角指标均得到改善，但不同角度超限指标的变化并不完全一致。

在算法流程上，上述处理可与已有 CDT 域分解、偶数分段规划及模板生成框架衔接，形成“初始域分解修正—首次偶数规划—模板适配性检测—子域二次优化与再次分段协调—模板生成”的处理过程。该流程为复杂工程几何中的局部模板适配问题提供了一种工程化实现思路。其在更广泛几何类型和网格尺度下的质量收益与计算开销，仍需进一步定量评估。后续工作可进一步研究阈值和评价函数权重的自适应确定，以及面向多曲面拼接模型的全局子域优化。

参考文献

[1] BOMMES D, LÉVY B, PIETRONI N, et al. Quad-mesh generation and processing: A survey[J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(6): 51-76.

[2] MA X W, ZHAO G Q. An automated approach to quadrilateral mesh generation with complex geometric feature constraints[J]. Engineering with Computers, 2015, 31(2): 325-345. DOI: 10.1007/s00366-014-0353-2.

[3] MA X W, ZHAO G Q. An algorithm for decomposition of sub-domains and quadrilateral mesh generation with line constraints[J]. Advances in Engineering Software, 2017, 114: 1-10. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2017.05.004.

[4] YANG X, SHAN J L, YU F, et al. Boundary constrained quadrilateral mesh generation based on domain decomposition and templates[J]. Computers & Structures, 2024, 295: 107275. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107275.

[5] GORDON W J, HALL C A. Transfinite element methods: Blending-function interpolation over arbitrary curved element domains[J]. Numerische Mathematik, 1973, 21(2): 109-129. DOI: 10.1007/BF01436298.

HexBlockGen: Generating Simple Hexahedral Block Structures via Volumetric Distance Fields

Zebin Xu, Jiangbei Hu, Zhihui Qi, Zhaolong Hu, Lu He and Na Lei*

Abstract

Background: Volumetric block decomposition determines the global connectivity and overall topological properties of a hexahedral mesh, yet constructing a compact block structure automatically remains difficult. Classical decomposition, frame-field, and polycube pipelines recover block topology through geometric operations and optimization, while existing learning-based methods commonly rely on reinforcement learning for action-sequence prediction or predict polycube representations as intermediate structures.

Methods: We present HexBlockGen, a geometry-conditioned generative framework that encodes a hexahedral block decomposition by three continuous volumetric signals: a volumetric distance field (VDF), a dual volumetric distance field (DVDF), and a block-center offset. A geometry autoencoder supplies the condition, a variational autoencoder represents the block fields, and flow matching generates their latent tokens. A rule-based extractor converts decoded fields into candidate blocks using VDF seeds, center votes, wall assignment, and DVDF corner incidence. Accepted blocks are refined by metric allocation, constraint-based projection, and constrained Laplace smoothing.

Results: Qualitative experiments on geometries with varied shapes and topology show that the predicted fields encode coherent block interiors, interfaces, and corner structures. The deterministic extractor converts these signals into compact coarse block complexes that can be refined toward the input geometry. The observed failure cases reveal sensitivity to features close to the sampling resolution, especially small holes and narrow structures.

Conclusions: Continuous block fields provide a practical representation for learning geometry-to-decomposition priors without directly regressing a variable-size connectivity graph. The current results establish the feasibility of this representation and framework. Since the current training data is primarily derived from polycube-based datasets, the learned decompositions may inherit certain non-optimal singular structures from the training data. These observations are therefore more closely related to the characteristics of the training data than to an inherent limitation of the proposed framework. Comprehensive geometric, topological, and element-quality evaluation, together with more diverse training data, remains an important direction for future work.

Keywords: hexahedral mesh generation; volumetric block decomposition; flow matching

Background and motivation

Hexahedral meshes are widely used in computational mechanics because their tensor-product structure supports directional resolution and can reduce the number of elements required in many finite-element simulations [1]. Their automatic construction nevertheless remains a long-standing geometry-processing problem: a method must determine a valid volumetric topology, align it with geometric features, and realize it with non-inverted, well-shaped cells [2].

Many successful pipelines begin from a coarse volumetric block decomposition. Sweep-based methods explicitly divide a solid into meshable subvolumes [3, 4]; frame-field methods infer irregular topology from a volumetric direction field and its singularities [5, 6, 7]; and polycube methods construct an axis-aligned parameter domain whose cells induce a block structure [8, 9]. These approaches encode strong geometric knowledge, but the relationship between an input shape and an appropriate decomposition remains implicit in designed objectives, cutting operations, or template choices.

Learning offers another way to model this relationship. Neural implicit functions represent geometry continuously [10, 11], and recent systems learn surface direction fields, sequential solid cuts, or polycube structures [12, 13, 14]. SQuadGen further shows that continuous

*Correspondence: nalei@dlut.edu.cn
School of Software, Dalian University of Technology, Dalian, China

chart distance fields can represent a discrete surface layout [15]. HexBlockGen extends this representation principle into the volume. Its aim is not to predict a frame field or a deformed polycube, but to generate spatial fields from which block interiors, interfaces, corners, and adjacency can be recovered.

The contributions of this extended abstract are threefold. First, it describes a continuous representation of volumetric block decompositions using primal and dual distance fields together with center offsets. Second, it summarizes a staged geometry-conditioned latent model and a deterministic continuous-to-discrete extractor. Third, it presents a feature-aware path from the extracted coarse complex to a refined hexahedral mesh, while stating the current empirical scope and limitations explicitly.

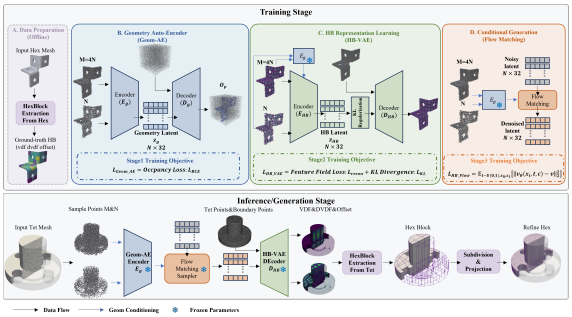


Figure 1 HexBlockGen training and inference pipeline. Ground-truth blocks are converted into VDF, DVDF, and center-offset fields. Geometry encoding, field compression, and geometry-conditioned flow matching are trained in stages. At inference, decoded fields are extracted into a coarse block complex and refined toward the input geometry.

Continuous representation and generative pipeline

Let $\mathcal{G}$ be a geometry with volumetric domain Ω and let $\mathcal{B}$ be a hexahedral block decomposition. Directly predicting $\mathcal{B}$ is difficult because its number of blocks, ordering, and adjacency vary among shapes. We therefore encode it as a queryable signal

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \big(v_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}), d_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}), \mathbf{o}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})\big), \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

where $v_{\mathcal{B}}$ is the VDF, $d_{\mathcal{B}}$ is the DVDF, and $\mathbf{o}_{\mathcal{B}}$ points from a sample to its block center. The learning problem becomes conditional field generation followed by topology extraction:

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}} \sim p_\theta(\mathcal{S}_{\mathcal{B}} \mid \mathcal{G}), \qquad \widehat{\mathcal{B}} = \Psi(\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}). \tag{2}$$

Inside a hexahedral cell, inverse trilinear mapping gives local coordinates $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [-1, 1]^3$. The primal field is high near the block center and low near block faces; the dual field is high near block corners and low toward the complementary dual walls. This construction makes block interiors and junctions observable without assigning a global block index to each training sample. The offset provides an additional grouping cue when field walls are noisy or geometrically close.

Training uses structure-aware samples from block centers, edges, faces, corners, and the volume. The sampler allocates observations to topology-sensitive regions instead of allowing the large, low-field part of the volume to dominate. Boundary queries additionally expose exterior geometry to the decoder.

Figure 1 shows the three learned stages. Geom-AE encodes occupied and empty volumetric samples and reconstructs occupancy. Its frozen geometry tokens condition HB-VAE, whose cross-attention encoder maps structured field samples to latent tokens and whose query decoder reconstructs VDF, DVDF, and offset values. Finally, a transformer velocity model learns a conditional flow between Gaussian noise and HB-VAE latents. For $\mathbf{z}_0 \sim \mathcal{N}(0, I)$, an encoded target $\mathbf{z}_1$, and $t \sim \mathcal{U}[0, 1]$, training uses

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_t &= (1-t)\mathbf{z}_0 + t\mathbf{z}_1, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{FM}} &= \mathbb{E}\Big[\|\mathbf{v}_\theta(\mathbf{z}_t, t, \mathcal{G}) - (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0)\|_2^2\Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

At inference, integrating the learned velocity field yields latent tokens that HB-VAE decodes at tetrahedral carrier vertices and boundary queries.

Block extraction

The extractor evaluates the predicted fields $(u, d, \mathbf{o})$ on a tetrahedral carrier $\mathcal{T} = (V, T)$. Each vertex supplies a center vote $\mathbf{q}_v = \mathbf{x}_v + \mathbf{o}_v$. Figure 2 summarizes the following stages.

Wall and seed detection. Low-VDF and low-DVDF tetrahedra are identified using the minimum field value over their vertices. High-VDF local maxima propose block seeds. Maxima belonging to the same connected VDF superlevel component are merged, and the offset endpoint of each surviving seed defines a chart center. Non-wall tetrahedra form seed-connected cores. Wall vertices vote for their nearest chart center in offset space, and wall tetrahedra inherit labels by vertex-label plurality. Exact ties use neighboring-face support followed by a deterministic incident-label rule. The resulting nonnegative labels define candidate tetrahedral blocks B_k and their partition skin.

Corner extraction and incidence. Active vertices $\mathcal{A}_d = \{v \in V : d_v > \tau_d\}$ induce a global tetrahedral-edge subcomplex. For each connected component meeting the partition skin, the maximum-DVDF skin vertex

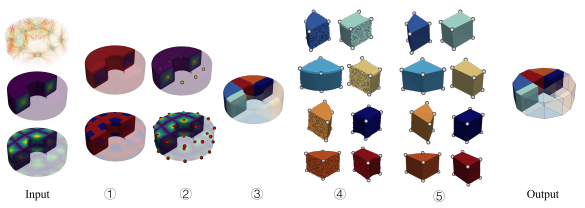


Figure 2 Continuous-to-discrete extraction. Input: offset, VDF, and DVDF. (1) VDF and DVDF wall bands. (2) center seeds and dual-corner candidates. (3) tetrahedral partition. (4) block-corner incidence. (5) constructed coarse cells. Output: the complex stitched by shared corner IDs.

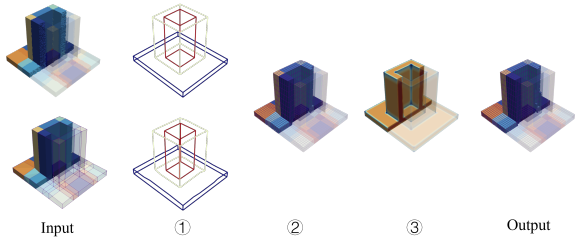


Figure 3 Refinement workflow. Input: labeled reference tets (top) and coarse hex complex (bottom). (1) feature extraction and registration. (2) metric allocation and conforming subdivision. (3) constraint-based projection. Output: constraint-based Laplace smoothing.

is retained as a global corner. For a corner c in component $C_d(c)$, its support is

$$\mathcal{S}_d(c) = \{t \in T : t \text{ contains an active vertex of } C_d(c)\}. \quad (4)$$

Corner c belongs to block B_k exactly when $\mathcal{S}_d(c) \cap B_k \neq \varnothing$. This shared-carrier-tetrahedron test permits a junction corner to belong to several blocks. VDF-component maxima serve as completion candidates, but candidates without valid DVDF support remain unassigned.

Block construction and stitching. For each recovered cluster B_k, its associated global corners provide the candidate vertices, while the tetrahedral representation supplies geometric support for admissible edges and faces. When exactly eight distinct corners are available, a cluster-supported connectivity is constructed as a candidate hexahedron. It is accepted only when the selected cube edges are supported by the corner hull and its minimum scaled Jacobian passes the quality threshold. Clusters with other corner configurations are represented as diagnostic polyhedra constructed from their supported corner geometry. Accepted cells are welded by shared global-corner IDs, and their unique boundary edges form the coarse wireframe. This stage records unresolved cases rather than claiming a guaranteed complete, conforming all-hexahedral complex.

Metric refinement, projection, and smoothing

Accepted coarse cells are refined using the labeled tetrahedral surface as the geometric reference. The implementation follows four data products, shown from input to output in Figure 3.

Feature extraction and registration. Feature corners and curves are extracted from both the reference and the coarse complex. Compatible coarse feature paths are registered to reference feature loops without moving the coarse geometry. Refined vertices inherit geometric degrees of freedom: zero at fixed feature positions, one on registered curves, two on ordinary surface patches, and three in the volume. Unmatched coarse singular edges are not promoted automatically to geometric constraints.

Metric allocation. For coarse cell k, the four edges parallel to local axis $a \in \{u, v, w\}$ define a representative length ℓ_k^a. The subdivision count is

$$n_k^a = \mathrm{clip}(\mathrm{round}(\ell_k^a/h), n_{\min}, n_{\max}). \quad (5)$$

Counts are synchronized over shared edges and corresponding parallel edge families so that adjacent faces receive compatible grids. Trilinear interpolation creates the refined cells, and shared topological keys weld coincident nodes. Fine vertices inherit feature, patch, parent-cell, and block labels.

Constraint-based projection. Refined feature vertices first map to their registered reference corners and curves. Their displacements guide an as-rigid-as-possible surface deformation; ordinary boundary vertices then project to inherited reference patches. Surface displacement is extended harmonically through the volume. Block IDs and carrier wall triangles restrict admissible targets and prevent unrestricted nearest-surface queries from crossing to unrelated geometry. A geometry-only branch uses iterative cluster-restricted projection when no feature vertices are registered. Quality-controlled continuation backtracks motions that would invert valid cells or worsen existing invalid cells.

Constraint-based Laplace output. The inherited surface targets become Dirichlet constraints. Let S and I denote surface and interior vertices, L the accumulated cell-adjacency graph Laplacian, and $\mathbf{P}_S$ the surface targets. Each relaxation proposal satisfies

$$\widehat{\mathbf{X}}_S = \mathbf{P}_S, \qquad L_{II}\widehat{\mathbf{X}}_I = -L_{IS}\mathbf{P}_S. \quad (6)$$

Local backtracking reduces moves incident to failing cells and checks corner Jacobians, scaled Jacobians,

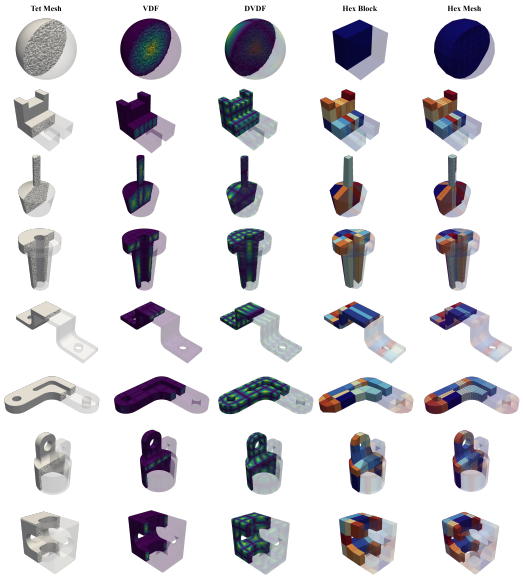


Figure 4 Representative outputs. From left to right: input tetrahedral carrier, predicted VDF, predicted DVDF, extracted coarse block output, and refined hexahedral mesh. The examples demonstrate the common field-to-block pipeline; they do not constitute a quantitative ranking against other methods.

surface folds, quad quality, and short-edge barriers. The last accepted mesh, constraint residuals, and quality statistics are exported.

Experiments

Each training pair contains an input geometry and a target hexahedral decomposition. The target mesh is separated along its singular structure, and every block supplies its cells, boundary faces, and adjacency. Inverse trilinear mapping converts these discrete blocks into VDF, DVDF, and offset supervision. The geometry encoder, HB-VAE, and flow model are optimized sequentially, freezing the previously trained modules at each stage.

The current study focuses on the feasibility of the continuous representation and on the behavior of the complete field-to-block pipeline. Figure 4 presents representative examples spanning different shapes and topological configurations. In these examples, VDF responses identify block interiors, DVDF responses highlight complementary junction structures, and center votes provide an additional cue for block membership. Applying the same deterministic extraction and refinement procedure yields compact coarse complexes and boundary-aligned hexahedral outputs for both rounded and mechanical geometries. These examples demonstrate the common representation and reconstruction mechanism rather than a quantitative ranking against existing methods.

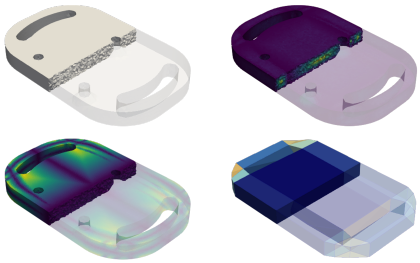


Figure 5 Limitation caused by scale-sensitive field sampling. Top left: input geometry; top right and bottom left: predicted VDF and DVDF, respectively; bottom right: extracted hexahedral block structure. The two large side holes are preserved, whereas the three smaller central holes are lost.

Limitations and conclusion

The principal observed limitation is sensitivity to feature scale. Small holes and narrow passages may occupy too few carrier or decoder samples to produce a stable field response. As shown in Figure 5, the two large side holes produce sufficiently strong VDF and DVDF responses and are retained in the recovered block structure, whereas the three smaller central holes are lost. Once such information is smoothed out in the generated fields, increasing only the resolution of discrete extraction cannot necessarily recover the missing topology. Adaptive sampling, multiscale decoding, and persistent boundary conditioning are promising remedies.

HexBlockGen demonstrates that a variable-size volumetric block decomposition can be represented by continuous, spatially queryable signals and generated conditionally from geometry. The combination of VDF, DVDF, and center offsets separates representation learning from explicit topology recovery, while metric refinement and constrained projection connect the coarse output to a boundary-aligned hexahedral discretization. The present evidence supports the feasibility of this representation and identifies concrete failure modes without claiming comprehensive robustness. Establishing robustness will require the quantitative evaluation described above, particularly complete-model validity and final mesh-quality measurements over a broader benchmark.

Competing interests

The authors declare that they have no competing interests.

References

1. Schneider, T., Hu, Y., Gao, X., Dumas, J., Zorin, D., Panozzo, D.: A large-scale comparison of tetrahedral and hexahedral elements for solving elliptic PDEs with the finite element method. ACM Transactions on Graphics **41**(3), 23–12314 (2022). doi:10.1145/3508372
2. Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., Cherchi, G., Bommes, D., Gao, X., Scateni, R., Ledoux, F., Remacle, J.-F., Livesu, M.: Hex-mesh

generation and processing: A survey. ACM Transactions on Graphics **42**(2) (2023). doi:10.1145/3554920
3. Wu, H., Gao, S.: Automatic swept volume decomposition based on sweep directions extraction for hexahedral meshing. Procedia Engineering **82**, 136–148 (2014). doi:10.1016/j.proeng.2014.10.379
4. Livesu, M., Pietroni, N., Puppo, E., Sheffer, A., Cignoni, P.: LoopyCuts: Practical feature-preserving block decomposition for strongly hex-dominant meshing. ACM Transactions on Graphics **39**(4) (2020). doi:10.1145/3386569.3392472
5. Huang, J., Tong, Y., Wei, H., Bao, H.: Boundary aligned smooth 3D cross-frame field. ACM Transactions on Graphics **30**(6), 143–11438 (2011). doi:10.1145/2024156.2024177
6. Nieser, M., Reitebuch, U., Polthier, K.: CubeCover—parameterization of 3D volumes. Computer Graphics Forum **30**(5), 1397–1406 (2011). doi:10.1111/j.1467-8659.2011.02014.x
7. Liu, H., Zhang, P., Chien, E., Solomon, J., Bommes, D.: Singularity-constrained octahedral fields for hexahedral meshing. ACM Transactions on Graphics **37**(4) (2018). doi:10.1145/3197517.3201344
8. Gregson, J., Sheffer, A., Zhang, E.: All-hex mesh generation via volumetric PolyCube deformation. Computer Graphics Forum **30**(5), 1407–1416 (2011). doi:10.1111/j.1467-8659.2011.02015.x
9. Yu, W., Zhang, K., Wan, S., Li, X.: Optimizing polycube domain construction for hexahedral remeshing. Computer-Aided Design **46**, 58–68 (2014). doi:10.1016/j.cad.2013.08.018
10. Park, J.J., Florence, P., Straub, J., Newcombe, R., Lovegrove, S.: DeepSDF: Learning continuous signed distance functions for shape representation. In: Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 165–174 (2019)
11. Mescheder, L., Oechsle, M., Niemeyer, M., Nowozin, S., Geiger, A.: Occupancy networks: Learning 3D reconstruction in function space. In: Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 4460–4470 (2019)
12. Dielen, A., Lim, I., Lyon, M., Kobbelt, L.: Learning direction fields for quad mesh generation. Computer Graphics Forum **40**(5), 181–191 (2021). doi:10.1111/cgf.14366
13. Zhang, S., Guan, Z., Wang, X., Tan, P., Jiang, H.: Reinforcement learning based automatic block decomposition of solid models for hexahedral meshing. Computer-Aided Design **182**, 103850 (2025). doi:10.1016/j.cad.2025.103850
14. Yu, Y., Fang, Y., Tong, H., Zhang, Y.J.: DL-Polycube: Deep learning enhanced generalized polycube method for high-quality hexahedral mesh generation and volumetric spline construction. Engineering with Computers **41**, 2069–2092 (2025). doi:10.1007/s00366-025-02161-9
15. Kong, Y., Liu, Y., Dong, Y., Tong, X., Shum, H.-Y.: SQuadGen: Generating simple quad layouts via chart distance fields. ACM Transactions on Graphics **45**(4) (2026)

第二部分

海报

面向共形 FDTD 网格的多尺度几何特征表征框架

关振山，冯健，方明

（安徽大学 智能计算与信号处理教育部重点实验室，合肥 230601）

摘　要：针对复杂目标曲面、倾斜面及细小结构在笛卡尔网格中产生的阶梯近似与边界信息丢失问题，提出一种面向共形时域有限差分方法的几何特征表征框架。在保持 Yee 网格拓扑的条件下，通过候选面片筛选、三方向边求交和带符号占据区间累加，计算有效边长，并结合局部占据关系描述网格面的开放区域。针对极小开放面积设置数值下限，以约束局部更新系数。手机结构剖分对比表明，共形表示可保留曲面与斜面轮廓。50 m 舰船在 75 MHz 下的双站 RCS 结果显示，相对 FEKO 参考解，平均绝对差由 1.361 dB 降至 0.968 dB，差值均方根由 1.842 dB 降至 1.282 dB。该框架为规则网格中的复杂边界表示提供了可直接用于共形场更新的几何参数。

关键词：共形网格，时域有限差分，边界求交，几何表征，雷达散射截面

0　引言

时域有限差分方法（FDTD）采用交错配置的 Yee 网格离散电磁场[1]，规则网格便于组织场量存储与显式更新。然而，当目标包含曲面、斜面、孔洞和薄壁结构时，以完整体素近似边界会改变局部轮廓；统一细化网格虽能减小此类偏差，也会增加存储量与时间步数。共形方法通过在规则拓扑内引入边界几何信息，为处理上述问题提供了途径[2-3]。

本文从目标整体面片范围、网格边交点和单元局部占据关系三个层次组织几何信息，将三角面片模型转换为有效边长与面开放面积参数。整体范围用于缩小搜索区域，边交点用于确定截断位置，局部占据关系用于组织边面参数，从而将不同层次的几何信息传递至共形场更新。

1　共形几何参数生成

输入三角面片几何与笛卡尔网格后，首先根据面片在三个坐标方向上的范围筛选候选面片。对于可能相交的网格边，结合投影区域判定和面片平面方程计算交点，并利用面片法向区分边界的进入与离开方向。对同一条边上的多个占据区间进行带符号累加，处理共享顶点、共享边处的重复交点，以减少交点重复计数造成的局部不连续。

设网格边长度为Δu，从中扣除目标在该边上的总占据长度，即可得到边界外有效长度；相应的有效长度比例定义为

$$\ell_{out} = \Delta u - \ell_{occ},\ \eta_e = \frac{\ell_{out}}{\Delta u} \quad (1)$$

这些参数保留边界在原始网格边上的位置，而无需将每个边界单元整体判为内部或外部；随后结合邻近角点状态与局部占据关系组织网格面的开放区域。

对于开放面积较小的单元，采用面积下限避免更新系数的分母趋近于零。本文舰船算例以网格面四条边的有效长度比例均值估计开放面积比例，即

$$\alpha_f \approx \frac{1}{4}\Sigma\eta_e,\ A_{eff} = max(\alpha_f A_{full},\ \alpha_{min}A_{full}) \quad (2)$$

式中，求和遍历网格面的四条边，并以完整网格面面积及数值下限确定有效开放面积。该面积处理属于基于边长的近似，不等同于精确的三角面片切割面积。

2 算例与结果

2.1 手机结构剖分

采用包含圆锥凹腔、台阶及薄片结构的手机部件进行剖分对比，基础网格间距为 0.8 mm。两种表示使用同一笛卡尔网格及完整几何范围。均匀网格将边界单元表示为完整体素，共形网格则记录边界截断位置，并在原始单元内保留曲面和斜面轮廓。

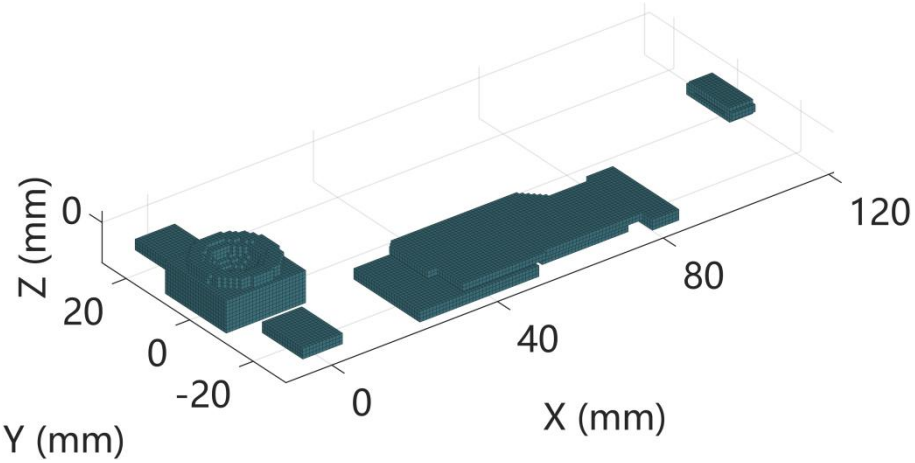


图 1(a)　手机部件的均匀网格剖分

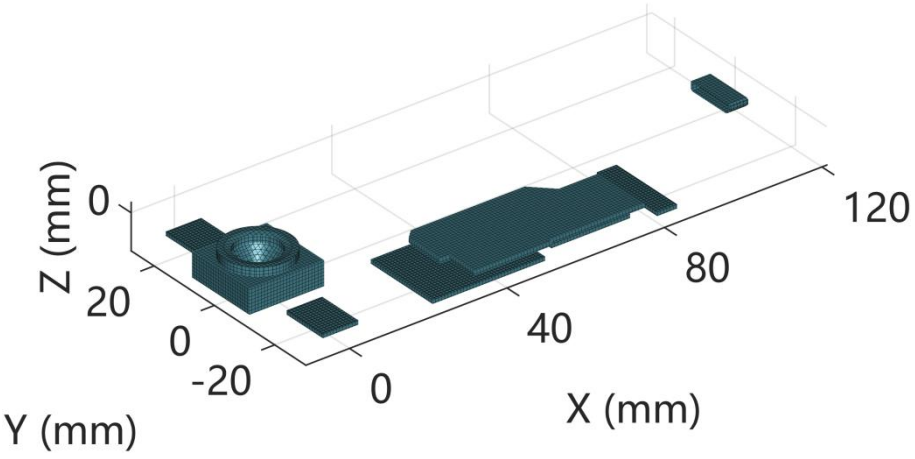


图 1(b)　同一部件的共形网格剖分

图 1 中，共形表示在相同基础网格上保留了圆锥凹腔和斜面的连续轮廓。

2.2 舰船双站 RCS

采用 50 m 理想导体舰船，频率为 75 MHz，基础网格间距约 0.1599 m。两种 FDTD 方案保持相同物理计算时长约 1524.2 ns。外边界采用卷积完全匹配层（CPML）吸收条件[4]。

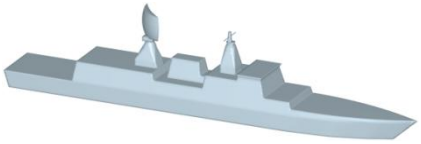


图 2　舰船几何模型

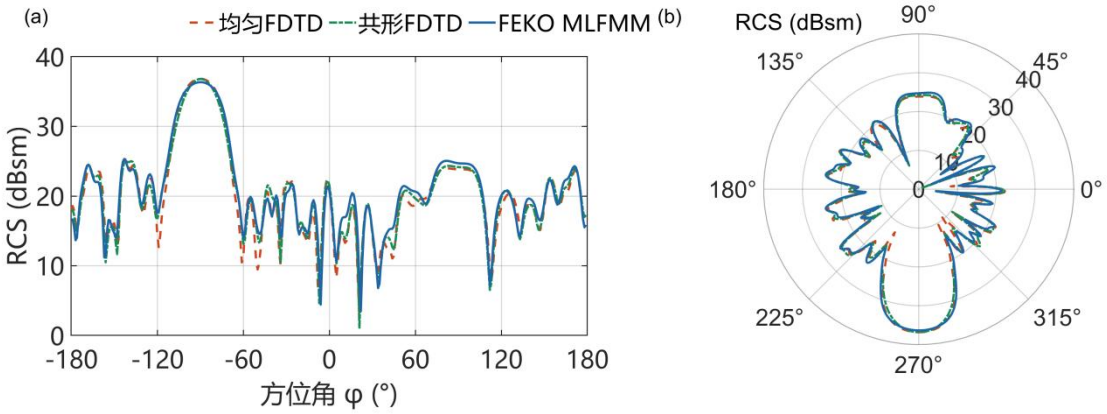


图 3　75 MHz 舰船双站 RCS 对比（a）直角坐标（b）极坐标

图 3 给出同组 360 个方位角的 RCS 分布。以 FEKO MLFMM 为参考，逐点统计平均绝对差（MAE）与差值均方根（RMS），结果见表 1，共形方案的两项差值分别降低约 28.9%和 30.4%。

表 1　两种 FDTD 方案相对 FEKO 的 RCS 差值

差值指标	均匀 FDTD	共形 FDTD
平均绝对差 / dB	1.361	0.968
差值均方根 / dB	1.842	1.282

3　结论

本文在保持 Yee 网格拓扑的条件下，将三角面片边界转换为有效边长与开放面积参数。手机部件展示了共形表示对曲面和斜面轮廓的保留能力；舰船算例中，相对 FEKO 的 MAE 和 RMS 均低于均匀方案。

参考文献

[1] YEE K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1966, 14(3): 302-307. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.

[2] DEY S, MITTRA R. A locally conformal finite-difference time-domain (FDTD) algorithm for modeling three-dimensional perfectly conducting objects[J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1997, 7(9): 273-275. DOI: 10.1109/75.622536.

[3] TAFLOVE A, HAGNESS S C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method[M]. 3rd ed. Artech House, 2005.

[4] RODEN J A, GEDNEY S D. Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2000, 27(5): 334-339. DOI: 10.1002/1098-2760(20001205)27:5<334::AID-MOP14>3.0.CO;2-A.

面向结构网格质量评价的几何感知多阶段专家网络

夏雨[1]，张浩轩[2]，滕晓强[1]，李海生[1,*]

（1. 北京工商大学计算机与人工智能学院，北京

2. 北京航空航天大学软件学院，北京）

摘　要：结构网格质量直接影响计算流体力学数值求解的精度与收敛性。传统评价依赖宽高比、正交性、偏斜率等人工指标及经验阈值，难以统一刻画跨尺度、强方向性和多缺陷耦合导致的网格退化；采用固定特征通路的深度模型又容易使不同缺陷模式在共享表示中相互干扰。为此，提出一种面向结构网格质量评价的几何感知多阶段专家网络。该方法先将单元边长、面积、宽高比、偏斜度、Jacobian 及正交偏差、尺寸突变、对角曲率等几何量组织为规则特征张量，通过多尺度卷积与注意力机制获得兼顾局部变化和整体拓扑的共享表示；随后串联多个混合专家阶段，利用行、列方向全局池化构造几何感知稀疏门控，按输入缺陷特征动态激活少量专长专家，并以不确定性约束和级间残差逐步细化判别边界。网络末端融合全局分类分支与局部专家分支，并采用先整体优化、后冻结专家并微调门控的两阶段训练，以减轻路由坍塌和深层特征过平滑。该框架可为复杂结构网格的自动质量评价以及网格生成软件中的在线评价提供可扩展的实现路径。

关键词：结构网格；质量评价；混合专家；稀疏路由；计算流体力学

0　引　言

高质量计算网格是保证计算流体力学（CFD）离散精度、求解稳定性和收敛效率的基础[1-3]。工程上通常以宽高比、正交性、偏斜率和 Jacobian 等几何量衡量网格质量[10]，但单一指标多针对局部单元，阈值又受网格类型、流动问题及工程经验影响；当边界复杂或多种缺陷并存时，不同指标甚至可能给出不一致判断。因此，如何在减少人工检查的同时综合刻画局部形变与全域拓扑，已成为网格生成流程自动化中的关键环节。

近年来，卷积网络、图神经网络和 Transformer 被用于结构网格质量判别[4-7,11-12]，其优势在于能够从网格几何与拓扑中学习分层表示。然而，现有模型通常让所有样本经过同一组参数和固定计算路径，难以适配差异化的缺陷模式：平滑性缺陷需要关注相邻单元的尺度变化，分布性缺陷依赖更大范围的密度趋势，复合缺陷则需要同时解析局部畸变与整体结构。这些差异被压入单一表示空间后，容易造成特征竞争和缺陷模式混叠。混合专家网络通过条件计算为不同输入分配专用子网络，为解决上述问题提供了新的结构选择[8,13]。

本文据此构建网络，以多尺度共享特征形成稳定的几何先验，以多阶段稀疏专家逐级分离不同缺陷模式，并引入保持结构网格行列方向信息的几何感知门控；同时设置全局与局部双分支和分阶段优化策略，使模型既能把握宏观分布规律，又能定位局部细粒度畸变。

1 方　法

1.1 总体架构

所提网络的总体流程如图 1 所示。首先将二维结构网格转换为多通道特征矩阵；共享编码器完成下采样、通道扩展及多尺度拓扑建模，形成尺度细化的共享特征。该特征一方面进入串联的混合专家阶段，由稀疏路由选择不同感受野的专家并逐级输出局部质量判断；另一方面进入独立的全局分类头，补充对网格整体光顺性和分布趋势的观察。最终通过可学习权重融合两条路径，得到由正交性、光顺性和分布性组合定义的八类质量判别。

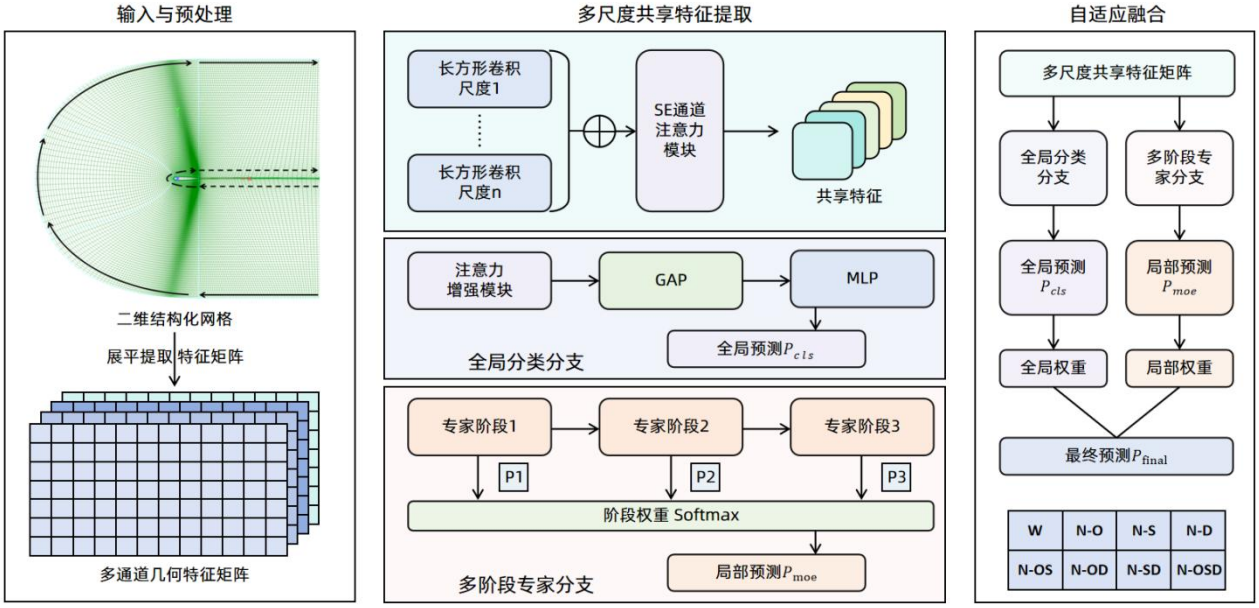


图 1　几何感知多阶段专家网络总体架构

1.2 几何特征表达与多尺度共享编码

原始节点坐标随平移、旋转及网格尺度变化，不宜直接作为唯一输入。本文按四边形单元计算两个主方向边长、面积、宽高比、偏斜度、Jacobian 以及反映正交偏差、局部尺寸突变和对角曲率的几何量，经归一化后按结构网格的行列索引排列为八通道张量。这样既保留规则拓扑，又把与数值稳定性密切相关的几何信息显式交给网络。

共享编码采用并行非对称卷积核扩展感受野，使小尺度分支关注相邻单元突变，大尺度分支描述跨区域的光顺与分布规律；各分支输出拼接后，通过通道注意力[9]和空间注意力抑制无关背景，再与 1×1 卷积对齐的残差相加。其核心计算可概括为：

$$F_{\mathrm{mb}} = Concat_{k\epsilon K}\{GELU[BN(Conv_k(X_{\mathrm{in}}))]\},$$

$$X_{\mathrm{shared}} = SEBlock[Conv(F_{\mathrm{mb}})]$$

由此得到的共享特征既为各专家提供统一的拓扑先验，也直接服务于全局分类分支，从而避免局部专家因稀有缺陷样本而产生过度自信。

1.3 多阶段专家与几何感知稀疏路由

单个专家阶段的结构如图 2 所示。门控网络不把二维特征直接压缩为一个标量，而是分别沿行、列方向做全局平均池化，得到两组一维描述；二者拼接后由 MLP 计算专家权重。这种方向分离保留了边界层拉伸、单元尺度渐变等各向异性线索，使路由选择与结构网格的几何方向相匹配。

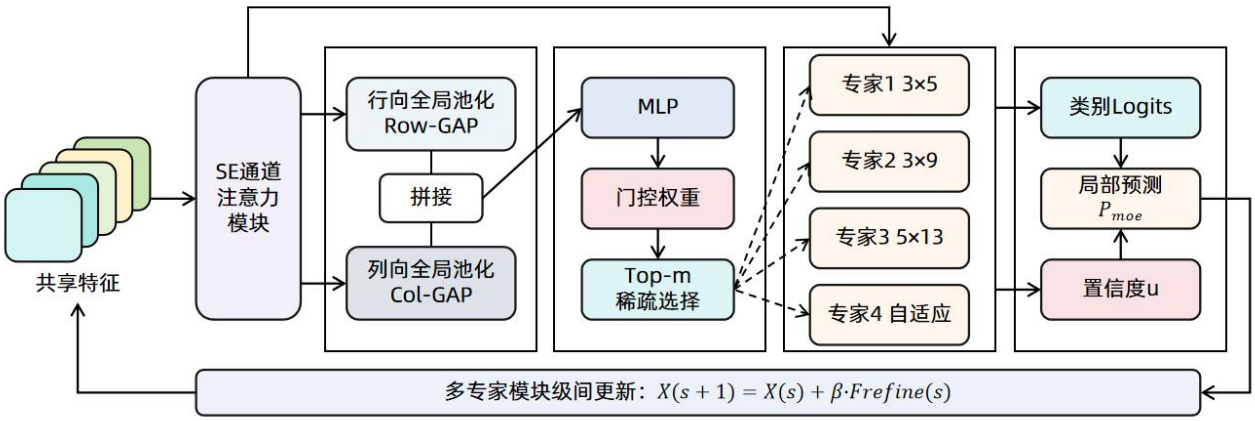


图 2 几何感知混合专家阶段及数据流

$$g_{\text{raw}} = MLP[Row-GAP(X_{\text{shared}}) \,\|\, Col-GAP(X_{\text{shared}})]$$

为控制计算量，门控仅保留权重最大的 Top-m 个专家并经 Softmax 归一化，其余通路置零。各专家采用不同尺度的非对称卷积感受野，分别输出类别概率和自身不确定性；高不确定输出会向均匀分布回退，降低错误高置信判断对融合结果的影响。多个阶段串联后，浅层优先处理明显的基础畸变，深层继续分析难以区分的复合缺陷；级间采用带缩放系数的残差传递，以保持初始拓扑信息并稳定深层训练[14]。

1.4 全局与局部融合及两阶段优化

局部专家对单元突变敏感，但仅依赖局部观察可能忽略全域尺度过渡。为此，所提网络将共享特征并行送入全局分类头，由双注意力、全局平均池化和多层感知机产生宏观预测 P_{cls}；多阶段专家输出按可学习阶段权重合成为 P_{moe}，二者再以可训练系数 λ 联合：

$$P_{\text{final}} = \lambda P_{\text{cls}} + (1-\lambda) P_{\text{moe}}$$

训练时先对共享编码、专家、门控和融合头进行整体优化，使各模块建立基本分工；模型收敛后冻结专家卷积参数，只微调前端深化层与门控网络。这一策略把专家的感受野和特征逻辑固定在相对稳定的空间内，再让门控搜索更合适的稀疏组合，可缓解后期路由震荡、专家负载失衡和深层表示过平滑。

2 结　论

本文针对多指标结构网格质量评价中固定特征通路难以适配异质缺陷的问题，提出一种几何感知多阶段专家网络。方法以显式几何特征和多尺度共享表示为基础，通过保持行列方向信息的稀疏门控动态调用质量评估专长专家，并以阶段级细化、不确定性约束及全局与局部融合统一处理单一与复合缺陷。两阶段优化进一步稳定专家分工和路由决策。

所提网络可作为网格生成软件中的质量检查模块，为自动重划分、局部光顺和参数调整提供质量反馈。现阶段模型仍受公开可用的结构网格质量数据规模有限、以及多阶段专家模型参数量较大的约束；后续将面向复杂三维构型扩充带质量标签的数据，并研究轻量化专家与跨几何迁移。

参 考 文 献：

[1] CHAWNER J R, TAYLOR N J. Progress in geometry modeling and mesh generation toward the CFD vision 2030[C]//AIAA Aviation 2019 Forum. 2019: 2945.

[2] THOMPSON J F, WARSI Z U A, MASTIN C W. Numerical grid generation: foundations and applications[M]. New York: North-Holland, 1985.

[3] KATZ A, SANKARAN V. Mesh quality effects on the accuracy of CFD solutions on unstructured meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(20): 7670-7686.

[4] CHEN X, LIU J, PANG Y, et al. Developing a new mesh quality evaluation method based on convolutional neural network[J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2020, 14(1): 391-400.

[5] WANG Z, CHEN X, LI T, et al. Evaluating mesh quality with graph neural networks[J]. Engineering with Computers, 2022, 38(5): 4663-4673.

[6] LIU Z, LIU H, CHEN Y, et al. Evaluating airfoil mesh quality with transformer[J]. Aerospace, 2023, 10(2): 110.

[7] PENG Q, ZHANG H, LI H, et al. MQ-Fus: A novel mesh quality evaluation method based on dual-branch deep fusion network[J]. Computers & Fluids, 2026, 314: 107088. DOI: 10.1016/j.compfluid.2026.107088.

[8] SHAZEER N, MIRHOSEINI A, MAZIARZ K, et al. Outrageously large neural networks: The sparsely-gated mixture-of-experts layer[EB/OL]. arXiv:1701.06538, 2017.

[9] HU J, SHEN L, SUN G. Squeeze-and-excitation networks[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018: 7132-7141.

[10] KNUPP P M. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(3): 217-241.

[11] ZHANG H, LI H, WU X, et al. MTGNet: Multi-label mesh quality evaluation using topology-guided graph neural network[J]. Engineering with Computers, 2025, 41(1): 321-333.

[12] ZHANG H, LI H, LI N, et al. MQENet: A mesh quality evaluation neural network based on dynamic graph attention[J]. Engineering Computations, 2026, 43(5): 1816-1829. DOI: 10.1108/EC-10-2023-0663.

[13] DAI D, DENG C, ZHAO C, et al. DeepSeekMoE: Towards ultimate expert specialization in mixture-of-experts language models[C]//Proceedings of the 62nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. 2024: 1280-1297.

[14] HE K, ZHANG X, REN S, et al. Identity mappings in deep residual networks[C]//European Conference on Computer Vision. Cham: Springer, 2016: 630-645.

基于深度学习的电子产品几何模型简化方法

龚新博,滕晓强,李海生*

（北京工商大学计算机与人工智能学院，北京）

摘　要：随着计算机辅助设计的快速发展，CAD 几何模型已成为电子产品设计的核心数据载体。然而，高精度的 CAD 模型往往包含大量与工程仿真分析无关的细微几何特征。这些特征虽然对产品外观具有重要意义，但在仿真任务中则会显著增加几何复杂度与求解效率。因此，如何在尽量保持关键几何信息的前提下，对 CAD 模型进行简化具有重要意义。本文针对 CAD 表示形式为边界表示的几何模型特征识别及其简化算法进行研究。针对边界表示模型精确简化前需进行特征分析的问题，本文提出了一种基于深度学习的电子产品几何特征自动识别框架，实现了对电子产品几何特征的精准识别；针对简化过程缺乏合理评估指标的问题，为电子产品几何模型设计了一种基于多因素融合的全局排序决策简化算法，实现了对特征面的仿真重要性排序与合理简化；针对简化后几何模型易出现拓扑缺陷的问题，本文引入拓扑修复机制，最终输出适用于仿真计算的电子产品 CAD 模型。

关键词：边界表示法；模型简化；仿真计算；特征识别；拓扑修复

0 引　言

数字化设计与制造已成为现代工业的核心竞争力，而计算机辅助设计（CAD）作为工业软件的基石，在产品设计与制造领域，高精度 CAD 模型是承载产品几何形状、拓扑关系和工程信息的重要数据基础。

为了满足加工制造的高精度要求，模型中往往包含精细的倒角、圆角、微小的孔洞精细特征等确保产品的装配精度和外观质量，使得当前的 CAD 模型包含了复杂的拓扑关系和工程属性。而高精度的 CAD 模型中存在的细微几何特征与仿真关注的全局物理场分布弱相关。并且这些细小特征会严重影响仿真效率，也可能会导致网格生成过程以及对其进行的有限元分析失败或病态计算，从而产生不准确的分析结果。相反，在对模型进行有限元仿真前对模型预处理可以减少网格划分中细小面片和整体面片数量，极大的增加了仿真效率。因此在仿真计算的预处理中对 CAD 模型的次要结构元素的精确识别和合理简化尤为重要。

随着深度学习在三维视觉领域取得了突破性进展，传统的基于规则的特征识别方法难以针对工业模型中千变万化的交叉特征和非标准几何形状给出准确的识别。因此，本文基于电子产品 CAD 模型提出一种直接作用于边界表示(B-Rep)数据的特征识别网络。

在 B-Rep 模型上直接进行简化操作面临着极大的挑战[1]。一方面，不合理的特征识别算法可能导致模型简化的失败；另一方面，B-Rep 包含复杂的拓扑关系，单纯地删除一个面可能导致拓扑不封闭，引发模型开裂，故本文提出一种拓扑修复机制，最终输出简化后的电子产品 CAD 模型。

1 问题描述

工程实际中，CAD 模型常用于数值仿真，如热分析和结构力学分析。但高精度 CAD 模型通常包含大

量细节特征，这些特征对仿真结果影响有限，却会极大增加网格划分难度和计算量。面向仿真的简化方法应运而生，其核心思想是依据仿真目的有选择地移除或简化模型特征[2]。提前移除如圆角、倒角、小孔等几何细节，可显著降低网格生成的复杂度，提升网格质量和计算可靠性。对于后续仿真处理尤为重要，具体简化前后单元差异如图一所示。

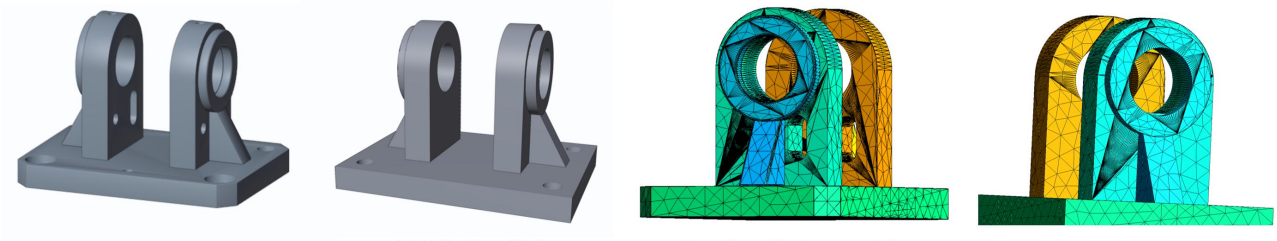


图 1　CAD 模型简化前后对比图

几何特征识别是 CAD 模型简化的基础，本文目标是自动识别如孔、槽、台阶等具有工程意义的局部结构。在传统方法中，研究者设计了大量规则与启发式算法，例如利用曲率分析识别圆角/倒角，根据拓扑邻接识别通孔或盲孔等。此类基于规则的方法在简单模型上通常效果较好，但可扩展性差，对噪声敏感，也难应对特征交叉或不规则新型特征相关研究多数总结特征类型并给出识别流程，但往往需要针对不同结构编写复杂规则，因此难以自动化。另一种方法是将 B-rep 数据预处理为经过充分研究的表示形式，例如图像、体素、点云或三角网格[3-4]。尽管这种转换是合理的，但具有颇多困难和局限且容易失败。转化为离散化表示的点云或体素会损失保真度，并可能丢失映射回原始 B-rep 实体的关键信息。当需要高质量、流形网格时，转换为三角网格可能相当复杂且容易失败。

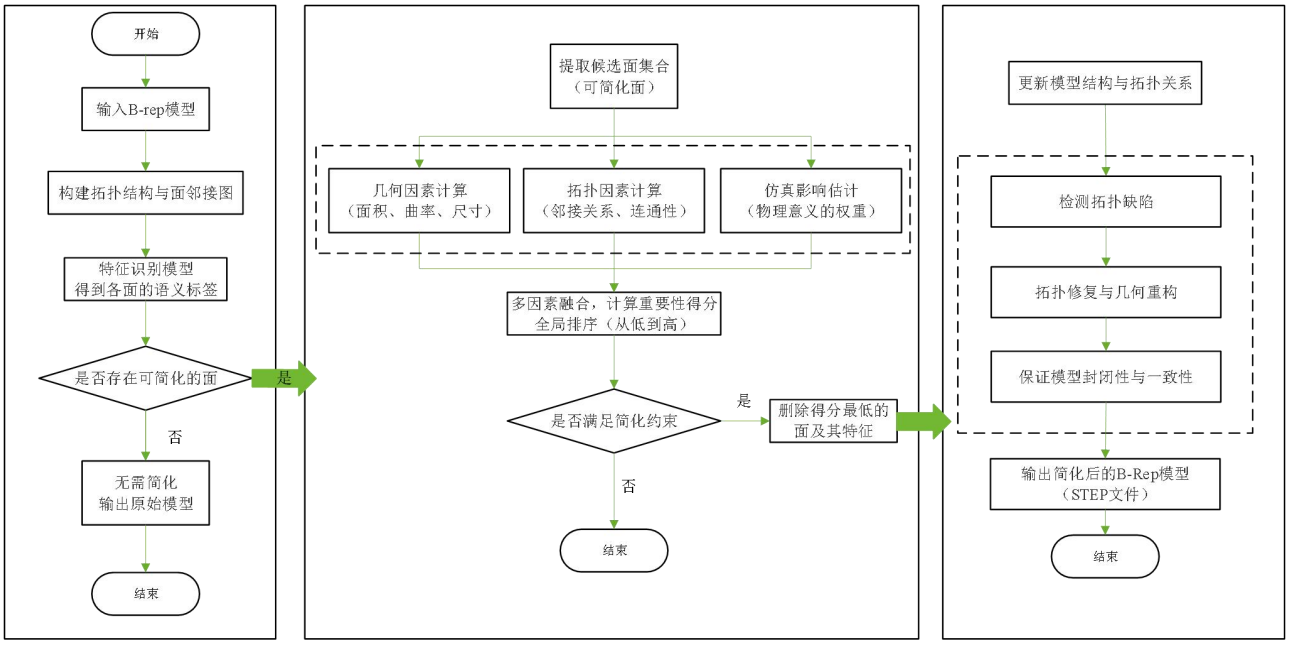


图 2　简化核心流程图

几何深度学习包括了卷积神经网络(CNN)、图神经网络（GNN）等神经网络架构[5]，涵盖了图像、视频、文本等复杂的图数据结构。几何深度学习为非欧几里得几何数据的特征学习提供了新的技术途径[5-6]，已成为 CAD 领域的变革型力量。但将深度神经网络直接应用于 B-rep 数据的研究仍然有限。将 B-rep 数据输入神经网络存在诸多挑战[7-8]。本文直接以 B-Rep 数据为输入，实现模型几何特征的自动识别与简化。图二为本文神经网络架构及核心流程框架图。

B-Rep 是一种用于描述三维实体几何形状与拓扑结构的经典建模方法[9-14]，在计算机辅助设计领域中被广泛应用。与点云、网格或体素等离散表示方法不同，B-Rep 通过对实体边界进行精确建模，从几何与拓扑两个层面统一描述三维对象的结构信息，能够完整表达复杂工业产品的形状特征。B-Rep 模型的一个显著特点在于其几何信息与拓扑信息的分离表示。几何信息用于描述曲线与曲面的具体形状，而拓扑信息用于描述各几何元素之间的连接关系。二者相互关联但相对独立，使得在进行局部修改时可以保持整体结构的一致性。这一特点使 B-Rep 成为现代 CAD 系统的核心数据表示方式之一。然而，由于其包含丰富的几何与拓扑信息，B-Rep 模型的数据结构较为复杂，尤其是在包含大量细小特征时，会显著增加模型处理的难度。实际工程模型中常包含大量倒角、孔等细节结构，这为后续的模型处理与简化带来了挑战。

3D 模型根据其最终应用以不同形式表达。传统上用于简化的方法可以分为基于网格、基于边界表示法或基于点云的，具体取决于输入数据的格式。基于网格的简化方法旨在高效地重构模型，并通过多分辨率建模生成具有不同的网格模型。顶点降采样、顶点聚类以及迭代边收缩是目前一些被使用的基于网格的简化方法。传统网格简化方法多面向离散网格和有机形状模型，难以保持电子产品 CAD 模型的精确几何、拓扑关系和工程语义，因此直接应用于此类模型时存在一定局限。

典型的基于 B-rep 的 CAD 模型简化方法涉及对模型拓扑元素的组成模式进行分析，分析构成模型的拓扑元素和几何信息以确定需要简化的元素，并移除它们。B-rep 方法可以分为基于历史的方法和非基于历史的方法，二者之间的区别在于，前者可以直接使用输入模型设计历史中定义的形体特征并据此进行基于特征的简化。

非基于历史的方法仅依据 B-Rep 模型的几何与拓扑信息进行分析，更适合处理缺少建模历史的工程模型。然而，电子产品 CAD 模型通常包含多尺度、交叉及非标准特征，现有规则方法泛化能力有限；同时，特征能否移除不仅取决于尺寸，还与位置、拓扑关系及仿真边界条件有关。直接删除特征面还可能破坏模型封闭性，导致网格生成失败。因此，本文重点研究几何特征自动识别、仿真重要性排序及简化后的拓扑修复问题。

2 结　论

本文面向电子产品仿真前处理中高精度 CAD 模型几何细节冗余、简化决策依据不足以及简化后易产生拓扑缺陷等问题，提出了一套直接作用于 B-Rep 数据的几何模型简化方法。该方法首先利用深度学习网络识别孔、槽、台阶、倒角和圆角等局部几何特征；随后综合特征尺度、空间位置、拓扑关系及其对仿真任务的潜在影响，构建多因素融合的全局排序策略，确定待简化特征及其处理顺序；最后结合拓扑修复机制完成特征移除和模型重构，以保持简化模型的封闭性、几何一致性和可网格化特性。

所构建的方法形成了从几何特征识别、简化决策到拓扑修复的完整处理流程，可在保留模型主要结构和仿真相关特征的基础上降低几何复杂度，为后续网格生成和数值仿真提供更加适用的电子产品 CAD 模型。后续工作将进一步扩充电子产品 B-Rep 模型数据集，提高模型对交叉特征、复合特征和非标准特征的识别能力，并从网格质量、计算效率及仿真误差等方面开展更系统的定量验证。

参 考 文 献:

[1] KWON S, KIM H, MUN D. Multiobjective evolutionary optimization for feature-based simplification of 3D boundary representation models[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2020, 110(9-10): 2603-2618.

[2] HINZ J, CHANON O, ARRIGONI A, et al. A shape derivative approach to domain simplification[J]. Computer-Aided Design, 2024, 167: 103636.

[3] VIDANES G, TOAL D, ZHANG X, et al. Extending point-based deep learning approaches for better semantic segmentation in CAD[J]. Computer-Aided Design, 2024, 166: 103629.

[4] LEE H, LEE J, KWON S, et al. Simplification of 3D CAD model in voxel form for mechanical parts using generative adversarial networks[J]. Computer-Aided Design, 2023, 163: 103577.

[5] JAYARAMAN P K, SANGHI A, LAMBOURNE J G, et al. UV-Net: Learning from boundary representations[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2021: 11703-11712.

[6] LAMBOURNE J G, WILLIS K D D, JAYARAMAN P K, et al. BRepNet: A topological message passing system for solid models[C]//Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2021: 12773-12782.

[7] XU X, LAMBOURNE J G, JAYARAMAN P K, et al. BrepGen: A B-rep generative diffusion model with structured latent geometry[J]. ACM Transactions on Graphics, 2024, 43(4): 119:1-119:14.

[8] ZHANG S, GUAN Z, JIANG H, et al. Brep2Seq: A dataset and hierarchical deep learning network for reconstruction and generation of computer-aided design models[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2024, 11(1): 110-134.

[9] LEE J, YEO C, CHEON S U, et al. BRepGAT: Graph neural network to segment machining feature faces in a B-rep model[J]. Journal of Computational Design and Engineering, 2023, 10(6): 2384-2400.

[10] ZHANG S, GUAN Z, JIANG H, et al. BrepMFR: Enhancing machining feature recognition in B-rep models through deep learning and domain adaptation[J]. Computer Aided Geometric Design, 2024, 111: 102318.

[11] COLLIGAN A R, ROBINSON T T, NOLAN D C, et al. Hierarchical CADNet: Learning from B-Reps for machining feature recognition[J]. Computer-Aided Design, 2022, 147: 103226.

[12] WU H, LEI R, PENG Y, et al. AAGNet: A graph neural network towards multi-task machining feature recognition[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2024, 86: 102661.

[13] PARK J H, LIM S, YEO C, et al. DFGAT for recognizing design features from a B-rep model for mechanical parts[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2025, 93: 102938.

[14] WANG F, CAO Y, WANG H, et al. AAGATNet: An attentive graph network for machining feature recognition on free-form surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2026, 193: 104041.

基于聚合 AMG 的三维笛卡尔网格欧拉方程求解

李滢艳，陈　浩*，陈　波，马吉斌，朱一红，宋英辰，邹豪，王晨宇

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘　要：笛卡尔网格具有自动生成便捷、拓扑规则及存储效率高等优势，在当前的计算流体力学（CFD）研究和工程应用中被大量采用。然而，基于一阶精确 Roe 格式的三维欧拉方程隐式求解面临较大挑战，网格尺度跳跃导致大时间步长下离散矩阵条件数显著增大，进而引起传统迭代法发散，对气动仿真的计算稳定性与求解效率产生了重要影响。依托现有 CFD 计算框架，提出了一种基于非对角块 Roe 平均态近似的隐式代数多重网格求解方法。与 FAST 软件中已有的 LUSGS 方法相比，该求解方法的计算效率更高。针对典型算例，该方法将收敛步数从 1390 步缩短至 172 步，求解耗时从 1613.28 秒降至 389.02 秒，计算效率提升至 4.14 倍，满足工程应用要求。

关键词：笛卡尔网格，代数多重网格，加速收敛

0　引　　言

三维欧拉方程的精确求解在计算流体力学中具有核心地位，广泛应用于飞行器气动外形设计与推进系统内部流动分析。然而，随着计算规模的急剧增长，传统隐式迭代方法在收敛速率与计算效率方面日益显现出瓶颈。特别是在三维复杂构型流动模拟中，离散所得的大型稀疏代数方程组常面临条件数恶化、内存占用激增等问题，导致常规迭代策略收敛迟缓甚至数值发散，严重制约了高精度气动仿真的高效开展。代数多重网格（AMG）方法凭借其不依赖网格几何拓扑、仅通过矩阵系数构建粗化策略的特性，在椭圆及抛物型偏微分方程求解中展现出卓越的大规模计算能力。然而，针对具有强非对称性与对流主导特征的双曲型欧拉方程，传统 AMG 在粗网格修正阶段易因波传播方向的局部特征丢失而导致迭代不稳定。为突破这一数值瓶颈，本文提出一种基于非对角块 Roe 平均态近似的隐式代数多重网格求解方法。该方法通过重构离散矩阵的谱结构，有效弱化对流项引起的病态特征，显著降低隐式求解过程中的等效 CFL 数阈值，从而大幅提升时间推进的数值稳定性与收敛效率。

1　问题描述

经系统梳理国内外相关文献可知，代数多重网格（AMG）方法虽已在椭圆型与抛物型偏微分方程求解中取得显著成效，但针对三维欧拉方程的隐式求解研究仍相对匮乏。受限于双曲型方程强烈的非对称性与对流主导特征，传统 AMG 策略在粗化过程中易因特征信息丢失而导致迭代失稳，目前尚缺乏兼顾高精度与高鲁棒性的专用求解框架。因此，发展面向三维欧拉方程的高效 AMG 求解方法，已成为突破当前隐式 CFD 求解效率瓶颈的关键研究方向。

2 结　论

为提高三维欧拉方程的隐式求解效率，本文提出一种基于非对角块 Roe 平均态近似的隐式代数多重网格求解方法。该方法通过重构离散矩阵的谱分布特征，有效改善强对流项引发的系统病态问题，显著降低线性方程组的条件数。得益于矩阵条件的优化，该方法大幅拓展了隐式时间推进的稳定适用区间，允许采用更大的有效 CFL 数，从而显著提升整体时间步进的数值稳定性与迭代收敛效率。

未来的研究工作将重点围绕以下两个方面展开：其一，开发支持大规模笛卡尔网格的并行计算版本，以突破复杂构型下的大规模求解瓶颈；其二，进一步优化代数多重网格的跨尺度修正与平滑机制，旨在提高算法可采用的有效 CFL 数，从而扩大隐式时间推进的稳定运行区间。

参 考 文 献:

[1] CHEN R F, Wang Z J. Fast, Block Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Scheme for Arbitrary Grids[J]. AIAA Journal, 2000, 38(12):2238-2245

[2] PALUDETTO M, VICTOR A and FRANCESCHINI, et al. A Novel Algebraic Multigrid Approach Based on Adaptive Smoothing and Prolongation for Ill-Conditioned Systems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2019, 41(1):A190-A219.

基于黎曼几何的灵活保路径曲边 P2 网格生成框架

张蕊丽，章盛祺*

（宁波数字孪生（东方理工）研究院，宁波 315000）

摘　要：高阶曲边网格是提高计算流体力学与有限元分析中几何精度和数值精度的关键技术。现有曲边网格生成方法多侧重于边界贴合和单元有效性，忽视了物理问题的各向异性与曲率特征，导致网格质量和插值精度难以进一步提升。本文在已有黎曼度量驱动的 P2 曲边网格生成框架基础上，提出四项核心算法升级：①一种可局部优化方向数的内部点灵活生成算法，以更好地捕捉各向异性特征；②一种保留顶点生成路径的约束 Delaunay 三角化方法，维持网格边与度量场的对齐；③一种在有效性约束下优化单元质量的直边弯曲算法，避免简单回溯引起的边过长问题；④效率改进的直边交换与曲边交换策略。数值实验表明，升级后的框架能准确捕捉多种典型问题的强各向异性和曲率特征。在主要基准测试中，插值误差稳定降低约 20%，在特定工况下可降低 75%以上，且单元误差分布更加均匀。

关键词：曲边网格生成；网格自适应；黎曼度量场；测地线；约束 Delaunay 三角化；高阶误差

0 引　言

随着计算科学的不断发展，高阶数值方法对网格质量提出了越来越高的要求。曲边网格不仅能够精确贴合复杂几何边界，还能通过调整网格尺寸、方向和曲率来匹配物理问题的各向异性特征，进而显著提升单位自由度上的数值精度[1-4]。然而，传统的曲边网格生成方法多集中于几何保真度与单元有效性，对物理场本身的各向异性与曲率信息利用不足。近年来，基于黎曼度量场的曲边网格自适应技术得到了初步发展，其通过构造包含方向与尺寸信息的度量张量，使得在度量意义下的单位网格能够均匀分布插值误差。但在实际应用中，原有框架存在点生成灵活性差、三角化过程与度量方向脱节、边弯曲优化不足等问题，限制了网格质量的进一步提升。针对上述瓶颈，本文提出了一套全面升级的 P2 曲边网格生成框架。

1　问题描述

已有的曲边网格生成框架通常采用固定的四方向生长策略生成内部点，并通过无约束的 Delaunay 三角化完成网格连接。这种处理方式在面对强烈各向异性或高度弯曲的度量场时，往往会产生与局部特征方向不一致的网格边，导致单元质量下降和插值误差增大。此外，在将直边弯曲为测地抛物线的过程中，原有方法仅以有效性为约束进行回溯，所生成曲边的度量长度可能反而超过对应直边，削弱了曲边网格的优势。这些问题在具有尖锐梯度、大曲率或复杂流动特征的算例中尤为突出。

为此，本文提出以下改进：（1）将每个顶点的备选生长方向从固定的 4 个扩展为 3 至 8 个，并通过

最大化局部网格质量自动选择最优方向数；（2）在点插入过程中记录并保留所有生成路径，在后续三角化时强制这些路径作为约束边，保证网格连接与度量方向的一致性；（3）在直边弯曲时采用约束黄金分割搜索，在严格满足雅可比有效性准则的前提下最小化曲边的度量长度；（4）引入历史列表避免对相同顶点四元组的重复交换判断，显著提升边交换算法的效率。

2 结　论

本文基于黎曼几何框架，对 P2 曲边网格生成的核心算法进行了全面升级。通过引入灵活多方向点生成、保路径约束 Delaunay 三角化、确保有效性的直边弯曲优化以及高效率边交换策略，新框架在保持理论严谨性的同时，大幅提升了网格对复杂物理问题的适应能力。针对解析度量、解析函数以及数值解温度场等多类测试案例，生成的曲边网格均能准确贴合各向异性与弯曲特征。插值误差评估表明，在网格规模相近的条件下，新方法使 2-范数插值误差总体降低约 20%，在部分强非线性区域降幅超过 75%，且单元误差分布更为均匀，极端误差值得到了有效抑制。当前工作正将上述技术推广至二维混合网格，并进一步向三维情形拓展。

参 考 文 献:

[1] R. Zhang, A. Johnen, J.-F. Remacle, Curvilinear mesh adaptation, in: International Meshing Roundtable, Springer, 2018, pp. 57 – 69.

[2] R. Zhang, A. Johnen, J.-F. Remacle, F. Henrotte, A. Bawin, The generation of unit P2 meshes: error estimation and mesh adaptation, in: International Meshing Roundtable, Springer, 2021, pp. 1 – 13.

[3] Zhang, Ruili. Metric-based curvilinear mesh generation and adaptation. Diss. UCLouvain, 2022.

[4] R. Zhang and S. Zhang, A flexible and path preserving framework for curvilinear P2 mesh generation based on Riemannian geometry, Journal of Computational Physics, 2026, 564, 115158.

一种面向投影型自适应笛卡尔网格的并行生成方法

朱一红，陈　浩*，陈　波，邓　亮，李滢艳，赵洪杰，林炳志，马吉斌

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘　要：针对复杂外形绕流仿真中笛卡尔网格生成效率低、并行化面临负载不均衡与边界信息不一致等问题，本文提出一种基于 MPI 的粗粒度并行自适应笛卡尔网格生成方法。该方法采用 Z 曲线对计算域进行空间填充排序，并结合动态重分区机制实现负载均衡。针对几何自适应加密过程，提出相交单元均衡分区策略，通过提取并均匀划分相交单元序列，有效避免加密过程中的负载集中。在边界信息同步方面，设计了基于 MPI 非阻塞通信与批量聚合的同步机制，分别实现跨节点相邻关系同步以及多分区公共点坐标与属性的同步，确保 2:1 平衡与物面投影的全局一致性。在 5 种典型飞行器外形上的算例验证表明，该方法在 16 核下的加速比达到 6.5 至 8.9，显著优于商业软件；相较串行结果，生成的并行网格气动力相对误差小于 1%，可无缝支持流场求解器并行计算。本文方法在保证网格质量与串行等价性的前提下，大幅提升了网格生成效率，具有良好的工程实用价值与通用性。

关键词：笛卡尔网格，自适应技术，并行生成，并行分区，边界信息同步

0　引　　言

笛卡尔网格因其数据结构简单、生成自动化程度高、自适应加密灵活等优点，已成为复杂外形绕流数值模拟的重要网格形式之一[1]。特别是基于投影的笛卡尔网格方法，通过在数模表面投影产生物面网格，兼具了笛卡尔网格的高效性与贴体网格的保型性。然而，在工程快速迭代设计中，单机串行的网格生成方式已成为制约整体仿真效率的瓶颈。因此，将网格生成过程并行化，利用分布式多节点计算资源加速网格生成，是提升整体 CFD 仿真效率、缩短设计周期的关键途径[2][3]。

在分布式多节点环境下，基于投影的笛卡尔网格生成并行化主要面临两大核心挑战：一是全局负载均衡，需优化网格生成任务本身的分配策略，并确保后续流场求解器的计算负载均衡；二是分区边界的拓扑与几何信息一致性，需同步加密过程中的相邻关系及物面网格的公共节点信息，保证网格全局一致性。

1　问题描述

经回顾并分析国内外已有的研究工作，现有研究多侧重于网格生成完成后的静态负载均衡，对于网格生成过程中因几何自适应加密导致的动态负载失衡问题关注不足。在边界信息同步方面，相关研究多侧重于静态网格的边界处理，对于动态加密过程中复杂的相邻关系更新和公共点协调，仍缺乏高效、鲁棒的解决方案。因此，发展一套兼顾负载均衡与信息一致性的高效并行笛卡尔网格生成方法，已成为突

破当前工程仿真效率瓶颈的关键研究方向。

2 结　论

为提高基于投影的自适应笛卡尔网格的生成效率，本文提出了一套基于 MPI 的粗粒度并行生成方法。该方法通过 Z 曲线排序与动态重分区机制，并结合提出的相交单元均衡分区策略，有效解决了几何自适应加密过程中的负载集中问题。同时，通过设计基于 MPI 非阻塞通信与批量聚合的相邻关系同步与公共点同步机制，确保了分区边界拓扑与几何信息的全局一致性。

数值实验表明，该方法在 5 种典型飞行器外形上，16 核加速比稳定在 6.5~8.9，显著优于商业软件 STAR-CCM+。生成的并行网格用于流场求解，气动力相对误差小于 1%，且求解加速比随核数增加保持良好增长，验证了方法的串行等价性与工程实用性。

未来的研究工作将重点围绕以下两个方面展开：其一，在更广泛的数模类型与复杂构型上开展系统性测试，以进一步验证方法的泛化能力；其二，针对投影点集中和部分区域负载不均衡的问题，结合算法优化和任务调度进行针对性改进，以提升并行扩展性，并推进方法的软件化落地部署。

参 考 文 献:

[1] Nakahashi K. Aeronautical CFD in the age of Petaflops-scale computing: From unstructured to Cartesian meshes[J]. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 2013, 40: 75-86.

[2] 赵宁, 刘剑明, 田琳琳, 王镇明. 可压缩流动问题笛卡尔网格模拟方法研究进展与展望[J]. 力学学报, 2025, 57(2): 285-314.

[3] Ren L X, Liu S S, Guo Y Z, He X W, Wu E H. A Survey of GPU-Based Parallel Adaptive Cartesian Grid Modeling Methods and Simulation Applications[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2026, 38(2): 296-312.

减层推进法：非结构附面层网格的自适应生成算法

张庆东，刘　杨*，滕凡，张勇杰，庞宇飞

（中国空气动力研究与发展中心 计算空气动力研究所，绵阳 621000)

摘　要：针对传统推进层法在尖角、凹槽、窄缝等复杂几何特征附近易产生负体积和高扭曲度单元的问题，提出一种基于减层策略的自适应附面层网格生成算法（Decrement Advancing Layer Method, DALM）。该算法以最大推进层数为起点，在逐层推进过程中引入五个层次化的质量控制准则——层差扩散平滑准则、射线安全距离准则、凹特征边角度准则、各向同性准则和单元体积准则，分别判定各物面单元是否应停止推进。推进过程中，间断采用八叉树加速的空间碰撞检测对穿透单元实施推进层回退，并通过层差扩散平滑以保证相邻面推进层数的平缓过渡，以及更新射线安全距离。最后依据各面片实际推进层数的差异，生成由三棱柱、金字塔、四面体和六面体构成的混合单元体网格，实现附面层层数随几何特征的自适应分布。典型算例验证表明：该算法能够消除传统推进层法在高曲率区域产生的负体积单元，所生成网格质量以及效率相较于传统推进层法和商业软件均有明显优势。

关键词：附面层网格；非结构网格；推进层法；自适应减层；碰撞检测；混合网格生成

0　引　　言

在计算流体力学（CFD）中，黏性流动数值模拟的精度在很大程度上取决于壁面附近附面层网格的质量。高雷诺数湍流条件下壁面附近的法向速度梯度远大于切向梯度，要求网格在法向具有极高的分辨率。非结构网格因其对复杂几何外形强大的适应能力，已成为 CFD 网格生成的主流技术。在现有的方法中，推进层法（ALM）因其生成高纵横比单元的能力在实际生产级 CFD 求解器中得到了最广泛的应用。然而传统推进层法仍存在不足：实时碰撞检测效率偏低，缺乏系统的层回退机制；相邻单元推进层数差异过大导致网格质量退化；对四边形表面单元的过渡拓扑缺乏系统化处理。针对上述困难，本文提出的减层推进法（DALM）以最大化推进层数为起点执行层推进，通过约束判定和碰撞检测消除碰撞，最终实现附面层层数随几何特征的自适应分布。

1　算法描述

设定输入物面网格包含顶点集和面片集，用户指定最大层数N、首层高度h_0和增长率r。DALM 的总体流程为：首先提取曲面几何特征，包括特征边识别（二面角阈值 35°）及凹凸分类（形心法）；随后计算初始推进法向并执行加权拉普拉斯平滑。在逐层推进前，基于八叉树加速的 Möller-Trumbore 射线-三角形求交算法预计算每个顶点的安全距离。核心在于五个层次化的质量控制准则：层差扩散平滑准则限制相邻面层差以保证过渡质量；射线安全距离准则根据安全距离判定停止以防止侵入对侧；凹特征边角度准则防止凹角区域单元翻转；各向同性准则在单元趋于各向同性时停止推进；单元体积准则排除负体积单元。推进过程中每 5 层执行一次八叉树加速的全局碰撞检测，采用差异化优先层压缩策略——高

层数面片每次减少 3 层、低层数面片减少 1 层——迭代直至穿透消除。最后根据顶点推进状态的差异，采用模板法生成三棱柱、六面体、金字塔和四面体构成的混合单元体网格，实现附面层层数随几何特征的连续自适应分布，如图 1，图 2 所示。

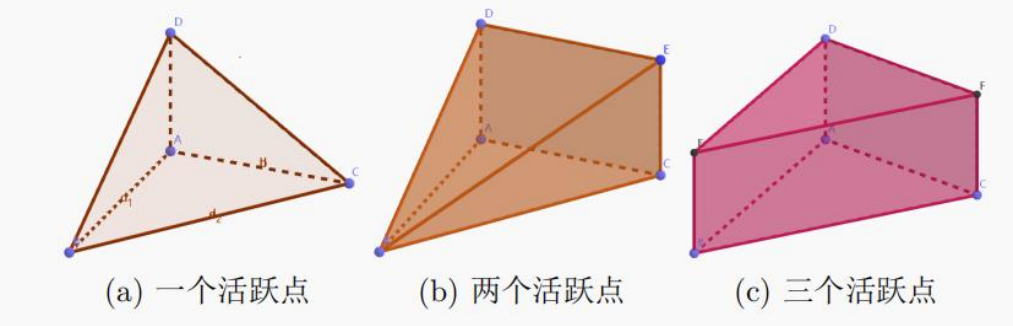


图 1 三角形单元不同活跃点数对应的过渡层单元

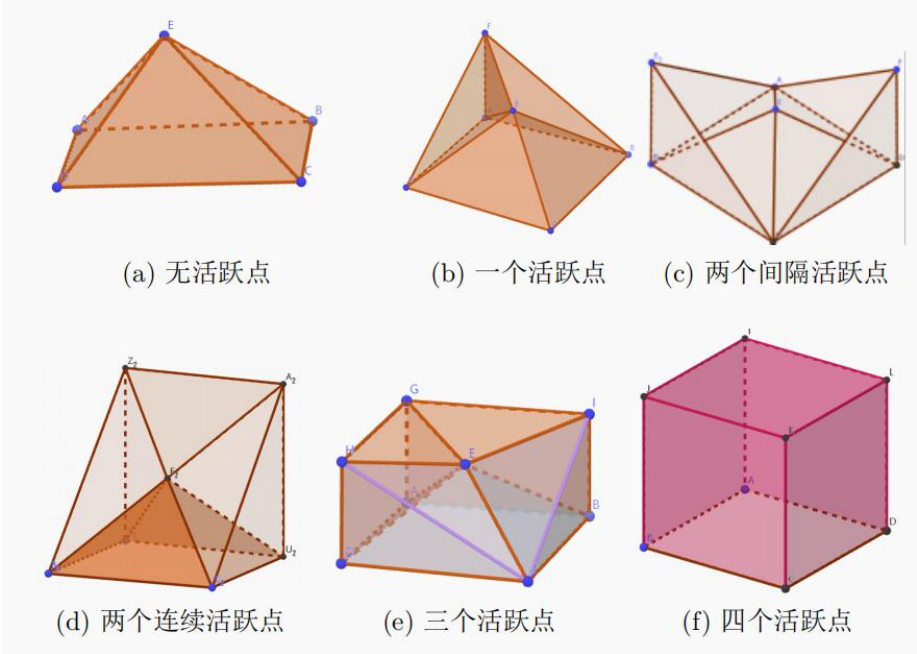


图 2 四边形单元不同活跃点数对应的过渡层单元

DLR F6 模型附面层网格生成与层推法，构造法，商业软件 Pointwise 对比如图 3 所示，经过质量检查，我们的方法在效率和质量上均优于其它三种方法。

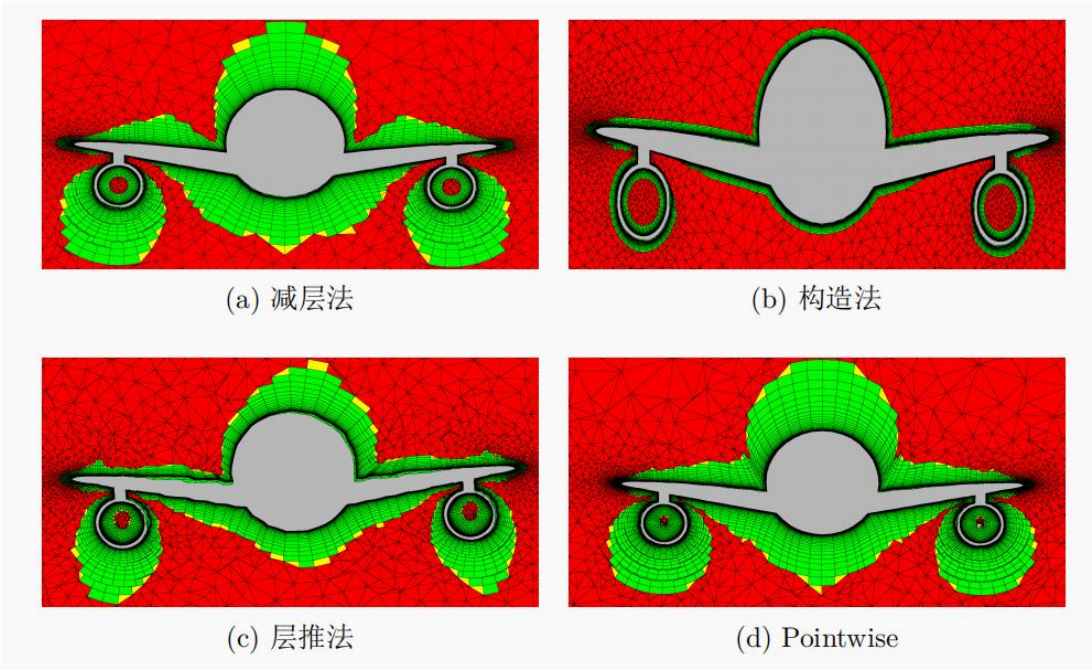


图 3 不同方法 DLR F6 飞机模型附面层切片

2 结　论

本文提出了一种基于减层推进策略的非结构附面层网格自适应生成算法（DALM）。能够快速生成高质量附附面层网格：本文的创新主要在：

1）通过四个层次化的质量控制准则（射线安全距离准则、凹特征边角度准则、各向同性准则和单元体积准则），实现了附面层层数随几何特征的自适应分布，有效避免了复杂几何区域负体积单元的产生。

2）采用八叉树加速的全局碰撞检测与优先层压缩策略，在碰撞后系统性地消除单元穿透问题。优先压缩高层数相交面片（每次减少 1 层），对低层数面片采取相同压缩幅度迭代处理，直至穿透消除。该差异化策略在消除穿透与保留网格厚度之间取得了良好平衡。

3）层差扩散平滑机制有效约束了相邻面的层数差，结合混合单元组装规则，实现了三棱柱、金字塔、四面体和六面体之间的平滑过渡，消除了非流形单元。

参 考 文 献:

[1] Pirzadeh S. Unstructured viscous grid generation by the advancing-layers method[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1735-1737.

[2] Garimella R V, Shephard M S. Boundary layer mesh generation for viscous flow simulations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 49(1-2): 193-218.

[3] Ye H, Chen J, Liu T, et al. Multiple normals configuration on an arbitrary manifold for viscous mesh generation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2022, 123(24): 6079-6110.

[4] Möller T, Trumbore B. Fast, minimum storage ray-triangle intersection[J]. Journal of Graphics Tools, 1997, 2(1): 21-28.

[5] Kallinderis Y, Ward S. Prismatic grid generation for three-dimensional complex geometries[J]. AIAA Journal, 1993, 31(10): 1850-1856.

DRL-MeshOpt：面向高质量多块网格生成的拓扑保持顶点优化方法

杨　轲，陈新海*，刘　杨*，刘杰

（国防科技大学，长沙 410073；中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，绵阳 621000)

摘　要：高质量多块结构化网格的生成是大规模有限元分析中的关键瓶颈。在拓扑连接关系固定的前提下，多块网格的整体保真度本质上受控于其块顶点的空间坐标。然而，传统的块布局优化方法高度依赖专家经验，导致该过程耗时费力且具有高度主观性。此外，现有的智能网格优化方法主要侧重于局部网格单元，无法纠正因次优块布局所引发的大范围网格质量缺陷。为了解决上述局限，我们提出了 DRL-MeshOpt——一种用于自动化块顶点优化的深度强化学习框架。该框架利用图注意力网络提取丰富的顶点几何与拓扑特征，并构建了结合雅可比行列式与斜度指标的复合奖励函数，以实现对顶点位移的精准控制。此外，本文引入了一种结合专家先验与近端策略优化的协同训练机制，以提升探索效率并加速模型收敛。在复杂飞行器部件网格上的实验评估表明，DRL-MeshOpt 能够稳定优化边界层块顶点的位置，使网格整体质量得分提升高达 17%。

关键词：计算流体力学；网格优化；深度强化学习；特征提取

0　引　　言

在计算流体力学（CFD）与大规模有限元数值模拟中，高质量的空间网格离散是建立物理求解域的基本前提。相比于非结构网格，多块结构化网格通过将复杂的几何域分解为拓扑规则的六面体子块，能够实现更高的求解器计算效率、优异的内存访存性能以及对黏性边界层的高分辨率捕获[1]（如图 1 所示）。在多块结构网格系统中，块间的共性接口耦合允许物理量直接进行通量交换，避免了插值带来的数值误差。然而，多块结构化网格的生成存在严苛的拓扑与几何约束。多块网格的宏观骨架与质量本质上取决于块顶点的空间坐标分布。在固定拓扑连接关系下，若块顶点位置指定不当，会导致严重的单元畸变或局部度量退化，进而引发数值不稳定甚至求解器发散。传统的块分解与顶点位置高度依赖人工交互和试错，耗时费力且难以标准化；而现有的中轴变换（MAT）、交叉场追踪等自动块生成方法[2]容易产生高昂的计算开销，且优化能力有限。近年随着深度学习在科学计算中的应用，智能化网格平滑方法（如 GNNRL-Smoothing[3]、GMSNet[4] 等）相继被提出。但现有智能优化方法几乎完全集中于单元级别的局部节点调整。由于块顶点控制着多块网格的宏观拓扑结构，仅限制在块内部的局部调整无法纠正跨块边界与边界层区域的系统性网格缺陷。为此，本文提出了 DRL-MeshOpt 深度强化学习优化框架，将优化目标从局部节点提升至宏观块骨架，实现自动化的拓扑保持顶点优化。

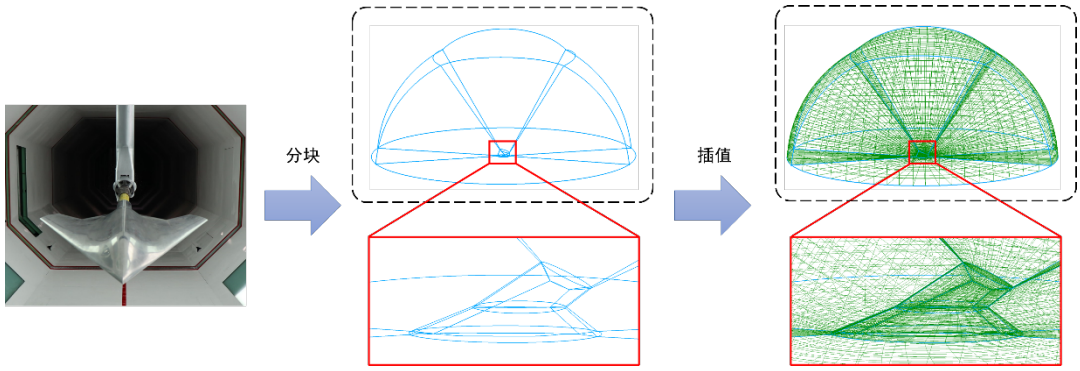


图 1 多块结构网格生成

1 问题描述

通过将块顶点重定位构建为马尔可夫决策过程，本方法将优化目标从局部网格单元提升至全局块骨架（如图 2 所示）。为了定量评估多块结构网格的质量，本文综合考量了六面体单元的归一化雅可比行列式 J_{cell} 与单元斜度指标 S_{cell}。对于基向量为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 的单元，其雅可比与斜度分别计算为：

$$J_{\text{cell}} = \frac{|(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)\cdot \mathbf{e}_3|}{|\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|}$$

$$S_{\text{cell}} = 1 - \max_{f\in\mathcal{F}_{\text{cell}}} |\,\mathbf{d}_f \times \mathbf{n}_f|$$

其中 $\mathbf{d}_f$ 为单元质心至面质心的归一化向量，$\mathbf{n}_f$ 为面法向量。通过几何加权平均得到单个块质量 $Q_{\text{block}} = (\bar{J}_{\text{block}})^{0.5}\cdot(\bar{S}_{\text{block}})^{0.5}$，并构建激活块顶点的局部势能函数：

$$\Phi(s_t) = \frac{\sum_{b\in\mathcal{B}} w_b\, Q_{\text{block},b}}{\sum_{b\in\mathcal{B}} w_b}$$

考虑到边界层内物理梯度陡峭且对网格正交性极度敏感，边界层内的网格块权重设为 $w_b = 1.2$，其他块设为 $w_b = 1.0$。在强化学习状态表达上，针对三维网格中顶点度数不固定的问题，将活动块顶点及其一阶邻域建模为局部子图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$，利用双层图注意力网络（GAT）提取图嵌入特征 $h_{\text{graph}} \in \mathbb{R}^{64}$；同时设计了融合全局网格邻接矩阵与局部特征的双分支 GCN 结构，生成全局专家状态表征 $\mathcal{S}_{\text{exp}}$。在动作空间与几何更新策略方面，智能体输出连续的三维规范化位移向量 $a_t \in [-1.0,1.0]^3$，并利用相连拓扑边上的最小边长进行自适应物理缩放 $\Delta = 0.1\cdot a_t \cdot \min L(e)$。为了解决顶点移动可能引发的块接口边界线褶皱与单元畸变问题，本文设计了基于弧长参数化的协同更新机制。当块顶点发生位移 Δ 时，沿总弧长 L_{total} 距离为 s 的离散边节点按如下公式同步平滑更新：

$$X_{\text{discrete}}^{(t+1)} = X_{\text{discrete}}^{(t)} + \left(1 - \frac{s}{L_{\text{total}}}\right)\Delta$$

在策略训练上，框架构建了结合势能增量、专家模仿惩罚及拓扑失效约束的复合奖励函数：

$$R_t = \begin{cases} (1-\alpha_t)\Delta R_{\text{geo}} - \alpha_t R_{\text{imi}}, & \text{Valid} \\ -1.0, & \text{Invalid} \end{cases}$$

训练过程采用了“离线动作预训练和 PPO 算法微调”的专家引导协同训练机制。在训练初期利用行为克隆学习专家先验，随着训练推进对模仿权重 α_t 进行线性衰减，使得 PPO 智能体能够在新拓扑空间中安全、高效地进行自主探索。

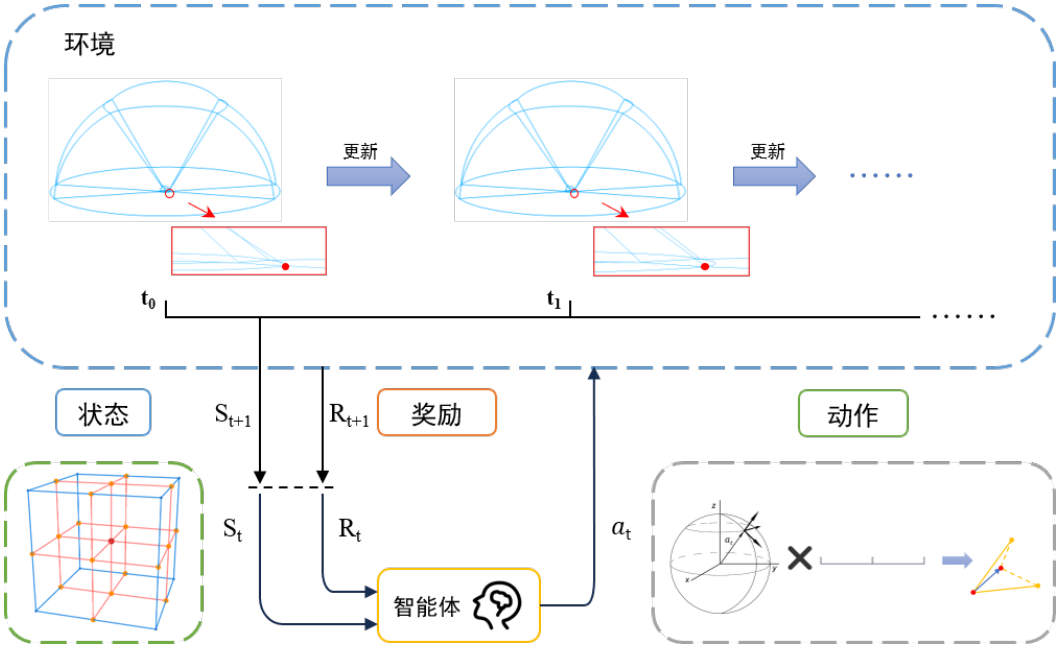


图 2 DRL-MeshOpt 深度强化学习框架

2 结　论

针对多块结构化网格生成中因次优块布局引发的大范围质量缺陷，本文提出的 DRL-MeshOpt 深度强化学习框架实现了从单元节点平滑到宏观块顶点优化的拓扑层级跨越。该框架通过图注意力网络高效提取非规则拓扑特征，借助弧长参数化协同更新机制有效维持了块边界的光滑性与拓扑有效性，并结合离线专家先验与在线 PPO 算法显著提升了模型在复杂空间中的探索效率。在复杂飞行器部件网格上的实验评估表明，DRL-MeshOpt 能够稳定优化边界层块顶点的位置，在完全保持网格拓扑有效性的前提下，使整体网格质量得分提升高达 17%，有效消除了跨块及边界层区域的系统性网格畸变。未来的工作将进一步将该框架扩展至全机带挂架等三维复杂组合体的拓扑顶点优化，探索动态块拓扑与坐标联合优化架构，并将其集成至工业级 CFD 前处理软件中，以全面提升结构化网格生成的自动化与智能化水平。

参 考 文 献:

[1] Shirsat A, Gupta S, Shevare G R. Generation of multi-block topology for discretisation of three-dimensional domains[J]. Computers & Graphics, 1999, 23(1): 45-57.

[2] Ali Z, Dhanasekaran P C, Tucker P G, 等. Optimal multi-block mesh generation for CFD[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2017, 31(4-5): 195-213.

[3] WANG Z, CHEN X, GONG C, 等. GNNRL-Smoothing: A Prior-Free Reinforcement Learning Model for Mesh Smoothing[EB/OL]. (2024-10-19)[2025-04-17]. http://arxiv.org/abs/2410.19834. DOI:10.48550/arXiv.2410.19834.

[4] WANG Z, CHEN X, YAN J, 等. An intelligent mesh-smoothing method with graph neural networks[J/OL]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2025, 26(3): 367-384. DOI:10.1631/FITEE.2300878.

基于几何感知 Hilbert 曲线分区的笛卡尔网格求解器

李奇[1]，徐春光[1,*]

（1 中山大学航空航天学院，深圳 518107）

摘　要：针对复杂几何自适应笛卡尔网格在分布式环境下面临的初始负载不均衡、2:1 平衡通信频繁以及跨层悬挂单元数据交换困难等问题，构建了基于空间填充曲线与全线程树的 SFC-FTT 并行网格生成和流动求解器。FTT 用于网格存储、拓扑维护、邻居搜索与自适应，SFC 有序指针数组用于全局排序、加权分区和并行遍历；在此基础上，引入几何投影密度驱动的预测权重与递归预拆分，提出“局部优先、远程修正”的 2:1 平衡流程，并采用自底向上的细化信息重构跨进程虚拟层、利用哈希表去除通信单元重复项。球体标定中，Cfit=2.5 时预测总量偏差为−2.798%，β=0.35 时实际最大负载因子由 1.341 降至 1.217，首次迁移量减少 21.7%；2:1 平衡远程请求数和通信时间分别减少 57.14%和 78.67%。代表性外形对比及导弹、飞翼流动算例表明，该框架兼具较高网格生成效率、可信的压力主导气动趋势和千核并行可扩展性。

关键词：自适应笛卡尔网格，空间填充曲线，全线程树，负载均衡，并行流动求解

0 引　言

自适应笛卡尔网格具有背景网格构造简单、局部加密灵活和复杂外形处理自动化程度高等特点，已广泛用于嵌入边界计算和高保真计算流体力学。随着几何复杂度与加密层级提高，网格规模可迅速达到千万至十亿量级，网格生成、分区、邻居搜索和跨进程通信必须协同设计，才能保证分布式计算的效率与稳定性[1-3]。

现有线性八叉树便于连续存储与 SFC 分区，但跨层邻居查询、细化和粗化的算法开销较高；指针式树保留父子与邻接关系，却难以直接适配大规模并行排序和迁移。与此同时，按叶子单元数量均分并不等价于工作量均衡：近物面单元、悬挂单元插值、虚拟层交换和边界处理均具有不同代价。粗背景网格还会限制分区最小粒度，使首次几何细化形成显著负载峰值。

为此，本文将几何感知权重分区研究与 SFC-FTT 并行流动求解研究融合，形成从几何加密、预测式初始分区、2:1 平衡、跨层虚拟层构造到 Euler 方程求解与并行验证的一体化技术路线。重点回答三个问题：如何在拓扑扩张前预测负载，如何降低平衡与通信开销，以及如何为多层悬挂单元提供一致的跨进程模板数据。

1 方法与关键技术

SFC-FTT 采用“物理树+逻辑序列”的混合组织方式。FTT 通过成员封装减少子指针数量，并复用叶单元冗余指针建立方向邻接线索，用于网格存储、几何相交检测、邻居搜索与自适应细化；辅助指针数组仅保存叶单元地址，按 Hilbert 编码排序，用于分区、负载迁移和并行遍历。由此无需把原生 FTT 拓扑转换为纯线性八叉树，即可兼顾局部操作效率与全局并行管理。

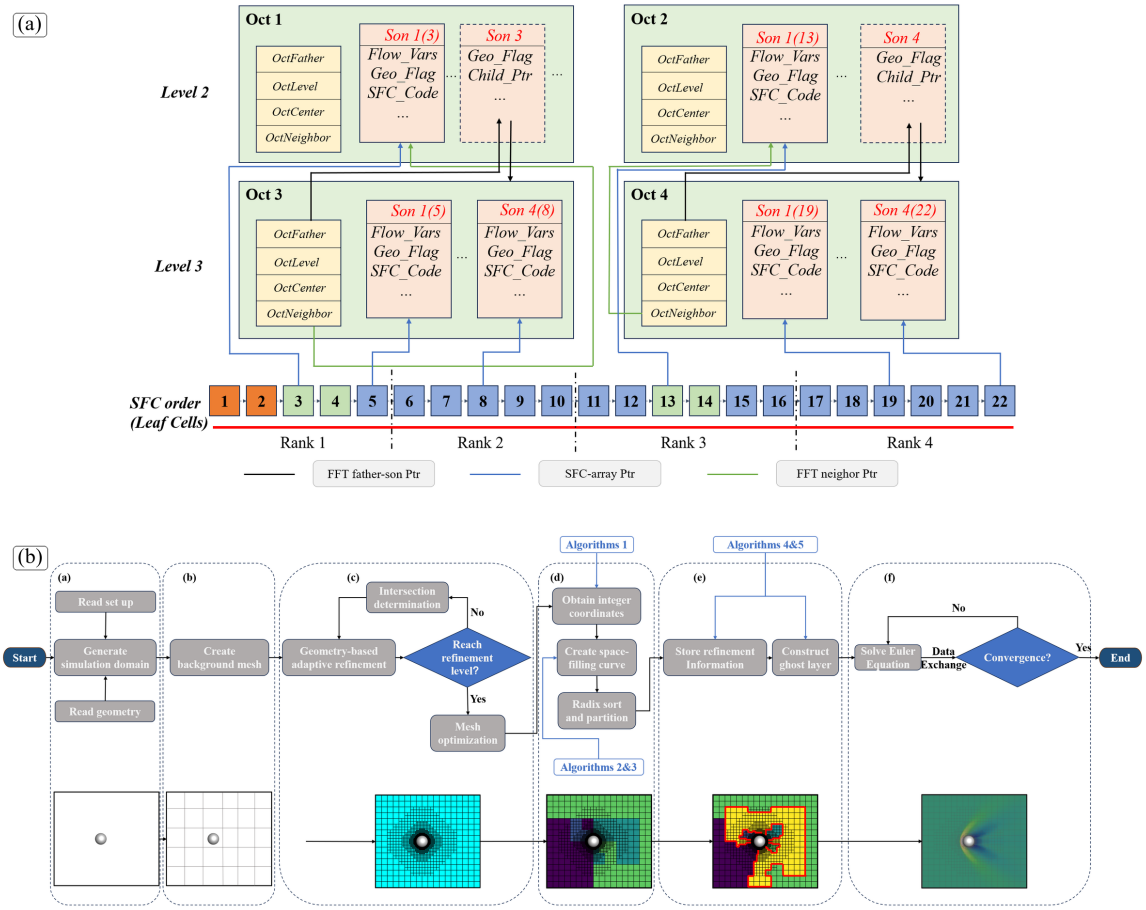


图 1　方法框架：（a）SFC-FTT 混合层次数据结构；（b）自适应笛卡尔网格并行生成与求解流程

为保证多背景树及不同层级叶单元的唯一排序，依据最大细化层级将背景网格坐标和子单元相对位置映射到统一整数坐标，再通过位运算生成全局 Hilbert 码。几何感知分区按图 2 执行：首先对表面三角形在最细网格尺度下三个坐标面的投影覆盖量等权求和，以 Cfit=2.5 将其标定为根单元未来叶子数权重 w(c)；然后计算总权重 W 及目标进程负载 W/P。若最大根单元权重 wmax 超过 β W/P（β=0.35），则沿虚拟八叉树递归预拆分，直至子块达标或达到最大层级，并保持父子权重守恒；最后按 Hilbert 顺序对根单元或预拆分单元执行前缀和加权切分，确定 MPI 归属并按需固化拆分骨架。该流程在拓扑扩张前细化分区粒度，从而解除完整重根单元不可分造成的负载下界[5]。

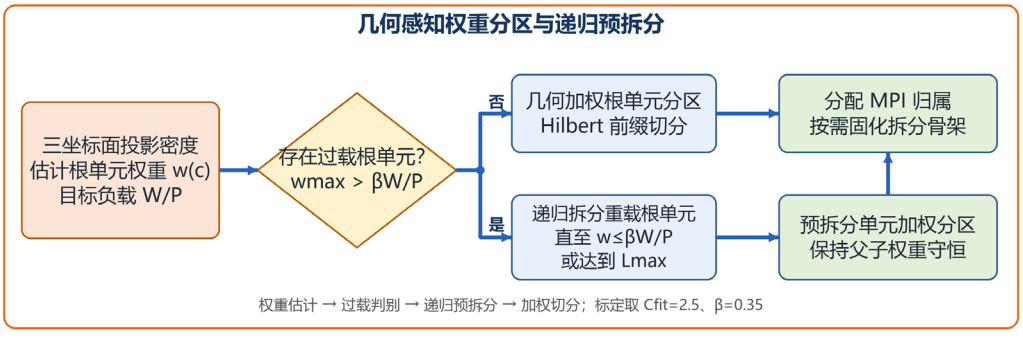


图 2　几何感知权重分区与递归预拆分流程

针对相邻单元尺度比约束，采用“局部优先、远程修正”的并行 2:1 平衡。每个进程先在本地迭代传播并完成无通信收敛；随后仅扫描远程或未知面邻居，将 64 位 Hilbert 位置编码与目标层级组成定长请求发送给所有者进程。接收端一次连续细化至目标层级，MPI 全局逻辑归约仅用于判断跨进程修正是否收敛。该设计把进程内传播与跨进程传播解耦，减少重复远程检查、请求数量和同步轮次[4]。

对于分区边界处的多层悬挂单元，采用自底向上的深度优先遍历记录背景网格编号、细化状态、相对细化位置和分区号；信息以非阻塞通信发送后，接收进程从背景网格自顶向下重构所需虚拟层。通信单元检测以“叶单元 SFC 序号—发送进程—接收进程”为复合键建立开放寻址哈希表，重复项直接跳过，平均查询复杂度接近常数。求解端采用单元中心有限差分框架：粗侧所需值由叶子单元递归平均获得，细侧虚拟同层模板点采用六点距离加权最小二乘插值；固壁使用虚拟单元浸入边界处理。

2 结果与讨论

从负载预测、平衡通信、数据结构效率、超大规模生成及流动求解扩展性对上述方法进行了验证。图 3 给出 STM 导弹与 CHN-F1 飞翼的代表性压力场及气动力曲线，关键并行性能与精度结果在下文按原实验口径列出。

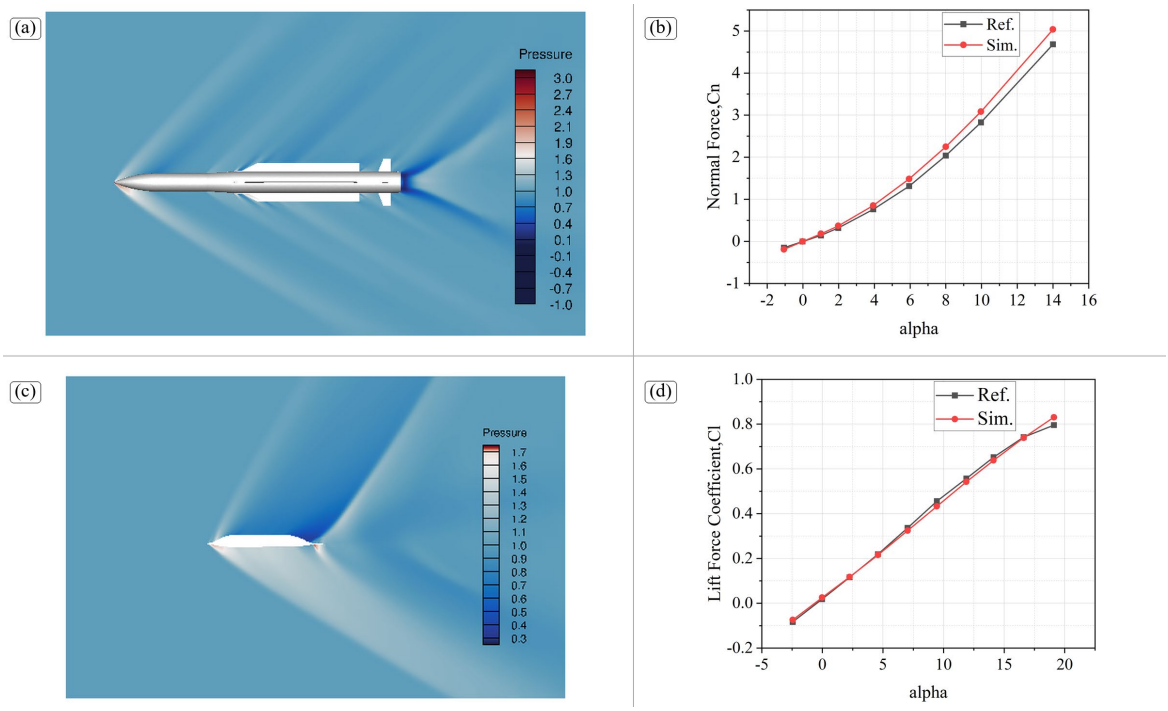


图 3　典型外形的压力场与气动力结果：(a) STM 导弹压力场；(b) STM 导弹法向力系数；(c) CHN-F1 飞翼压力场；(d) CHN-F1 飞翼升力系数

几何预测系数在球体算例上完成标定后，对球、马、兔和 CRM 等复杂外形保持了较好的迁移性，全局叶子数预测偏差位于−6.64%至+7.37%之间。完整预拆分方法使实际最大负载因子由均匀分区的 32.051 和仅加权分区的 8.018 降至 1.217，首次迁移比例由约 98.44%降至 6.89%，总生成时间由 30.252 s 降至 7.199 s。另一组复杂外形测试中，融合几何感知分区与平衡优化后，网格生成时间相对已有方法最高缩短 39.92%。

在求解验证中，NASA Strake-Tail Missile 与 CHN-F1 飞翼分别采用 9492 万和 6698 万网格开展 64—1024 核强扩展测试。Hilbert 分区的叶单元数极差始终仅为 1，导弹算例 1024 核效率为 74.5%，飞翼算例保持在 70%以上；CHN-F1 上 Morton 分区的平均通信时间约比 Hilbert 高 35%。超声速无黏 Euler 计算能够合理捕捉法向力、俯仰力矩、升力和压力主导阻力的总体变化趋势，但不应将其解释为对摩阻、边界层发展和大迎角分离的完整预测[6]。

3 结　论

融合后的 SFC-FTT 框架以 FTT 维持高效拓扑操作，以 SFC 指针数组承担全局排序和并行分区，实现了自适应笛卡尔网格从生成到求解的数据结构统一。几何投影权重和递归预拆分能够在拓扑扩张前识别并细化重载分区单元，显著改善首次几何加密阶段的负载分布。

“局部优先、远程修正”的 2:1 平衡通过目标层级定长请求降低通信量；自底向上的细化信息和哈希去重则为多层悬挂单元的虚拟层重构提供了可扩展的数据交换机制。复杂模型生成、十亿级网格测试以及导弹和飞翼算例共同表明，该方法在网格生成效率、压力主导流动趋势预测和千核强扩展方面具有良好表现。

后续工作将围绕 Cfit 与 β 的自适应确定、面向边界处理和悬挂插值代价的多权重动态分区、分区边界与虚拟层通信优化、黏性及高雷诺数流动模型、制造解收敛验证和 GPU 异构扩展展开。

参 考 文 献：

[1] BURSTEDDE C, WILCOX L C, GHATTAS O. p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2011, 33: 1103-1133.

[2] KHOKHLOV A M. Fully Threaded Tree Algorithms for Adaptive Refinement Fluid Dynamics Simulations[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 143: 519-543.

[3] LI X, YANG M, BI L, et al. An efficient Cartesian mesh generation strategy for complex geometries[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2024, 418: 116564.

[4] SUNDAR H, SAMPATH R S, BIROS G. Bottom-Up Construction and 2:1 Balance Refinement of Linear Octrees in Parallel[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, 30: 2675-2708.

[5] DEVINE K, BOMAN E, HEAPHY R, et al. Zoltan data management services for parallel dynamic applications[J]. Computing in Science & Engineering, 2002, 4: 90-97.

[6] QI X, YANG Y, TIAN L, et al. A parallel methodology of adaptive Cartesian grid for compressible flow simulations[J]. Advances in Aerodynamics, 2022.

RESEARCH

A Novel Structured Mesh Generation Method via Geometry-aware Graph Neural Network

Yingying Shen[1], Haoxuan Zhang[2], Xiaoqun Wu[1*], Xiaoqiang Teng[1] and Haisheng Li[1]

[*]Correspondence:
wuxiaoqun@btbu.edu.cn
[1]School of Computer and Artificial Intelligence, Beijing Technology and Business University, Beijing, 100048, China
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

Existing neural methods for structured mesh generation commonly predict node coordinates independently and therefore underuse the fixed connectivity of the initial mesh. Therefore, we propose a geometry-aware message-enhanced graph network that represents mesh nodes and edges using coordinates and relative geometric features. Standard neighborhood message construction and aggregation are retained, while a Kolmogorov superposition-based node updater improves the nonlinear transformation of node and neighborhood information. After multiple propagation layers, the graph features are decoded into mesh coordinates and optimized using the physics-informed constraints. The proposed framework combines topology-aware geometric propagation with physics-constrained coordinate prediction for complex boundaries.

Keywords: structured mesh; graph neural network; message-passing network; mesh generation

1 Introduction

High-quality structured meshes are essential for stable numerical simulation, but strong boundary deformation can cause cell stretching, distortion, or invalid Jacobians if displacement is not propagated smoothly into the interior [1, 2, 3, 4, 5]. Algebraic methods are efficient but geometry-sensitive, whereas PDE-based approaches improve smoothness at the cost of iterative solution [6, 7]. Physics-informed neural methods avoid target interior meshes by optimizing coordinate mappings through boundary and governing-equation constraints [8, 9, 10].

Most neural mesh mappings nevertheless treat nodes as independent coordinate samples and do not explicitly use the adjacency of the initial mesh [11, 12, 13]. Because structured-mesh deformation is locally coupled, relative directions, distances, and connectivity provide useful information for preserving continuity under complex boundaries.

Graph neural networks provide a natural representation for such local coupling by treating mesh vertices as nodes and mesh connectivity as edges [14, 15]. In a standard message-passing network, neighborhood messages are commonly computed and node states are updated using multilayer perceptrons (MLPs). To improve the nonlinear transformation of the joint node-neighborhood representation while preserving the topology-aware propagation mechanism, we modify only the node-update stage and retain the original message construction and neighborhood aggregation operations [16].

We therefore construct a fixed graph from the initial mesh, encode node coordinates and edge geometry, and propagate local information through multiple

message-passing layers. Standard message construction and aggregation are preserved, while the node updater is parameterized by ActNet to enhance nonlinear feature transformation [17]. The decoded coordinates remain subject to the original physics-informed constraints.

2 Method

2.1 Overall Architecture

The overall workflow is illustrated in Figure 1. Given a prescribed boundary and an initial computational mesh, we construct a graph $G = (V, E)$ from the fixed mesh connectivity, where V denotes mesh nodes and E denotes their adjacency relations.

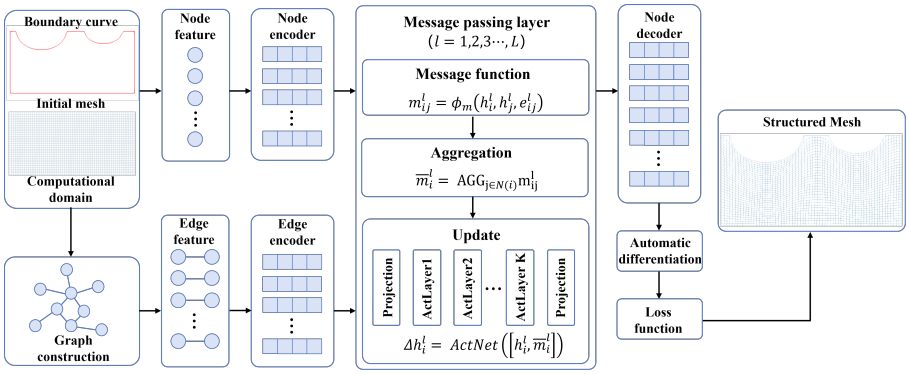


Figure 1 Overall architecture of the geometry-aware message-enhanced graph network.

Node coordinates and relative edge geometry are separately encoded into a common hidden space and processed by L message-passing layers. Each layer performs neighborhood message construction, aggregation, and node updating. The message and aggregation operations follow the standard MPN formulation, while the node updater employs an enhanced nonlinear mapping. After L layers, the resulting node features are decoded into physical coordinates and optimized using the original physics-constrained mesh-generation procedure.

2.2 Graph Representation and Message-Enhanced Propagation

The graph is constructed directly from the connectivity of the initial mesh rather than through additional neighborhood searches. For node i, its computational coordinates define the initial node feature $\mathbf{v}_i = [x_i, y_i]$, which is encoded as $\mathbf{h}_i^0 = f_v(\mathbf{v}_i)$. For an adjacent node pair (i, j), the edge feature and its encoded representation are defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ij}^{\mathrm{raw}} &= [\Delta x_{ij},\, \Delta y_{ij},\, l_{ij}], \\ \Delta x_{ij} &= x_j - x_i, \\ \Delta y_{ij} &= y_j - y_i, \\ l_{ij} &= \sqrt{(\Delta x_{ij})^2 + (\Delta y_{ij})^2}, \\ \mathbf{e}_{ij} &= f_e\left(\mathbf{e}_{ij}^{\mathrm{raw}}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

At the l-th message-passing layer, neighborhood information is first constructed and aggregated as

$$\mathbf{m}_{ij}^{l} = \phi_m\left(\mathbf{h}_i^l, \mathbf{h}_j^l, \mathbf{e}_{ij}\right), \qquad \bar{\mathbf{m}}_i^{l} = \frac{1}{|\mathcal{N}(i)|}\sum_{j\in\mathcal{N}(i)} \mathbf{m}_{ij}^{l}, \tag{2}$$

where $\phi_m(\cdot)$ is implemented as an MLP and $\mathcal{N}(i)$ denotes the neighborhood of node i. The encoded edge features remain fixed across message-passing layers, while the node states are progressively updated.

The current node state and aggregated neighborhood information are then fused by the node-update function:

$$\Delta\mathbf{h}_i^{l} = \phi_u\left(\left[\mathbf{h}_i^l \,\|\, \bar{\mathbf{m}}_i^{l}\right]\right), \qquad \mathbf{h}_i^{l+1} = \mathrm{LN}\left(\mathbf{h}_i^l + \Delta\mathbf{h}_i^{l}\right), \tag{3}$$

where $\|$ denotes feature concatenation and $\mathrm{LN}(\cdot)$ denotes layer normalization. In the implementation, ϕ_u is parameterized by ActNet, consisting of an input projection, K ActLayers, and an output projection. ActNet is used only for node updating, while the message construction and aggregation mechanisms remain unchanged. Here, L denotes the number of message-passing layers, whereas K denotes the number of ActLayers within each node-update module.

2.3 Decoding and Physics-Constrained Mesh Generation

After L message-passing layers, each node obtains a final representation $\mathbf{h}_i^L$ that incorporates both its own positional information and geometric information propagated from its neighborhood. The node decoder predicts the coordinate displacement, and the physical coordinates are obtained as

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{U}_i &= f_d\big(\mathbf{h}_i^L\big) = [\Delta X_i,\, \Delta Y_i], \\ \mathbf{U}_i &= [x_i + \Delta X_i,\, y_i + \Delta Y_i]. \end{aligned} \tag{4}$$

The decoded coordinates are subsequently passed to the original physics-constrained mesh-generation module. Boundary nodes are constrained by the prescribed geometry, while interior nodes are optimized through residuals of the mesh governing equations. The physical residual combines the Navier–Lamé, Laplace, and hyperbolic terms:

$$F_x = \alpha F_x^{\mathrm{NL}} + \beta F_x^{\mathrm{Lap}} + \gamma F_x^{\mathrm{Hyp}}, \qquad F_y = \alpha F_y^{\mathrm{NL}} + \beta F_y^{\mathrm{Lap}} + \gamma F_y^{\mathrm{Hyp}}. \tag{5}$$

where α, β, and γ denote the weighting coefficients of the Navier–Lamé, Laplace, and hyperbolic residual terms, respectively. The network is trained by minimizing the physical residuals together with the boundary constraints. In this way, graph message passing captures local geometric coupling among mesh nodes, while the original physics-informed formulation constrains the final coordinate mapping.

3 Conclusion

This work presents a geometry-aware message-enhanced graph network for structured mesh generation to explicitly exploit the adjacency information contained in the initial mesh. A fixed graph topology is constructed directly from mesh connectivity, while node coordinates and relative edge geometry are encoded as node and edge features. Local geometric information is propagated through multiple message-passing layers. After multi-layer propagation, the final node representations are decoded into physical-domain coordinates and optimized under the existing physics-informed constraints. The proposed framework extends pointwise coordinate prediction to topology-aware neighborhood propagation, allowing the connectivity of the structured mesh to participate directly in coordinate representation.

Appendix

Author details
[1]School of Computer and Artificial Intelligence, Beijing Technology and Business University, Beijing, 100048, China.
[2]School of Software, Beihang University, Beijing, 100191, China.

References

1. Chawner, J.R., Dannenhoffer, J., Taylor, N.J.: Geometry, mesh generation, and the cfd 2030 vision. In: 46th AIAA Fluid Dynamics Conference, p. 3485 (2016)
2. Chawner, J.R., Dannenhoffer, J., Dey, S., Jones, W., Slotnick, J.P., Taylor, N.J.: The path to and state of geometry and meshing in 2030: panel summary. In: 22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, p. 3409 (2015)
3. Chawner, J.R., Taylor, N.J.: Progress in geometry modeling and mesh generation toward the cfd vision 2030. In: AIAA Aviation 2019 Forum, p. 2945 (2019)
4. Zhang, H., Li, H., Wang, P., Li, N.: Surface structured mesh generation system based on symmetry preserving parameterization. International Journal of Wavelets, Multiresolution & Information Processing **22**(4) (2024)
5. Chen, X., Liu, J., Zhang, Q., Liu, J., Wang, Q., Deng, L., Pang, Y.: Developing a novel structured mesh generation method based on deep neural networks. Physics of Fluids **35**(9) (2023)
6. Liou, Y.C., Jeng, Y.N.: A transfinite interpolation method of grid generation based on multipoints. Journal of scientific computing **13**, 105–114 (1998)
7. Karman Jr, S.L., Anderson, W.K., Sahasrabudhe, M.: Mesh generation using unstructured computational meshes and elliptic partial differential equation smoothing. AIAA journal **44**(6), 1277–1286 (2006)
8. Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. Journal of Computational physics **378**, 686–707 (2019)
9. Chen, X., Li, T., Wan, Q., He, X., Gong, C., Pang, Y., Liu, J.: Mgnet: a novel differential mesh generation method based on unsupervised neural networks. Engineering with Computers **38**(5), 4409–4421 (2022)
10. Fang, Z.: A high-efficient hybrid physics-informed neural networks based on convolutional neural network. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems **33**(10), 5514–5526 (2021)
11. Peng, J., Chen, X., Zhang, Q., Deng, L., Shen, L., Liu, J.: A data-free kolmogorov–arnold network-based method for structured mesh generation. Physics of Fluids **36**(11) (2024)
12. Zhang, H., Wang, M., Li, H., Li, N.: Meshkinn: A self-supervised mesh generation model based on kolmogorov–arnold-informed neural network. Expert Systems with Applications **275**, 126959 (2025)
13. Wang, M., Li, H., Zhang, H., Wu, X., Li, N.: Pinn-mg: a physics-informed neural network for mesh generation. Communications in Information and Systems **25**(1), 125–153 (2025)
14. Scarselli, F., Gori, M., Tsoi, A.C., Hagenbuchner, M., Monfardini, G.: The graph neural network model. IEEE Transactions on Neural Networks **20**(1), 61–80 (2009)
15. Kipf, T.N., Welling, M.: Semi-supervised classification with graph convolutional networks. In: International Conference on Learning Representations (2017)
16. Hamilton, W.L., Ying, R., Leskovec, J.: Inductive representation learning on large graphs. In: Advances in Neural Information Processing Systems, vol. 30 (2017)
17. Ferreira Guilhoto, L., Perdikaris, P.: Deep learning alternatives of the kolmogorov superposition theorem. In: International Conference on Learning Representations, vol. 2025, pp. 78241–78269 (2025)

面向复杂曲面的黎曼度量驱动网格生成方法

熊永平，谢冬香，慕茹霜，刘 杨*

（中国空气动力研究与发展中心，绵阳 621000）

摘　要：本文提出一套面向复杂曲面的工程化非结构三角网格生成方法。在曲率计算层面，采用 Rusinkiewicz 张量法直接分析网格法向量微分特性。在参数化层面，通过第一基本形式构建黎曼度量以补偿参数化畸变。在尺寸融合层面，建立五层递进融合模型与三态反馈机制，通过增长标签实现尺寸场的闭环收敛控制。在推进层面，提出 min(d,q)竞争准则统一 AFT 尺寸引导与 Delaunay 拓扑保障。该方法已在 NNW-GridStar 中实现，经工业模型验证满足工程要求。

关键词：表面网格生成；黎曼度量；尺寸场融合；Delaunay-AFT

0 引　言

网格生成技术是数值仿真的基础支撑，高质量网格需满足单元形状质量、尺寸自适应和梯度控制三项要求。工程实践中大量 CAD 模型的表面网格普遍存在细长三角形、尺寸过渡不均等缺陷，催生了网格重划分技术的发展[1]。Delaunay 三角化保证了全局拓扑最优[2]，但对尺寸场缺乏局部控制力。AFT 通过沿前沿边法向推进实现了精细的局部控制，但全局冲突检测是其性能瓶颈。曲面参数化将三维问题降至二维，但参数化畸变需要黎曼度量框架补偿。本文通过尺寸场融合与反馈控制机制提升工程适应性，后文将 Delaunay-AFT 简记为 DAFT。

1 问题描述

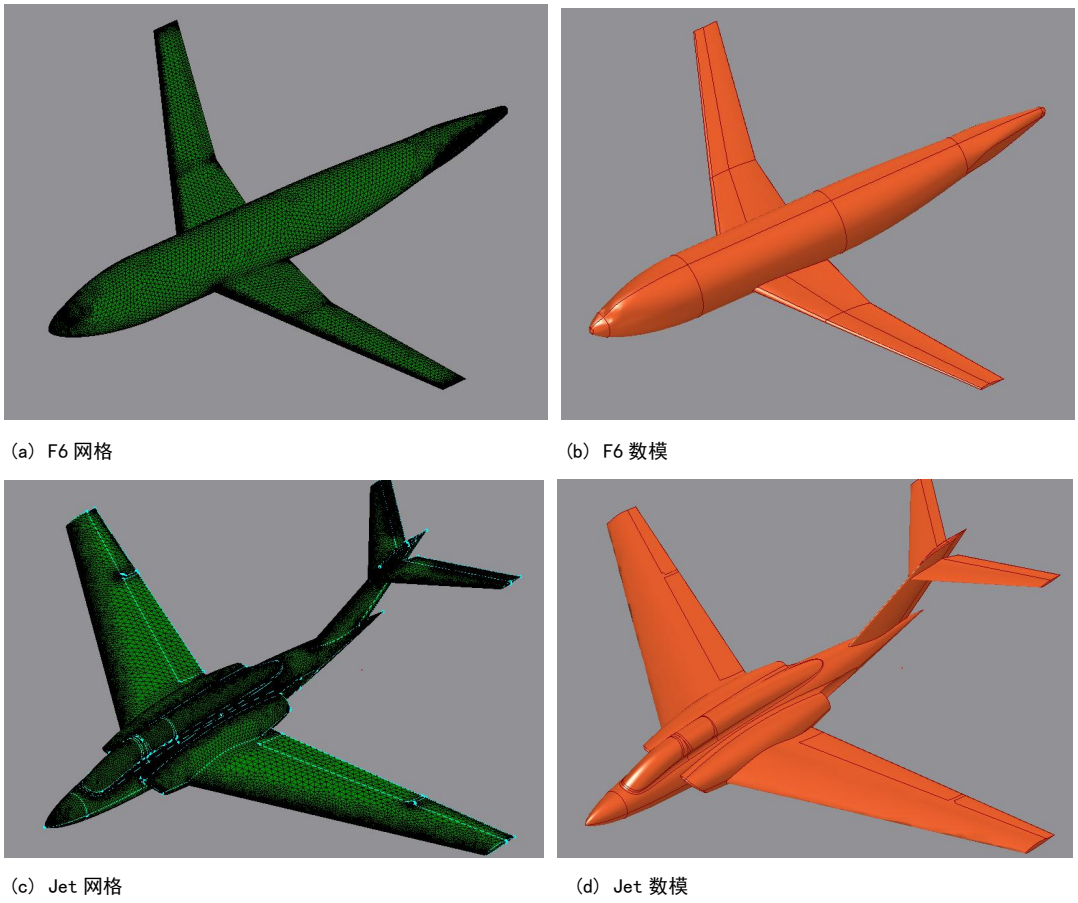
(1) 几何曲面的参数化与度量重建。输入数据经参数化映射到二维域，但任何参数化都引入畸变——调和映射保角但面积畸变显著，最小二乘映射控制面积但特征区可能自交。更根本的问题在于参数域距离不再对应三维曲面的真实弧长，参数域中的等边三角形逆映射后可能被严重拉伸。

(2) 多源尺寸约束的冲突与融合。工程网格尺寸受曲率加密、预设点线尺寸、背景场约束、实体缩放等多因素共同约束，来源不同且作用重叠，天然存在冲突。不同来源的度量张量可能具有不同的特征方向，融合需要在张量空间中进行而非简单的数值比较。

(3) Delaunay 与 AFT 两种范式的融合。Delaunay 法保证全局拓扑最优却缺乏节点位置控制力；AFT 直接驱动尺寸场布局但全局冲突检测是公认瓶颈。两种范式融合的实质在于设计统一推进准则，使新点同时满足尺寸场匹配和 Delaunay 空圆性质。

针对以上挑战，本文在曲率估算中采用 Rusinkiewicz 张量法，在参数化中引入黎曼度量框架（通过 Jacobi 矩阵构建度量张量），在边界离散中实施端点尺寸计算加曲率自适应采样，在尺寸控制中建立五层递进融合（全局默认尺寸、全局最小尺寸、预设点线尺寸、曲率尺寸、背景场尺寸）与三态反馈机制，

在推进中通过 min(d,q)竞争准则（d 为等边三角形高，q 为外心到边中点的度量距离）统一两种范式，并辅以 Laplace 光顺作后处理。该方法在 NNW-GridStar 网格生成引擎中实现。



(a) F6 网格　(b) F6 数模

(c) Jet 网格　(d) Jet 数模

图 1 三角化效果图

图 1 展示了 F6 与 Jet 模型以及其三角化效果。

2 结　论

本文构建了黎曼度量驱动的表面网格生成方法，主要贡献包括：(1)通过第一基本形式构建黎曼度量为 DAFT 推进提供统一度量框架；(2)建立五层尺寸场融合与三态反馈控制机制；(3)提出 min(d,q)竞争准则统一 AFT 局部控制与 Delaunay 全局拓扑。该方法已在 NNW-GridStar 引擎中实现并满足工程要求。后续工作包括自适应预测和并行 DAFT 算法。

参 考 文 献:

[1] Hu Y, Schneider T, Wang B, Zorin D, Panozzo D. Fast tetrahedral meshing in the wild[J]. ACM Trans. Graph., 2020, 39(4): 1-18.

[2] Alexa M. Conforming weighted Delaunay triangulations[J]. ACM Trans. Graph., 2020, 39(6): 1-16.

RESEARCH

Fifth-Order Hyperbolic-Tangent WCNS Method Coupled with Penalization Boundary Treatment on Cartesian Grids

Qinghong Tang and Yanqun Jiang*

Abstract

Body-fitted mesh generation for complex geometries is often computationally demanding. This study develops a high-resolution method for compressible flows on uniform Cartesian grids. The inviscid flux is discretized using a fifth-order hyperbolic-tangent weighted compact nonlinear scheme (WCNS). Solid walls are imposed through a Brinkman penalization source term controlled by a compact-support solid indicator function. An equivalent analytical update removes the stiffness constraint associated with a small relaxation scale. In a two-dimensional Riemann problem, the method clearly resolves shocks, contact discontinuities, and small-scale vortical structures. For flow past a circular cylinder at $Re = 100$ and $Ma_\infty = 0.2$, statistics are collected over ten complete periods and verified by comparing the first and second halves of the sampling window. The results indicate that the penalization boundary treatment can robustly handle irregular solid walls without body-fitted meshes while retaining shock-capturing capability and adequate resolution of periodic wakes.

Keywords: Cartesian grid; penalization boundary method; weighted compact nonlinear scheme; hyperbolic-tangent interpolation; compressible flow

1 Numerical method

On a fixed Cartesian grid, the governing equations with the penalization source term are written as

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \nabla\cdot \boldsymbol{F}_c = \nabla\cdot \boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{S}_p, \\ &\boldsymbol{S}_p = -\frac{\chi}{\eta_p}[0, \rho(u-u_s), \rho(v-v_s), E-E_s]^T. \end{aligned} \tag{1}$$

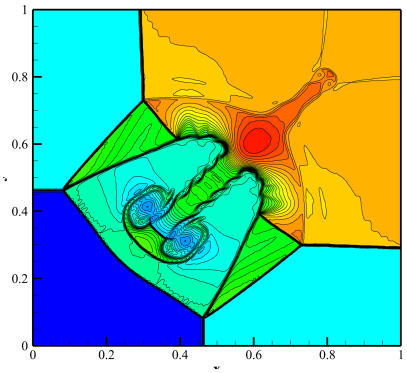
Here, $\phi(\boldsymbol{x})$ is the signed distance function to the solid surface, with $\phi > 0$ on the fluid side. To reduce the wall displacement induced by the diffuse interface, a compact-support C^1 solid indicator function with transition width $\varepsilon_\chi = 0.5h$ is adopted:

$$\chi(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi \le -\varepsilon_\chi, \\ \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{\phi}{\varepsilon_\chi} - \dfrac{1}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi\phi}{\varepsilon_\chi}\right)\right], & |\phi| < \varepsilon_\chi, \\ 0, & \phi \ge \varepsilon_\chi. \end{cases} \tag{2}$$

The penalization term drives the conservative variables inside the solid region toward their target states[5]. For a stationary cylinder, $u_s = v_s = 0$, while E_s retains the local internal energy to impose an adiabatic no-slip wall. In this study, $\eta_p = 0.10h$. At each RK stage, χ/η_p is replaced by $\lambda_p = [1 - \exp(-\chi\Delta t/\eta_p)]/\Delta t$. This treatment prevents the small relaxation scale from restricting the time step. Uniform inflow and non-reflecting outflow conditions are imposed at the outer boundaries[1, 2]. Aerodynamic forces are obtained by an independent surface integration of the pressure and viscous stresses on the fluid side. The ghost-cell result is included as an immersed-boundary reference[6].

The inviscid flux is evaluated using local Lax–Friedrichs splitting and characteristic-wise reconstruction. The global stencil $S = \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$ is divided into three substencils $S_k = \{i+k-2, i+k-1, i+k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Let $\theta = r\Delta x$, $\mathcal{Z}_m = \tanh(m\theta)$ $(m = -2, \ldots, 2)$, and $\mathcal{Z}_{1/2} = \tanh(\theta/2)$. The substencil interpolants and their linear combination over the

*Correspondence: jyq2005@mail.ustc.edu.cn
School of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, 621010, Mianyang, Sichuan, China
Full list of author information is available at the end of the article



(a) Density contours for the two-dimensional Riemann problem

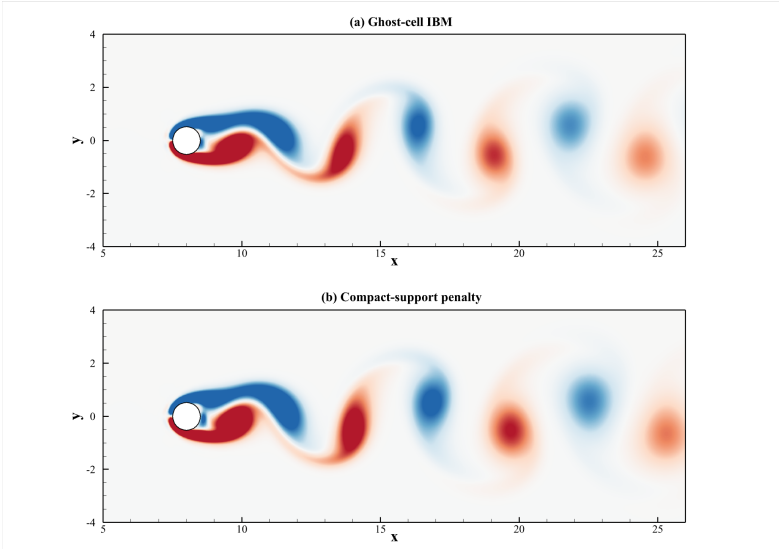


Figure 1 Density contours for the two-dimensional Riemann problem and vorticity fields for flow past a circular cylinder at $Re = 100$. The upper and lower cylinder-flow results correspond to the ghost-cell IBM and the compact-support penalization method, respectively.

Table 1 Quantitative results for flow past a circular cylinder at $Re = 100$, where D is the characteristic length, St is the Strouhal number, $\overline{C}_D$ is the time-averaged drag coefficient, and $C_{L,\mathrm{rms}}$ is the root-mean-square lift coefficient.

Method/force evaluation	$\overline{C}_D$	$C_{L,\mathrm{rms}}$	St	L_r/D
Reference result[4] ($Ma_\infty = 0.2$)	1.3190	–	0.1582	–
Ghost-cell IBM, surface integration	1.2997	0.2151	0.16697	1.2603
Compact-support penalization, independent surface integration	1.3982	0.2866	0.15870	1.1537

global stencil are then given by

$$p_k^T(x_{i+1/2}) = \sum_{j\in S_k} f_j \prod_{\substack{m\in S_k \\ m\neq j}} \frac{\mathcal{Z}_{1/2} - \mathcal{Z}_{m-i}}{\mathcal{Z}_{j-i} - \mathcal{Z}_{m-i}},$$
$$p_S^T(x_{i+1/2}) = \sum_{k=0}^{2} d_k^T p_k^T(x_{i+1/2}). \tag{3}$$

The corresponding linear weights are

$$d_0^T = \frac{(\mathcal{Z}_{1/2} - \mathcal{Z}_1)(\mathcal{Z}_{1/2} - \mathcal{Z}_2)}{2\mathcal{Z}_2(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)},$$
$$d_1^T = \frac{\mathcal{Z}_2^2 - \mathcal{Z}_{1/2}^2}{\mathcal{Z}_2(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)}, \tag{4}$$
$$d_2^T = \frac{(\mathcal{Z}_{1/2} + \mathcal{Z}_1)(\mathcal{Z}_{1/2} + \mathcal{Z}_2)}{2\mathcal{Z}_2(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)}.$$

The local smoothness is measured by weighted integrals of the squared first and second derivatives of each hyperbolic-tangent interpolant over the target cell. A global smoothness quantity is constructed from the second difference among the three substencil indicators:

$$\beta_k = \sum_{\ell=1}^{2} \Delta x^{2\ell-1} \int_{I_i} [(p_k^T)^{(\ell)}]^2 \mathrm{d}x,$$
$$\tau = \frac{(\beta_0 - 2\beta_1 + \beta_2)^2}{\sum_k \beta_k + \epsilon}, \tag{5}$$
$$\alpha_k = d_k^T \left[1 + \left(\frac{\tau}{\beta_k + \epsilon}\right)^2\right], \qquad \omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_l \alpha_l}.$$

At interior points, the flux derivative is evaluated as

$$(\partial_x \boldsymbol{F})_i = \frac{64(\widehat{\boldsymbol{F}}_{i+1/2} - \widehat{\boldsymbol{F}}_{i-1/2})}{45\Delta x} - \frac{2(\boldsymbol{F}_{i+1} - \boldsymbol{F}_{i-1})}{9\Delta x} + \frac{\boldsymbol{F}_{i+2} - \boldsymbol{F}_{i-2}}{180\Delta x}. \tag{6}$$

The derivative in the y direction is evaluated analogously. The viscous terms are discretized using a sixth-order central difference, and time integration is performed using a third-order strong-stability-preserving Runge–Kutta method.

2 Numerical results

The two-dimensional Riemann problem[3] is solved on the domain $[0,1]^2$ using a 400×400 grid. Figure 1(a) shows that the principal shocks and contact discontinuities remain sharp. The roll-up of slip lines and small-scale fluctuations are also resolved, demonstrating the shock-capturing capability of the scheme.

For flow past a circular cylinder, $Re = 100$, $Ma_\infty = 0.2$, $D = 1$, and $\mu = 0.01$. The computational domain is $30D \times 18.75D$, discretized by a 480×300 grid with $\Delta t = 0.00125$. No statistics are collected for $t < 20$. After the flow reaches a statistically periodic state, ten complete periods are sampled. Convergence of the Strouhal number St, the time-averaged drag coefficient $\overline{C}_D$, and the root-mean-square lift coefficient $C_{L,\mathrm{rms}}$ is verified by comparing the first five periods with the last five periods. The maximum relative differences for the ghost-cell and penalization methods are 5.81×10^{-5} and 1.25×10^{-5}, respectively.

Both methods produce a regular Kármán vortex street in Fig. 1(b). The Strouhal number obtained with the compact-support penalization method differs from the reference value by 0.32%. The mean drag coefficient and the magnitude of the lift fluctuations are reasonable. The flow structures and periodic statistics indicate that the method can robustly treat a non-body-fitted circular-cylinder boundary on a fixed Cartesian grid.

Funding

This work was supported by Postgraduate Innovation Fund Project By Southwest University of Science and Technology (No. 26ycx2043).

Author details

School of Mathematics and Physics, Southwest University of Science and Technology, 621010, Mianyang, Sichuan, China.

References

1. Liu Q, Vasilyev OV. A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries. Journal of Computational Physics. 2007;227(2):946–966.
2. Boiron O, Chiavassa G, Donat R. A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles. Computers & Fluids. 2009;38(3):703–714.
3. Lax PD, Liu XD. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes. SIAM Journal on Scientific Computing. 1998;19(2):319–340.
4. Canuto D, Taira K. Two-dimensional compressible viscous flow around a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 2015;785:349–371.
5. Angot P, Bruneau CH, Fabrie P. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numerische Mathematik. 1999;81(4):497–520.
6. Peskin CS. The immersed boundary method. Acta Numerica. 2002;11:479–517.

烧蚀数值模拟中的计算域更新方法研究现状

吴海龙，韩海涛*，刘文君，邓代英，高俊杰，罗晓光，俞继军

（中国航天空气动力技术研究院，北京 100074）

摘要：烧蚀数值模拟过程中材料表面持续退缩，导致计算域几何边界不断演化，并进一步影响边界条件施加、物理量传递与数值稳定性。针对烧蚀模拟中“单步退移量较小、累计退缩量较大”的特点，对计算域更新方法进行了分类归纳。内容主要包括拓扑保持型的网格变形方法、拓扑改变型的网格重构方法，以及无网格与固定背景离散等弱化网格依赖的替代思路，比较了各类方法在几何适应性、边界处理、状态变量继承和计算成本等方面的特点与局限。相关归纳可为烧蚀数值模拟中计算域更新策略的选择、改进与进一步研究提供参考。

关键词：烧蚀数值模拟；计算域更新；网格变形；网格重构；无网格方法

0 引言

烧蚀过程中材料表面持续发生退缩与形貌演化，使其成为热防护领域典型的移动边界问题，广泛存在于高超声速飞行器热防护结构、再入飞行器头部防热构件以及固体火箭发动机喷管内壁等强热流服役环境中[1]。在高温气动加热、热化学反应、材料热解与相变等多种因素共同作用下，材料表面会发生持续退缩、剥蚀与形貌改变，进而导致结构外形、热响应特征以及服役安全裕度发生显著变化[2]。一方面，烧蚀造成的几何退缩会改变飞行器的气动外形与局部流场分布，进而影响气动力、热流分布乃至飞行落点精度[3]；另一方面，烧蚀热防护本质上属于牺牲性防热机制，防热层厚度设计不足会危及结构安全，而冗余设计又会增加结构质量与运载负担[4]。受试验成本高、工况复现困难以及测量手段受限等因素影响，单纯依赖地面试验难以满足烧蚀热防护系统快速设计与性能评估的需求，因此，面向工程应用的高精度数值模拟已成为烧蚀防热系统研究中的重要手段[5]。

从数值实现角度看，烧蚀问题并不仅仅是传统热响应计算的简单延伸，而是伴随几何边界持续变化的多物理场耦合问题。其基本求解过程通常包括：根据初始几何建立离散计算域，结合外部热环境与材料边界条件求解温度场及相关物理量，再依据烧蚀速率、温度分布或材料失效准则推进边界位置，并在更新后计算域上进入下一时间步的计算[6]。区别于一般移动边界问题，烧蚀过程具有“单步退移量较小、累计退缩量较大”的典型演化特征。在单个时间步内，材料表面边界退移通常较为有限，但随着计算时间推进，计算域会持续发生收缩，使局部网格质量、边界几何表示精度、物理量映射与继承以及数值稳定性等问题逐渐累积。同时，当前时间步的计算状态会作为后续时间步推进的重要基础，因此计算域更新过程中的

误差也可能随时间演化不断累积并影响最终计算结果。如何在边界持续退缩条件下实现高效、稳定的离散计算域更新，是影响烧蚀数值模拟精度和工程应用可靠性的关键问题之一。

围绕烧蚀数值模拟，现有研究已在传热模型[7]、热化学烧蚀机理[8]、流固热耦合分析[9]以及材料响应模型[10]等方面取得了较多进展，但对于“计算域如何随烧蚀过程可靠更新”这一问题，相关讨论仍较为分散。一类方法是在保持网格拓扑不变的前提下，通过弹簧法[11]、径向基函数法[12]等手段实现连续网格变形，其优点是便于继承已有物理场信息、实现流程相对成熟，但在累计变形增大后容易面临网格畸变、近壁区域质量下降等问题；另一类方法通过局部重构[13]或生死单元[14]等策略改变局部拓扑，以缓解大变形下的网格失稳，但随之又会引入物理量映射与插值误差控制等新的问题；此外，无网格方法的发展为计算域的更新提供了新的求解思路，但此类方法在边界识别、边界条件施加、状态变量传递以及工程计算效率等方面仍面临诸多挑战[15]。总体来看，现有研究通常侧重于特定算法的构建、局部算例验证或具体工程实现，对于烧蚀边界持续退缩这一典型移动边界问题，缺少系统归纳与统一比较。

基于上述背景，本文聚焦烧蚀数值模拟中的计算域更新问题，围绕烧蚀边界持续退缩、小步累积演化以及多物理场迭代耦合等特点，对现有相关方法进行分类综述与分析。本文将从拓扑保持型更新方法、拓扑改变型重构方法以及弱化网格依赖的替代离散思路三个层面展开讨论，重点比较各类方法在几何演化适应性、边界条件处理、物理量继承、计算成本与工程适用性等方面的特点与局限。通过对不同技术路线的归纳与辨析，期望为烧蚀数值模拟中计算域更新方法的选取、改进与后续研究提供参考。本文关注的是烧蚀热响应与材料响应数值模拟中，围绕材料域退缩所开展的计算域更新方法，对于主要服务于流场与固体界面耦合求解、依赖固定背景网格或嵌入边界技术的界面追踪方法[16]，因其在纯烧蚀热响应计算中的直接应用相对有限，本文不作为重点展开。

1 网格变形方法

1.1 弹簧法

弹簧法是最常用的网格变形方法之一，弹簧法通过将网格节点之间的拓扑连接关系类比为弹簧网络，如图 1 所示，构造节点位移平衡方程，并在给定边界节点位移后求得内部节点的新位置[17]。其核心目的不是模拟真实弹簧系统的物理响应，而是借助弹簧比拟实现边界位移向内部网格的平滑传播。弹簧法的平衡公式为：

$$\Delta x_i^m = \frac{\sum_{j=1}^{N} k_{ij} \Delta x_j^{m-1}}{\sum_{j=1}^{N} k_{ij}}$$

其中，x_i^m 为节点 i 的位置坐标，Δx_i^m 为节点 i 的位移，m 为迭代次数，N 为与节点 i 存在连接关系的节点数；k_{ij} 为节点 i 与 j 之间的弹簧刚度系数，l_{ij} 为节点 i 和 j 之间的 Euclid 距离，线性弹簧法中 k_{ij} 通常取 l_{ij} 平方的倒数。

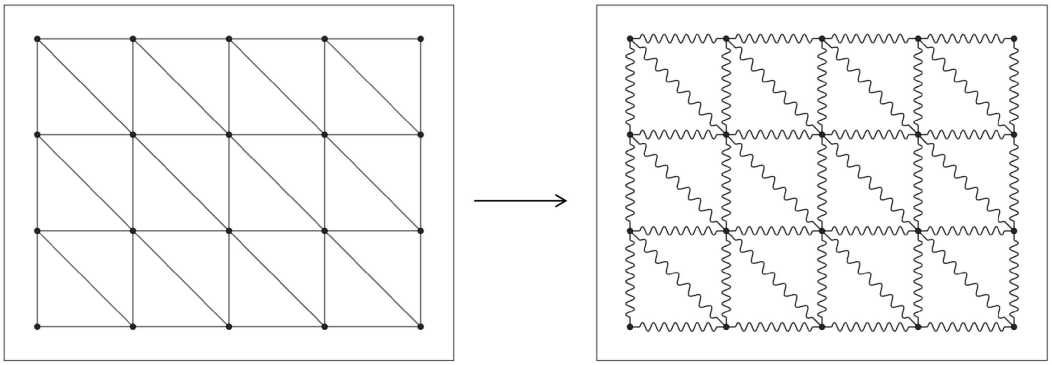


图 1 弹簧比拟法示意图

1.1.1 线弹簧法

在离散计算中，通过求解：

$$C \cdot X^{m-1} = X^m$$

C 为刚度系数矩阵，计算公式为：

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{12}}{\sum_{n=1}^{N} k_{1n}} & \cdots & \frac{k_{1N}}{\sum_{n=1}^{N} k_{1n}} \\ \frac{k_{21}}{\sum_{n=1}^{N} k_{2n}} & 0 & \cdots & \frac{k_{2N}}{\sum_{n=1}^{N} k_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k_{N1}}{\sum_{n=1}^{N} k_{Nn}} & \frac{k_{N2}}{\sum_{n=1}^{N} k_{Nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中 X^m 为第 m 次迭代计算出的节点位移。当 $m=0$ 时，即代表变形前的动边界节点的输入位移；当 m 达到收敛迭代次数时，即弹簧系统恢复平衡后每个节点需要调整的位移。

文献[18]中将节点之间的刚度系数设置为节点之间距离倒数的平方和，刚度系数计算公

式为：

$$k_{ij} = \frac{1}{l_{ij}^2}$$

当 X^m 与 X^{m-1} 之间的最小差值小于收敛值时，视作弹簧系统恢复平衡，网格节点位置更新完成。在边界位移较小时，上述计算方法通常具有较好的计算结果，距离较短的边被赋予更大刚度，有助于保持原有局部网格尺度，减弱近邻节点间的相对位移，从而在一定程度上维持局部网格分布并降低单元退化风险。但当边界位移较大或位移形式较为复杂时，弹簧法的计算结果往往不够理想，主要原因之一是在弹簧刚度矩阵系数 C 中，仅基于边长定义的刚度系数，难以充分适应单元形状保持需求。

1.1.2 扭转弹簧法

线弹簧法仅基于边长构造刚度，缺少对单元角度变化和面积退化的直接控制，因此在复杂边界运动下容易出现扁平化甚至翻转的三角形单元。为了提高变形后的网格质量，文献[19]中引入了扭转刚度的概念，主要思路是将节点间相对角度变化纳入刚度修正项，使得刚度系数除了可以反应节点的空间位置关系，还可以体现网格单元的角度变化，扭转刚度的计算公式为：

$$C_i^{ijk} = \frac{1}{1+\cos\theta_i^{ijk}} \cdot \frac{1}{1-\cos\theta_i^{ijk}} = \frac{1}{\sin^2\theta_i}$$

其中，i，j，k 分别表示三角形单元的三个顶点。

此外公式可改写为：

$$C_i^{ijk} \propto \frac{l_{ij}^2 l_{ik}^2}{A_{ijk}^2}$$

当单元顶角趋于极小值时，扭转刚度显著增大，从而提高对单元角度退化和翻转的抑制能力。

此时扭转弹簧求解的刚度矩阵系数 C 变为：

$$C = C_{\text{line}} + C_{\text{element}}$$

其中，C_{line} 是由 2*2 的边矩阵依据边中点与点的连接关系组装成的；C_{element} 是由 3*3 的三角单元矩阵依据边与边的连接关系组装得到的。加入扭转刚度后，可以有效提升弹簧法的变形能力。

1.1.3 雅可比弹簧法

扭转弹簧法虽然可以将网格单元的面积影响纳入考量，但原始扭转刚度定义主要针对三角形单元，无法处理四边形单元。同时，为了适应近壁面温度梯度变化大的特点，壁面处的网格通常较密，网格的面积量级较小，此时线刚度系数会远大于扭转刚度系数，导致扭转刚度系数的作用没有得到应有的发挥。

因此，文献[20]提出了一种雅可比弹簧法。其具体思路是，使用归一化后的雅可比参数代替扭转刚度，同时将雅可比刚度系数与线刚度系数的关系调整为相乘而非扭转弹簧刚度的相加。对于单个边而言，刚度系数为：

$$k_{ij} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{l_{ij}^2} \cdot \max\left\{ \frac{1}{J_{ENS}^i}, \frac{1}{J_{ENS}^j} \right\}$$

其中，其中 d 表示边 ij 中点到动边界或壁面边界的最短距离。该参数作为边界距离加权因子引入刚度系数中，使近壁面区域的弹簧刚度增大、远离壁面的区域刚度减小，从而抑制壁面附近高敏感网格的过度变形，并将边界位移更合理地向远场传递。J_{ENS}^i 为包含该节点 i 的每个相邻单元计算该节点处的归一化 Jacobian 值，取其中的最小值。

相较于扭转弹簧法，雅可比弹簧法通过使用雅可比参数代替扭转刚度，使网格单元不再局限于三角形单元，并更易推广到四边形、混合单元及更一般的单元形式。对烧蚀问题而言，边界附近往往存在高温梯度和高退缩敏感区，雅可比参数与边界距离加权的引入，使弹簧法能够更有针对性地控制近壁网格形状保持能力。

1.1.4 分步加载的弹簧法

无论是线弹簧法、扭转弹簧法还是雅可比弹簧法，其节点位移求解均建立在当前网格拓扑关系和弹簧刚度参数确定的基础上。在求解过程中，刚度矩阵通常根据初始网格状态构造，并在当前位移传播过程中保持不变。当边界位移较大时，网格几何关系会随变形过程不断发生变化，而固定刚度矩阵难以及时反映这种几何非线性演化特征，这种线性化假设的求解思路是导致弹簧法在大变形情况下网格质量易恶化的原因之一。

为改善弹簧法在大变形条件下的网格适应能力，可采用增量位移加载策略，将较大的边界位移分解为多个较小的位移增量。在每个增量步完成后，根据更新后的网格状态重新构造刚度矩阵，并进行下一阶段的位移传播计算。该方法通过不断修正弹簧系统的力学响应，能够有效降低固定刚度矩阵假设带来的近似误差累积，提高弹簧法在大累计位移条件下的稳定性和网格质量保持能力。然而，由于增加了刚度矩阵重构和多次迭代求解过程，增量加载策

略会显著增加整体计算成本。

1.1.5 弹簧法小结

弹簧法实现简单、工程上易于嵌入现有求解流程，并且在边界单步退移较小、几何变化相对平缓的烧蚀问题中具有较好的适用性。通过引入扭转/雅可比刚度及增量加载等策略，可在一定程度上提升其对局部网格退化的抑制能力。但由于该类方法始终建立在拓扑保持和位移平滑传播的框架下，随着烧蚀累计退缩增大，网格质量恶化难以避免。因此，弹簧法通常作为中小累计变形阶段的计算域更新手段。

1.2 径向基函数法

径向基函数法（Radial Basis Function,RBF）处理动边界问题的思路是：基于控制点（动边界节点）的位移、控制点之间的距离以及选定的基函数，确定各控制点的权重系数；根据参考点（内部节点）到每个控制点的距离，计算该参考点在所有控制点影响下的综合位移[21]。参考点的位移计算公式为：

$$y(x)=\sum_{i=1}^{N} w_i \phi\left(\left\|x-x_i\right\|\right)$$

其中，$y(x)$ 表示节点 x 对应的位移，N 表示控制点的数目，w_i 表示控制点 i 在整个参考点位移中占据的权重，φ 表示选用的基函数。$\left\|x-x_i\right\|$ 表示参考点与控制点 i 之间的距离。

权重系数 w_i 通过构建线性方程组求解，计算公式为

$$\begin{bmatrix} \varphi\left(\left\|x_1-x_1\right\|\right) & \varphi\left(\left\|x_1-x_2\right\|\right) & \vdots & \varphi\left(\left\|x_1-x_N\right\|\right) \\ \varphi\left(\left\|x_2-x_1\right\|\right) & \varphi\left(\left\|x_2-x_2\right\|\right) & \vdots & \varphi\left(\left\|x_2-x_N\right\|\right) \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \varphi\left(\left\|x_N-x_1\right\|\right) & \varphi\left(\left\|x_N-x_2\right\|\right) & \cdots & \varphi\left(\left\|x_N-x_N\right\|\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

其中，d_i 是第 i 个控制点的位移。

常用径向基函数可分为全局支撑型和紧支撑型两类[22]。全局支撑型基函数在整个空间范围内均具有非零影响，通常可获得较高的插值精度，但对应矩阵往往是致密矩阵；紧支撑型基函数仅在有限支撑半径内对节点产生影响，因此更容易形成稀疏矩阵并降低计算成本，如图 2 所示。但无论是哪种基函数形式，径向基函数法在求解计算域变形问题时，主要分为两步，第一，通过边界位移及边界点的之间的位置关系计算出边界点的权重系数；第二，根据边界点的权重系数及内部点与边界点的位置关系计算出内部点的位移。

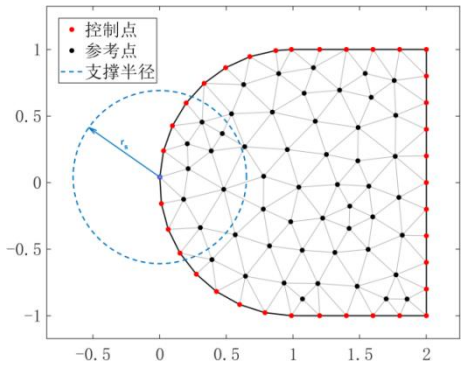


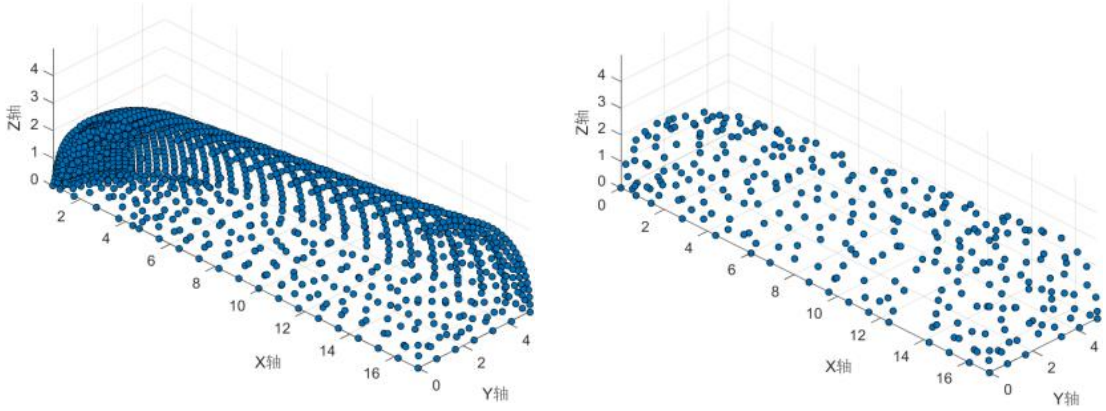
图 2 紧支型 RBF 示意图

RBF 计算过程中，控制点权重系数的求解通常是整个计算过程中最耗时的环节。与弹簧法常采用的稀疏矩阵迭代求解不同，标准 RBF 插值方程对应的系数矩阵通常为致密矩阵，矩阵中大多数元素均为非零项，在相同矩阵规模下，其求解开销往往高于稀疏矩阵。另一方面，RBF 在构造插值方程时通常只利用边界控制点信息，而不像弹簧法那样需要显式依赖全部内部节点的连接关系，其矩阵规模又往往小于基于全域节点信息构造的弹簧法。因此，尽管 RBF 矩阵具有稠密特征，但在大规模网格变形问题中，由于其求解规模较小，整体计算效率往往优于基于全域节点的弹簧法。需要指出的是，RBF 与弹簧法的效率差异仍受到控制点数量、基函数类型以及矩阵求解策略等因素影响。

现有针对 RBF 的改进工作，主要集中在降低插值系统规模和提高矩阵求解效率两个方面。

1.2.1 贪心算法及其改进方法

为了在尽量保持边界位移特征的前提下降低插值系统规模，并不一定需要保留全部边界控制点，而只需要调整出最能代表表面变化特征的精简节点计算即可。基于此种思路，文献[23]提出了贪心算法精简插值点，贪心算法的基本思想是从原始控制点集合中逐步选取一组代表性控制点子集，使其在尽量控制插值误差的同时，降低 RBF 系统维度，如图 3 所示。



（a）筛选前的控制点　　（b）筛选后的控制点

图 3 贪心算法筛选结果示意图

但贪心算法筛选本身也是一件耗时的过程，因此近年来也发展了许多针对贪心算法的优化思路，如多级子空间法[25]，峰值选点法[26]，基于循环分组的贪心算法[27]等。

1.2.2 方程加速求解

贪心算法的主要思路是减少矩阵的维度达到减小计算量的目的，另一种思路是加快矩阵的求解速度，如采用增量法[28]，逆快速多极方法[29]等。这类改进方法的核心目标，是降低标准 RBF 致密矩阵组装与求解的时间复杂度，从而加快 RBF 的求解效率。

1.2.3 RBF 小结

可以看出，弹簧法主要通过引入网格拓扑关系和单元连接信息，将节点位移求解转化为基于局部约束的平衡问题实现网格变形。RBF 则属于一种数学插值方法，依据控制点位移、控制点空间分布以及选定径向基函数共同构造连续位移插值场，并通过该插值场确定内部节点的位移分布。由于所选的基函数具有良好的空间连续性和光滑性特征，计算获得的位移场通常能够在整个计算域内保持较好的平滑过渡，这也是 RBF 方法被广泛应用于构造高质量变形场的重要原因。

RBF 方法的主要优势在于能够利用少量控制点构造连续、光滑的全局位移场，对复杂边界运动具有较强的位移传播能力，同时避免了弹簧法中对网格显式邻接关系和局部平衡求解过程的依赖。然而，由于 RBF 计算目标主要集中于位移场的连续性与光滑性，而非直接改善网格单元几何质量，在长期累积退缩情况下，仍可能出现局部单元拉伸、扭曲甚至退化等问题。因此，实际应用中通常需要结合网格平滑或局部重构等策略，提高其对大变形计算域演化的适应能力。

1.3 网格变形方法小结

除弹簧法和 RBF 方法外，常见的网格变形方法还包括弹性体法[30]、超限插值法[31]等。弹性体法通过将计算网格等效为连续弹性介质进行变形求解，具有较好的网格形状保持能力，但相应控制方程的求解成本较高；超限插值法在结构化网格及特定几何条件下能够获得较好的网格变形效果，但其适用范围受到网格类型和几何拓扑的限制。相比之下，弹簧法与 RBF 方法在算法实现、计算效率和工程应用方面相对成熟，也更易于嵌入现有烧蚀数值模拟流程，因此在烧蚀计算域更新中具有较好的应用基础。

需要指出的是，各类网格变形方法通常以保持原有网格拓扑关系不变为基本前提，即边界推进过程中主要通过调整节点位置完成计算域更新，而节点之间的连接关系保持不变。对于烧蚀这类具有“单步退移量较小、累计退缩量较大”特征的移动边界问题，该特点使网格变形方法能够在单次边界退移较小时较为平稳地传播边界位移，同时避免因拓扑变化所引起

的网格重建和物理量重新映射。然而，随着烧蚀过程持续推进，边界累计退缩不断增大，局部网格尤其是近壁区域会受到持续压缩，单元尺寸和形状逐渐偏离初始状态，网格质量下降甚至局部单元失效的问题难以避免。

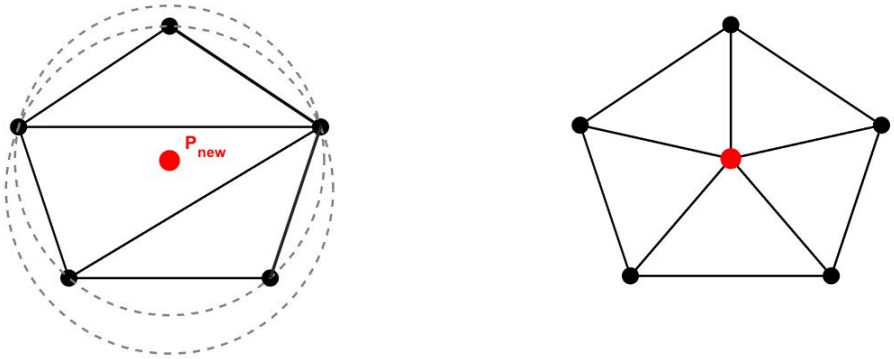
因此，网格变形方法通常更适用于单步边界退移较小且累计变形尚处于其稳定变形能力范围内的烧蚀计算。当烧蚀持续时间较长、累计退缩较大，或局部边界形貌发生显著变化时，仅依靠保持拓扑不变的网格变形方法往往难以长期维持良好的网格质量，此时需要结合局部重构、重新划分网格或其他计算域更新策略，以提高长期烧蚀计算的稳定性和几何适应能力。

2 网格重构方法

当拓扑保持型网格变形方法难以持续维持网格质量时，网格重构逐渐成为传统网格框架下处理大变形和持续边界退缩问题的重要手段。不同于仅通过节点位移传播实现计算域更新的网格变形方法，网格重构通过改变局部离散拓扑结构，包括单元删除、单元失活以及局部区域重新生成等方式，缓解严重网格畸变、单元翻转和近壁区域过度压缩等问题[32]。需要指出的是，网格重构通常并不意味着对整个计算域进行完全重新划分，而更多是在边界附近或网格质量退化区域实施局部修复与再生成。对于烧蚀问题而言，网格重构能够在较大累计退缩条件下保持较好的边界几何适应能力，但同时也会引入拓扑更新、物理量映射以及额外计算成本等新的数值问题。其中，拓扑更新意味着原有网格节点连接关系或单元结构发生变化，需要重新建立局部离散关系；同时，由于计算域发生重构，前一时间步中已求得的温度、压力等场变量以及材料状态信息无法直接延续到新的计算域，需要通过一定的数据映射方法实现物理量传递，以保证时间推进过程中的解连续性。此外，网格重构过程本身还会增加网格生成、质量检查以及变量插值等额外计算开销。因此，如何在提高大变形适应能力的同时降低重构过程带来的数值误差和计算成本，是网格重构方法应用于烧蚀计算域更新时需要重点考虑的问题。

2.1 局部重构法

局部重构法的思路是，针对计算过程中出现的网格质量恶化区域、严重畸变单元或负体积单元，首先删除失效或不满足质量要求的局部网格单元，再通过在局部区域内引入新节点，并结合保留节点重新生成满足质量要求的新单元，从而恢复计算域的离散结构[33]，如图 4 所示。通常情况下，局部重构并非在每个时间步均主动执行，而是在网格变形达到一定失效判据后，于下一时间步计算开始前对局部退化区域进行修复，以实现计算域的有效更新。



（a）重构前的网格　　（b）重构后的网格

图 4 局部重构法示意图

由于局部重构通常以网格质量下降、单元严重扭曲或负体积等局部失效现象作为触发条件，因此其本质上是一种基于问题响应的局部修复机制，而非主动调控整个计算域网格质量分布的优化方法。该方法能够有效消除局部最严重的网格退化区域，延缓网格失效过程，但由于其主要针对已经发生的局部质量问题进行修复，对于烧蚀过程中计算域持续收缩导致的整体网格质量逐渐下降趋势难以从根本上解决。

2.2 生死单元法

不同于局部重构方法通常需要以网格变形作为前置过程，生死单元法的计算流程相对直接，其基本思想是根据边界演化情况对单元状态进行控制。当满足预设的失效判据时（例如单元节点进入退缩区域或单元被边界完全覆盖），将对应单元由有效状态切换为失效状态，通过单元失活实现计算域边界的推进[34]。由于该方法不依赖内部网格节点的连续移动，因此能够避免由节点大幅位移引起的单元拉伸、严重畸变甚至翻转等问题，在处理较大边界退缩问题时具有较好的稳定性。

从计算域演化机制来看，生死单元法不受传统网格连续变形能力的直接限制，因此对较大累计边界退移具有较强的适应能力。然而，由于边界推进主要通过整单元尺度的失活实现，实际几何边界只能由离散单元边界进行近似表示，导致烧蚀界面容易出现阶梯状或锯齿状特征，如图 5 所示。这种离散边界误差会进一步影响边界法向方向的准确获取，并对壁面热流施加以及局部烧蚀速率计算精度产生一定影响。

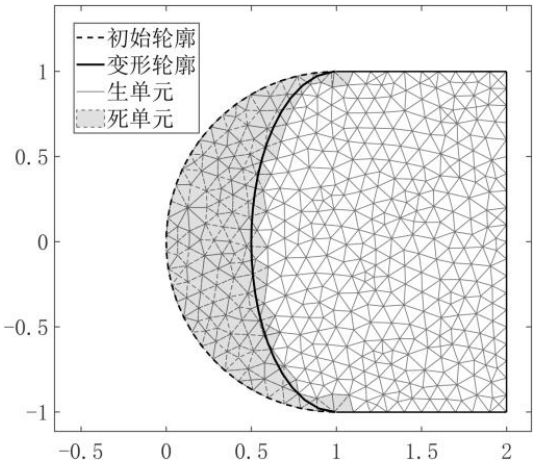


图 5 生死单元示意图

针对生死单元法边界表示精度不足的问题，文献[35]提出了一种边界区域网格分割方法，通过对边界附近单元进行细化处理，提高了失活过程中边界几何形貌的光滑性。然而，该方法本质上仍依赖生死单元机制完成主体计算域演化，无法避免单元失活导致的网格分布变化问题。因此，对于烧蚀过程中因温度梯度或物理场变化需求而预先设计的非均匀网格（如外密内疏的网格分布），其适应能力仍存在一定局限。

2.3 分区重构法

针对生死单元法边界离散精度不足以及局部重构方法适应范围有限的问题，可进一步采用分区重构策略对计算域进行更新。该方法根据边界运动对计算域的影响范围，将网格区域划分为动边界直接影响区、间接影响区和无影响区。首先依据生死单元法的基本思想，根据边界退缩范围确定直接影响区域，并删除位于变形区域内的网格单元，同时保留原有边界节点。随后，通过拓扑分层方式识别边界运动的间接影响范围：将与已删除区域存在节点连接关系的非边界节点标记为第 1 层节点，并进一步向计算域内部逐层扩展，形成不同影响层区域。根据预设重构范围，对一定层数范围内的节点和单元进行删除处理，最终形成由移动边界与内部离散边界共同围成的局部重构区域。基于区域边界节点，采用 Delaunay 等网格生成方法在重构区域内重新插入节点并生成新的离散网格，如图 6 所示。

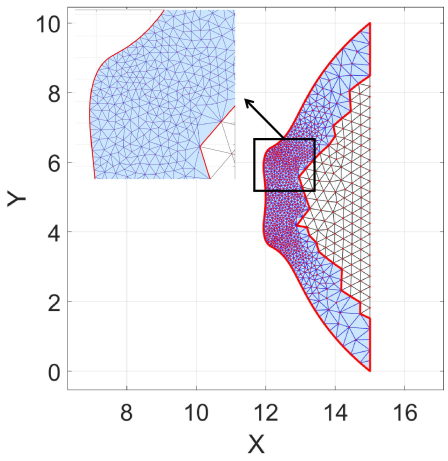


图 6 分区重构结果示意图

不同于局部重构方法仅针对已经出现质量退化的单元进行被动修复，也不同于全局重构方法对大范围计算域进行整体更新，分区重构通过分析边界运动影响范围，将网格更新限制在受边界演化影响的局部区域内，从而在保留大部分原始网格结构的同时，提高大变形条件下的计算域适应能力。在重构区域范围和网格生成策略合理设置的情况下，该方法能够兼顾计算效率与新生成网格质量控制。与以网格质量退化作为触发条件的局部修复方式相比，分区重构更加关注边界演化过程对计算域的影响范围，因此对于烧蚀过程中连续发生的边界退缩具有较好的适用潜力。

2.4 网格重构法小结

相比于拓扑保持型网格变形方法，网格重构方法在处理较大边界退移、严重局部网格退化以及边界附近单元失稳等问题时具有更强的几何适应能力。其主要优势在于能够通过局部删除、单元失活或区域重新生成等方式直接调整计算域离散结构，从而避免仅依靠节点移动所导致的持续网格压缩和质量退化问题。

然而，网格重构在提升大变形适应能力的同时，也会引入新的数值代价。由于局部或整体拓扑关系发生改变，原有节点连接关系、邻接信息以及相关离散算子通常需要重新建立；同时，新旧计算域之间存在空间位置差异，需要对温度场、材料状态等状态变量进行重新映射与传递。这一过程不仅增加了额外的计算开销，也可能由于插值误差影响时间推进过程中数值解的连续性和准确性。

因此，在烧蚀数值模拟中，网格重构通常并非替代拓扑保持型网格变形方法的首选方案，而更多作为应对大累计退缩和严重网格退化问题的重要补充手段。对于累计退缩较大、局部几何变化明显或边界表示精度要求较高的情况，如何合理确定重构区域、优化状态变量映射策略以及建立有效的重构触发准则，是提高该类方法计算稳定性和工程适用性的关键。

3 无网格方法

前述网格变形方法与网格重构方法虽然在具体实现形式上存在差异，但二者均以网格作为计算域离散的基本载体。在烧蚀过程中，计算域更新通常表现为网格节点位置调整、单元拓扑关系修改以及由此引起的状态变量传递与映射等问题。由于该类方法基于连续介质假设下的网格离散形式，因此主要应用于以宏观界面退缩为主要特征的烧蚀问题。例如，在高超声速飞行器端头[36]、再入飞行器热防护结构[37]以及固体火箭发动机喷管内壁[38]烧蚀模拟中，研究重点通常集中于材料表面退缩量预测、结构外形演化以及热流环境变化，此类问题中烧蚀边界通常具有较好的连续性，适合采用动网格、网格变形或网格重构方法实现计算域更新。

随着边界持续退缩和累计变形不断增大，网格畸变、局部重构开销以及变量映射误差等问题会逐渐突出。相比之下，无网格方法不再依赖固定单元拓扑描述计算域，而是通过粒子点、材料点或固定点集等离散对象表征材料区域。与宏观界面连续退缩问题不同，无网格方法更多应用于涉及材料内部演化和复杂表面变化的烧蚀过程，例如激光烧蚀[39]、防热材料微观结构演化[40]以及烧蚀诱导热裂纹扩展[41]等问题。在上述过程中，材料去除往往伴随熔融流动、局部破坏、裂纹萌生以及材料剥落等非连续现象，计算域变化不仅体现为边界移动，还涉及材料离散点集的失效、删除以及重新组织，因此传统网格方法难以有效描述。

对于烧蚀问题而言，无网格方法通常通过表面粒子或材料点的移动、失效删除以及邻域关系重构等方式描述边界退缩过程，并根据材料失效准则或烧蚀演化规律实时调整有效计算点集，从而实现计算域的持续演化。因此，在无网格框架下，边界识别、表面法向确定、点集更新以及邻域重构成为影响计算域更新精度和稳定性的关键环节。

3.1 光滑粒子法

光滑粒子法（Smoothed Particle Hydrodynamics，SPH）将计算域离散为携带质量、密度、温度等物理量的拉格朗日粒子，计算域更新分为两个层次：表面粒子的烧蚀退缩由热化学模型直接控制；内部粒子的运动则由离散化的动量方程求解[42]。

表面粒子通过邻域完整性指标 η_i 识别：当粒子支撑域内邻居缺失或粒子数密度低于阈值时判定为表面粒子。表面粒子 i 的法向烧蚀速度 $v_{n,i}$ 由局部热化学模型给出（如基于热流密度的质量损失率），其位置沿表面外法向 n_i 。

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n - v_{n,i}\,\mathbf{n}_i\,\Delta t$$

当表层粒子达到温度失效、质量损失或厚度退化判据时，也可不采用连续位移推进，而直接删除粒子。若以表示粒子失效判据，则粒子删除条件可写为：

$$g_i^n > g_{cr}$$

将满足该条件的表层粒子从活跃粒子集合中移除，由于粒子位置和表面形态均不断变化，邻域关系需要在每个时间步内重新建立。

内部粒子由离散化的动量方程驱动。对于可压缩流体或固体，SPH 形式的动量方程可写为：

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_{j\in N_i} m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + f$$

式中：v_i 为粒子速度，m_j 为邻域粒子质量，P 为压力（由状态方程或热弹性本构给出），ρ 为密度，Π_{ij} 为人工粘性项，$W_{ij} = W(\|x_i - x_j\|, h)$ 为核函数，f 为外力(如重力)。压力场通过密度求和或能量方程与温度场耦合。

烧蚀退缩通过改变边界热流和几何约束，影响内部温度场和应力场，进而产生非均匀的速度场与变形。这一机制使得 SPH 能够真实反映烧蚀引起的内部应力重分布与局部大变形。

3.2 近场动力学

近场动力学方法（Peridynamics，PD）以非局部作用键描述材料点间的相互作用，计算域由材料点集合离散，边界更新同样分为表面点处理与内部点运动两个层面。

材料点 i 与其视界 $H_i = \{ j \mid \|x_j - x_i\| \le \delta \}$ 内的点通过“键”连接。表面点的识别可结合邻域缺失程度与损伤变量（视界内失效键的体积分数）共同确定，当表面点损伤累积至临界值或满足材料去除判据时，将该点从活跃集合中移除，或令其与周围所有键全部失效，然后重建节点视界[43]。

内部材料点的运动由近场动力学运动平衡方程控制。以态基 PD 为例，其离散形式为：

$$\rho \ddot{u}(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{j\in H_i} \left[\mathbf{T}_i \langle \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \rangle - \mathbf{T}_j \langle \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \rangle \right] V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t)$$

其中，ρ 为材料密度，$\ddot{u}$ 为加速度 $T_i \langle x_j - x_i \rangle$ 为力态，表示 j 对 i 的作用力密度，V_j 为点 j 的体积，b 为 1 外力密度。

对于热-力耦合烧蚀问题，力态由热应力和机械应力共同构成。温度变化引起热应变，通过材料本构转化为热应力，进而形成力态项。烧蚀导致的边界退缩改变了温度场和几何约束，使得力态分布发生变化，内部点随之产生非均匀的位移与速度场。

与 SPH 类似，PD 中内部点的运动完全是热-力耦合计算的物理结果，而非人为构造的

网格变形。这一特性使其能够自然描述烧蚀过程中的应力演化、裂纹萌生与材料剥落。

3.3 边界驱动的固定粒子法

SPH、PD 等无网格方法虽然摆脱了传统网格拓扑对计算域演化的限制，但由于其通常建立于拉格朗日描述框架下，在复杂边界条件施加、粒子邻域关系维护以及大规模计算效率等方面仍面临一定挑战，而网格方法具有边界几何描述明确、离散连接关系稳定等优势。因此，结合网格方法与无网格方法特点的混合离散思想逐渐受到关注。一种典型思路是采用显式边界节点与固定背景粒子相结合的离散方式，将计算域更新过程中的几何演化与内部场变量求解进行适度分离。该方法通过具有确定拓扑关系的边界节点描述烧蚀界面的几何变化，而利用空间位置固定的粒子点承载内部温度场等物理变量。与拉格朗日型的粒子方法不同，固定背景粒子在计算过程中不随材料发生整体运动，而是根据当前边界位置动态判断其是否属于有效计算区域；与依赖动网格更新的有限元方法相比，该类方法无需随边界退缩持续调整内部离散点的位置，从而降低了大变形条件下计算域更新的复杂性。

从离散形式上看，边界驱动的固定粒子方法与 SPH 整体离散方程并无本质冲突，其温度场求解仍可写为由局部粒子相互作用组装得到的整体代数方程组。二者的主要区别并不在于扩散项的基本构造方式，而在于求解点集的组织方式、边界的表示方式以及边界附近截断误差的修正方式。

全部固定内部粒子构成初始粒子集合：

$$A = \{x_i\}_{i=1}^{N_a}$$

显式边界节点构成闭合边界：

$$\Gamma = \{x_j\}_{j=1}^{N_b}$$

由 Γ 所围成的区域记为当前计算域 Ω，则位于当前计算域内部的固定粒子定义为活跃粒子，其集合可表示为：

$$B = \{x_i \in A \mid x_i \in \Omega\}$$

当边界发生退移后，部分原本位于计算域 Ω 内的固定粒子将被排除出当前计算域，不再作为活跃粒子参与下一时间步的联立求解，但其空间位置保持不变。由于这些失活粒子在几何位置上通常仍紧邻当前边界外侧，因此可进一步作为边界附近缺失支撑的补偿点，用于构造虚拟粒子修正，其集合为：

$$C = A \setminus B$$

设集合 C 内的点 x 到当前边界 Γ 的最短距离记为 $d(x,\Gamma)$，则虚拟粒子候选集合可定义为：

$$\Phi = \{x \in C \mid d(x,\Gamma) \le \delta\}$$

其中，δ 为虚拟粒子筛选带宽，通常取为核函数支撑半径或与其同量级的范围。与标准 SPH

方法中需要在边界外额外生成人工虚拟粒子不同，该方法直接利用边界退移后自然形成的失活固定粒子作为虚拟粒子候选，从而避免了额外的几何构造过程。

采用固定欧拉粒子离散温度场，内部粒子不随材料运动。这一设计虽然规避了动网格更新，但也引入了材料状态跟踪的问题。在真实烧蚀问题中，材料不仅发生温度变化，还可能经历热解、相变、氧化等物理化学过程，这些过程通常与材料的历史路径相关，需要采用拉格朗日描述下的物质导数进行跟踪。当计算点固定于空间位置时，某一固定空间点在不同时间步对应的是不同材料微元，其热解程度、氧化历史等状态变量无法简单地由该点的温度时间序列表征。但该方法仅考虑纯导热问题，若拓展至包含复杂材料响应的真实烧蚀工况，欧拉框架下材料状态变量的跟踪将面临根本性困难。

3.4 无网格方法小结

无网格方法为烧蚀数值模拟中的计算域更新提供了一条区别于网格变形和网格重构的方法路径。其核心优势在于不受固定单元拓扑约束，能够通过粒子点、材料点或固定背景点集的更新描述边界退缩、局部断裂以及材料剥落等复杂几何演化过程。因此，在大变形、强拓扑变化以及结构完整性不断退化的烧蚀场景下，无网格方法通常具有较强的几何适应能力，能够避免传统网格方法中常见的单元畸变、网格翻转以及重构失败等问题。

然而，与成熟的网格类方法相比，无网格方法目前仍存在明显不足。一方面，无网格方法需要通过核函数、邻域搜索或点间作用关系构造离散算子，计算过程中通常涉及大量邻域更新操作，且为获得与网格方法相近的空间分辨能力，粒子方法往往需要配置较多计算点，计算成本较高；另一方面，粒子方法通常通过核函数近似、邻域积分或点间相互作用构造空间离散算子，计算精度对粒子分布均匀性、支撑域尺度、核函数形式以及邻域粒子数量等参数较为敏感，当粒子随材料运动并逐渐发生不规则分布时，局部离散一致性和梯度近似精度容易下降，尤其在边界附近，由于粒子支撑域被截断、邻域信息不足，往往需要引入边界修正或虚拟粒子等处理，否则容易产生较大的边界离散误差。因此，从当前发展阶段来看，无网格方法更适合作为烧蚀计算域更新的重要补充技术，与网格方法形成互补。

4 总结与展望

烧蚀数值模拟中的计算域更新，本质上是边界持续退缩条件下离散计算域随时间演化的问题。其难点不仅在于几何边界位置的推进，还涉及离散结构保持、边界条件施加、状态变量传递以及长期计算稳定性等多个方面。由于烧蚀过程具有“单步退移较小、累计退移较大”的特点，计算域更新过程中产生的几何误差、离散误差以及变量传递误差会随时间推进逐渐累积，并最终影响后续物理场求解的准确性。因此，计算域更新是影响烧蚀数值模拟精度和工程适用性的关键环节之一。

本文围绕烧蚀数值模拟中的计算域更新问题，对拓扑保持型网格变形方法、拓扑改变型网格重构方法以及无网格和固定背景离散方法进行了分类总结。总体来看，不同方法在边界

适应能力、离散结构维护方式、状态变量传递机制以及计算成本等方面具有不同特点。

网格变形方法依靠节点移动实现计算域更新，具有实现成熟、变量连续性保持较好的优势，适用于烧蚀初期或累计退缩较小的计算场景；但随着边界持续退缩，网格质量退化问题会逐渐限制其长期应用。网格重构方法通过改变局部离散拓扑，提高了大变形条件下的适应能力，适用于局部几何变化明显或累计退缩较大的情况，但同时需要解决拓扑更新、状态变量映射以及额外计算开销等问题。无网格方法及固定背景离散方法突破了传统单元拓扑限制，在处理大变形、材料剥落以及复杂边界演化方面具有一定优势，但由于缺少规则单元结构约束，其离散精度控制、计算效率以及工程应用成熟度通常仍不及有限元、有限体积等网格方法。在当前工程应用中，网格方法仍是烧蚀数值模拟的主要技术路线，但具体的方法选择需要综合考虑烧蚀程度、几何变化特征、计算精度要求以及工程计算成本等因素。

总体而言，计算域更新贯穿烧蚀数值模拟全过程，其作用不仅体现在边界几何演化的实现，更直接影响后续热响应和材料响应分析的可靠性。随着高超声速飞行器和复杂热防护结构对模拟精度与计算效率提出更高要求，发展面向具体工况、兼顾稳定性与计算效率的计算域更新方法，仍将是烧蚀数值模拟领域的重要研究方向。

参考文献

[1] 黄小容, 陈云伟, 周海晨. 全球高超声速技术发展态势分析[J]. 中国科学院院刊, 2024, 39(6): 1106-1120.

[2] Appar A, Kumar R. Effect of thermal ablation at the fluid-solid interface of a hypersonic reentry vehicle in rarefied flow regime[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2021, 35(8): 610-631.

[3] 艾邦成, 陈思员, 陈智, 等. 关于高超声速飞行器新热障的认知与探讨[J]. 气体物理, 2023, 8(4): 1-17.

[4] Ding C, Liu X, Xie F, et al. Heat transfer and pyrolysis gas flow characteristics of light-weight ablative thermal protection system in the blunt body[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2023, 186: 108122.

[5] 余艺平,肖鹏,赵长浩,等. 耐高温层状 Ta/Ta0.5Hf0.5C 金属陶瓷的高频等离子体风洞烧蚀行为研究[J]. 无机材料学报,2025,40(7):790-798.

[6] 郑子玥. 高超声速弹箭基于化学反应的气动热分析及烧蚀数值模拟研究[D]. 江苏:南京理工大学,2023.

[7] 丁晨,牛智玲,单亦姣,等. 多层热防护结构烧蚀传热模型研究[J]. 导弹与航天运载技术,2021(1):24-28.

[8] 邓代英,罗晓光,陈思员,等. 二氧化碳介质气动加热环境下碳化热解类防热材料烧蚀机理分析[J]. 装备环境工程,2020,17(1):43-50.

[9] Xu L ,Yuan G .Development and simulation of a 3D thermal-fluid-solid coupled model for nanosecond pulsed moving laser ablation of copper based on the level set method[J].Journal of Manufacturing Processes,2025,155950-970.

[10] 俞继军,邓代英,罗晓光,等. 材料防热的多尺度现象与防热建模[J]. 气体物理,2021,6(4):1-18.

[11] Batina J T. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes[J]. AIAA journal, 1990, 28(8): 1381-1388.

[12] Rendall T C S, Allen C B. Unified fluid–structure interpolation and mesh motion using radial basis functions[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2008, 74(10): 1519-1559.

[13] Zheng J , Chen J , Zheng Y ,et al.An improved local remeshing algorithm for moving boundary problems[J].Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2016, 10(1):405-428.

[14] Scigliano R, De Simone V, De Stefano Fumo M. Finite Element Method for Ablative Thermal Protection Systems Design for Atmospheric Re-Entry Vehicles[C]//22nd AIAA International Space Planes and Hypersonics Systems and Technologies Conference. 2018: 5207.

[15] Alshaer A W, Rogers B D, Li L. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) modelling of transient heat transfer in pulsed laser ablation of Al and associated free-surface problems[J]. Computational Materials Science, 2017, 127: 161-179.

[16] Liming Y, Chang S H U, Yinjie D U, et al. On Advances of Diffuse-Interface Immersed Boundary Method and Its Applications[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2025, 42(2): 137.

[17] 霍世慧,王富生,岳珠峰. 弹簧近似法在二维非结构动网格生成技术中的应用[J]. 振动与冲击,2011,30(10):177-182.

[18] 郭正,李晓斌,瞿章华,等.用非结构动网格方法模拟有相对运动的多体绕流[J].空气动力学学报,2001,(3):310-316.

[19] Farhat C, Degand C, Koobus B, et al. An improved method of spring analogy for dynamic unstructured fluid meshes[C]//39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit. 1998: 2070.

[20] 杨帆,杨梦瑶,江中正,等. 面向混合单元动网格计算的雅可比弹簧法[J]. 宇航学报,2025,46(3):519-531.

[21] 林言中,陈兵,徐旭. 径向基函数插值方法在动网格技术中的应用[J]. 计算物理,2012,29(2):191-197.

[22] 杨超,邹志诚,谢长川,等. RBF 动网格技术研究进展及其气动弹性应用[J]. 航空学报,2025,46(5):84-105.

[23] Rendall T C S, Allen C B. Efficient mesh motion using radial basis functions with data reduction algorithms[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(17): 6231-6249.

[24] Rendall T C S, Allen C B. Reduced surface point selection options for efficient mesh deformation using radial basis functions[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(8): 2810-2820.

[25] 王刚，雷博琪，叶正寅.一种基于径向基函数的非结构混合网格变形技术［J］.西北工业大学学报，2011，29（5）：783-788.

[26] Gang W, Xin C, Zhikan L I U. Mesh deformation on 3D complex configurations using multistep radial basis functions interpolation[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2018, 31(4): 660-671.

[27] Fang H, Zhang H, Shan F, et al. Efficient mesh deformation using radial basis functions with a grouping-circular-based greedy algorithm[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 433: 110200.

[28] Selim M M, Koomullil R P, Shehata A S. Incremental approach for radial basis functions mesh deformation with greedy algorithm[J]. Journal of Computational Physics, 2017, 340: 556-574.

[29] Coulier P, Darve E. Efficient mesh deformation based on radial basis function interpolation by means of the inverse fast multipole method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2016, 308: 286-309.

[30] 郑赟. 基于非结构网格的气动弹性数值方法研究[J]. 航空动力学报, 2009, 24(9):2069-2077.

[31] 孙岩，孟德虹，王运涛，等. 径向基/超限插值结构网格运动方法中的变形一致性问题[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2018，30(2)：354-359.

[32] 张来平，段旭鹏，常兴华，等. 基于 Delaunay 背景网格插值和局部网格重构的变形体动态混合网格生成技术[J]. 空气动力学学报，2009，27(1)：32-40.

[33] 易欢.基于 Delaunay 方法的非结构网格局部重构技术研究[D].南京航空航天大学,2012.

[34] 丁宁，赵彬，刘志强，等. 复合材料层合板雷击烧蚀损伤模拟[J]. 航空学报，2013，34(2)：301-308.

[35] 赵智勇. 高超声速飞行器防热结构烧蚀行为数值模拟方法研究[D]. 辽宁:大连理工大学, 2016.

[36] 龙丽平, 韩俊, 万田, 等. 再入飞行器端头烧蚀的耦合计算方法[J]. 强度与环境, 2021, 48(2):8-14.

[37] Zhang J, Nie C, Cai J, et al. An implicit coupling framework for numerical simulations between hypersonic nonequilibrium flows and thermal responses of charring materials in the presence of ablation[J]. Aerospace Science and Technology, 2025, 158: 109915.

[38] 刘鑫生，周文清，张富强，等. 非匀速烧蚀下喷管喉衬热结构耦合仿真[J]. 固体火箭技术, 2026, 49(1):144-150.

[39] 陈嵩涛，段庆林，王依宁，等. 选区激光烧结过程传热分析的高效无网格法[J]. 机械工程学报，2019，55(7)：135-146.

[40] Gao J, Deng D, Luo X, et al. Ablation and molten layer flow simulation for plate model of SiO2f/SiO2 composite material using particle method[J]. Computers & Fluids, 2024, 284: 106436.

[41] Zhang Y, Behera D, Madenci E. Peridynamic modeling of thermal response and cracking in charring materials due to ablation[J]. Engineering with Computers, 2024, 40(1): 343-365.

[42] Zhong Z, Kulasegaram S, Brousseau E. An enhanced meshless numerical methodology for modelling pulsed laser ablation of aluminium[J]. Journal of Manufacturing Processes, 2024, 131: 1959-1969.

[43] 陈明伟,刘齐文,刘立胜. 近场动力学方法在 C/C 复合材料烧蚀问题中的应用[J]. 安全与环境工程,2019,26(1):191-197.

GKS 在自适应笛卡尔网格上的方法探究

胡荣海，马强

（四川大学，成都 610000）

摘　要：自适应笛卡尔网格因其具有不受复杂几何外形约束、可完全自动生成等显著优势，是实现全自动高效流体仿真的最佳选择。然而，笛卡尔网格采用的自适应加密方式，以及其与物面呈现非贴体特性，面临自适应悬挂节点离散精度降阶、非贴体条件下边界条件如何施加等问题。本文在自适应笛卡尔网格上实现气体动理学格式（GKS），在悬挂节点与虚拟单元分别采用反距离加权最小二乘、带约束的加权最小二乘来求取插值点处的物理量。并在一维 Sod 激波管，三维圆球绕流的算例上验证了该方法。

关键词：自适应笛卡尔网格，气体动理学格式，最小二乘

0 引　言

计算流体力学数值算法的精度与效率，在很大程度上取决于计算网格的质量。传统的有限体积法与有限差分法通常建立在贴体网格或非结构化网格之上，通过单元界面的精确通量计算来保证算法的守恒性与精度。然而，对于复杂几何外形，生成高质量的贴体网格极为耗时，使得算法在实际应用中的整体效率受限于网格生成这一前端环节。

笛卡尔网格的出现为上述矛盾提供了突破口。由于采用规则的笛卡尔网格覆盖计算域，网格生成过程完全不受物体几何形状的约束，可实现全自动化，从而极大提升了算法的工程适用性。然而，笛卡尔网格的非贴体特性也给数值算法带来了两个特有的难题：其一，自适应加密产生的悬挂节点破坏了网格的正则性，若处理不当将导致局部离散精度降阶；其二，非贴体物面边界与网格线任意相交，产生不规则的截断单元，使得边界条件的施加远比贴体网格复杂，且容易出现小网格引发的数值问题。

本文在自适应笛卡尔网格框架下，实现了气体动理学格式（GKS）的数值算法。该算法在悬挂节点处采用反距离加权最小二乘插值以保证跨界面的通量精度，在虚拟单元处采用带约束的加权最小二乘插值以施加漫反射边界条件。

GKS 作为通量求解器，在一个时间步的气体演化过程中考虑了粒子碰撞，由此得到随时间变化的气体分布函数以及单元界面处相应的数值通量。即使在宏观上物理量已不再改变，但气体内部依然可能存在由粒子碰撞导致的气体向平衡态弛豫的过程，因此 GKS 能更加精确的模拟气体演化过程。

1 问题描述

给出三维 BGK 模型

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{g-f}{\tau}\ (1.1)$$

其中$f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})$是粒子的速度分布函数，$\boldsymbol{\xi}$是粒子的内自由度，$g$是由$f$确定的局部平台态，$\tau$是气体弛豫时间。

1.1：数值格式

$$\boldsymbol{W}_{i,j,k}^{n+1}=\boldsymbol{W}_{i,j,k}^{n}-\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left(\frac{\boldsymbol{F}_{i+1/2}-\boldsymbol{F}_{i-1/2}}{\triangle x}+\frac{\boldsymbol{F}_{j+1/2}-\boldsymbol{F}_{j-1/2}}{\triangle y}+\frac{\boldsymbol{F}_{k+1/2}-\boldsymbol{F}_{k-1/2}}{\triangle z}\right)\ (1.2)$$

$$\boldsymbol{F}=\int\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}f d\boldsymbol{u}d\xi\ (1.3)$$

其中$\boldsymbol{\psi}=\left(1,\boldsymbol{u},\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{\xi}^2)\right)^T$，$\boldsymbol{W}=\int\boldsymbol{\psi}f d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{\xi}=(\rho,\rho\boldsymbol{u},\rho E)^T$，$\boldsymbol{n}$是单元边界面的外法向。

1.2：重构

以x方向为例，对于 BGK 模型，t时刻在单元界面中心$\boldsymbol{x}_{i+1/2,j,k}$气体分布函数

$$f(\boldsymbol{x}_{i+1/2,j,k},t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})=c_1 g_0+c_2 g_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u}+c_3 g_t+c_4 f_0+c_5 f_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u} \quad (1.4)$$

其中g_0与f_0是上一时间步决定的局部平衡态和初始分布函数，系数为

$$\begin{aligned} c_1&=1-e^{-t/\tau}\\ c_2&=te^{-t/\tau}-\tau(1-e^{-t/\tau})\\ c_3&=t-\tau(1-e^{-t/\tau})\\ c_4&=e^{-t/\tau}\\ c_5&=-te^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.3：悬挂节点

悬挂节点采取反距离加权最小二乘法，选取插值基向量

$$\boldsymbol{p}=(1,x,y,z)^T \quad (1.6)$$

利用插值基向量的线性组合近似目标函数，即

$$\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{a} \quad (1.7)$$

对应的系数向量$\boldsymbol{a}$通过极小化以下目标函数J确定

$$J=\sum_{i=1}^{n}w(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_R)\left[\phi(\boldsymbol{x}_i)-\phi_i\right]^2 \quad (1.8)$$

其中权重$w(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_R)=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_R\|}$，$\boldsymbol{x}_R$是插值点的坐标。

1.4：边界处理

边界处采取浸没边界—虚拟单元法，通过插值得到虚拟单元的值，随后参与内部流场的计算。

虚拟单元采取带约束的加权最小二乘，同悬挂节点选取一样的插值基向量，首先极小化以下目标函数

$$J=\sum_{i=1}^{n}\left[w(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_b)\left(\phi(\boldsymbol{x}_i)-\phi_i\right)\right]^2 \quad (1.9)$$

其中权重$w(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_b)=\exp\left(-\dfrac{\frac{\pi^2}{4}\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_b\|^2}{d^2}\right)$，$d=\max_i\left(\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_b\|\right)$，$\boldsymbol{x}_b$是壁面上点的坐标。求解上述无约束问题，可以得到$\boldsymbol{x}_b$处的无约束解$\phi_b$。利用漫反射边界条件对$\phi_b$进行修正，得到$\phi_b'$，随后求解一个带约束的极小化问题以确定系数向量

$$\mathrm{min}imize\ J=\sum_{i=1}^{n}\left[w(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_b)\left(\phi(\boldsymbol{x}_i)-\phi_i\right)\right]^2 \quad (1.10)$$

$$Constraint:\ \phi(\boldsymbol{x}_b)=\phi_b' \quad (1.11)$$

1.5：算例

1.5.1：Sod 激波管

初始条件

$$(\rho,u,v,w,p)=\begin{cases}(1,0,0,0,1) & 0<x<0.5\\ (0.125,0,0,0,1) & 0.5<x<1\end{cases} \quad (1.12)$$

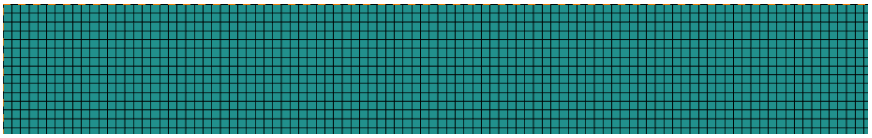
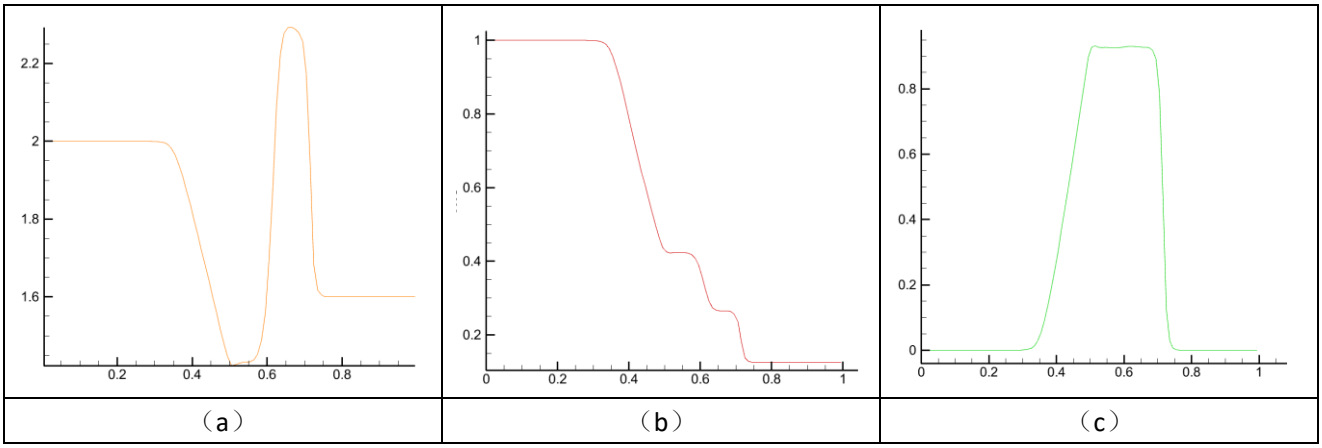


图 1：Sod 激波管 z-x 截面网格

如图 1 所示，采用$100\times15\times15$的均匀网格进行空间离散，$x+,x-$利用外推实现边界条件，其余边界采取对称边界条件。对于$Kn=10^{-4}$，$t=0.12$的计算结果如下图所示



（a） （b） （c）

图 2：（a）密度，（b）速度，（c）温度

1.5.2：三维圆球绕流

设置来流马赫数$Ma00=0.2$，雷洛数$\mathrm{Re}=50$，来流速度为$x+$方向。圆球直径$D=1$，球心坐标$(0,0,0)$，计算域$[-20,20]\times[-20,20]\times[-20,20]$，背景网格数量$20\times20\times20$，最大加密层级$7$。

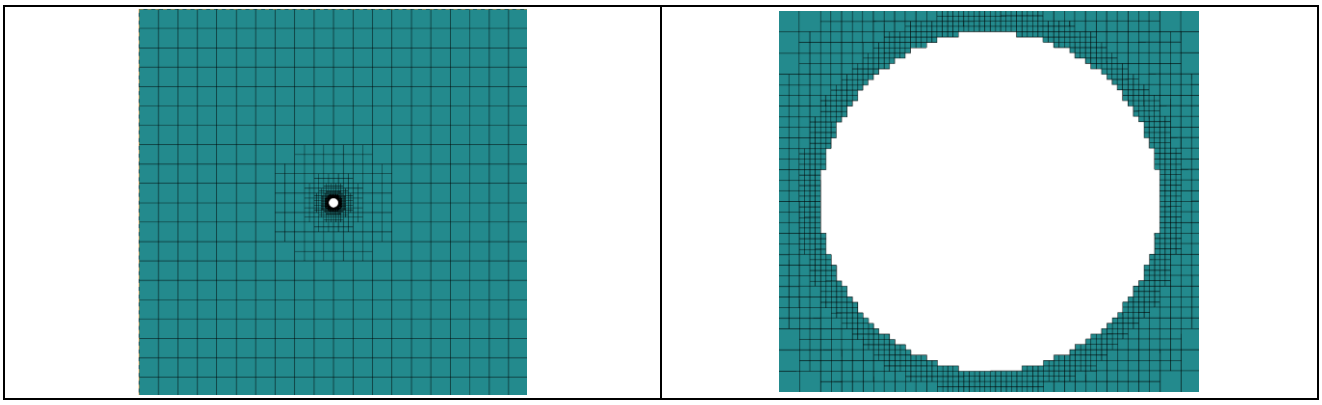


图 3：圆球绕流计算网格 x-y 截面

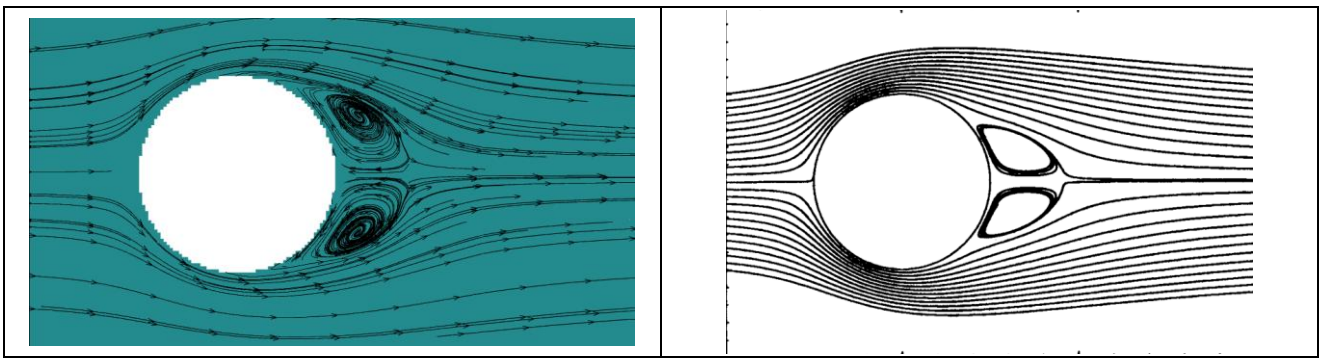


图 4：圆球附近流线图，GKS（左），参考文献[4]（右）

表 1：GKS 与参考文献[4]的对比

	GKS	参考文献[4]
分离长度x_s	0.42	0.41
涡心坐标	(0.616,0.299,0.299)	(0.640,0.211,0.211)

2 结　论

数值验证表明，该方法能够在 Sod 激波管问题中准确捕捉激波、接触间断与膨胀波。在三维圆球绕流算例中，当前方法能够定性给出合理的流场结构，但涡心坐标与参考文献相比，仍存在一定的差异。分析认为，这一偏差主要来源于悬挂单元与虚拟单元插值精度不够以及涡心附近网格分辨率不足。

总体而言，本文将自适应笛卡尔网格与 GKS 算法耦合，Sod 激波管验证了其可行性，三维结果揭示了边界条件以及悬挂单元处理环节的薄弱之处。后续工作将聚焦于处理虚拟单元与悬挂单元处插值精度的问题。

参 考 文 献:

[1] Xu, Kun. "von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1998-03." (1998).

[2] Zhu, Yajun, et al. "Unified gas-kinetic wave-particle methods. II. Multiscale simulation on unstructured mesh." *Physics of Fluids* 31.6 (2019).

[3] Chen, Songze, Kun Xu, and Zhihui Li. "Cartesian grid method for gas kinetic scheme on irregular geometries." *Journal of Computational Physics* 326 (2016): 862-877.

[4] Johnson, T. A., and V. C. Patel. "Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300." *Journal of Fluid Mechanics* 378 (1999): 19-70.

[5] Roos, Frederick W., and William W. Willmarth. "Some experimental results on sphere and disk drag." *AIAA journal* 9.2 (1971): 285-291.

基于笛卡尔网格无粘求解器的耦合边界层动量积分方法研究

邱乐瑛，谢 亮*

（中山大学航空航天学院，深圳 518107）

摘 要：针对传统贴体网格在翼型粘性气动计算中前处理复杂、人工网格修正成本高的问题，本文建立了一种基于笛卡尔网格无粘求解器的耦合边界层动量积分求解方法。该方法利用笛卡尔网格欧拉方程求解器获得翼型表面外缘速度与压力分布，并将其输入边界层动量积分方程，计算动量厚度、形状参数、位移厚度及阻力系数；随后根据位移厚度修正等效外形，并重新进行无粘流场计算，实现无粘流与边界层方程的迭代耦合。结果表明，该方法能够在较低网格生成成本下获得工程可用的边界层厚度和阻力预测结果，阻力系数误差处于工业允许范围内，可为翼型气动快速评估提供参考。

关键词：笛卡尔网格；无粘-有粘耦合；边界层动量积分方程；位移厚度

0 引 言

在翼型和飞行器外形气动计算中，粘性效应对边界层发展、摩擦阻力以及由位移厚度引起的等效外形变化具有重要影响。传统粘性流数值模拟通常需要在物面附近生成高质量贴体网格，并沿壁面法向布置高长宽比单元，以解析具有强法向梯度的近壁边界层。这一过程对网格质量、人工经验和前处理时间依赖较强，尤其在复杂外形或多轮外形迭代设计中，会显著增加工程应用成本[1]。

笛卡尔网格方法具有自动化程度高、生成速度快、适合复杂几何处理等优点，可以有效减少贴体网格绘制过程中的人工工作量[2]。然而，由于笛卡尔网格通常无法沿壁面法向进行高长宽比的各向异性布置，若直接在其上求解 NS/RANS 方程并解析高雷诺数近壁边界层，往往需要对物面附近进行大范围、近似各向同性的局部加密，从而导致网格量和计算开销显著增加[1,3]。同时，小切割单元会带来严格的时间步限制和数值稳定性问题[4,5]。因此，将笛卡尔网格无粘求解器与边界层动量积分方程耦合，通过位移厚度或等效质量亏损向外部无粘流反馈粘性影响，是一种兼顾计算效率与粘性修正能力的工程化思路。该方法既保留了笛卡尔网格快速、自动生成的优势，又避免了通过极高的近壁笛卡尔网格分辨率直接解析底层粘性结构；类似的无粘—粘性强耦合思想已在 ISES 和 XFOIL 等翼型分析方法中得到广泛应用[6,7]。

1 问题描述

本文构建了一套高效的基于笛卡尔网格的无粘-有粘耦合边界层动量积分方程的计算框架，其计算流程如图 1 所示。首先基于笛卡尔网格无粘求解器求解欧拉方程，根据驻点位置将翼型表面划分为上、下表面，并以驻点为起点，分别提取表面速度与压力作为边界层外缘速度U_e、压力P_e用于边界层动量积分方程的求解。动量积分方程计算动量厚度θ、形状参数H、摩擦系数C_f和位移厚度δ^*。其中，位移厚度由

$$\delta^* = H\theta \tag{1}$$

得到，为了在无粘计算与边界层计算之间传递粘性位移效应，本文采用壁面位移方法：将边界层位移厚度沿物面法向叠加至原始外形，构造无粘外部流动所感受到的等效几何，并将该等效几何重新提交至笛卡尔网格无粘求解器进行计算。如此反复迭代，直至外缘速度、压力分布和位移厚度收敛。该方法以位移厚度描述边界层质量流量亏损对外部无粘流的影响，是经典无粘—粘性相互作用方法中的一种直接耦合形式[6,8]。总体目标是在不直接求解完整 N-S/RANS 方程的前提下，通过边界层积分模型快速预测边界

层参数、更新等效外形，并计算工程所需的阻力。

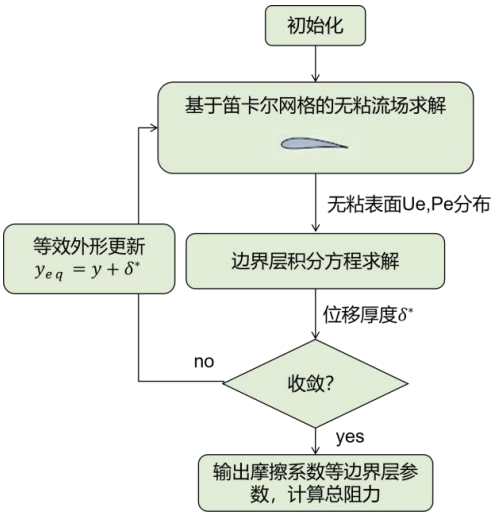


图 1 无粘-有粘耦合迭代求解流程图

在无粘-有粘耦合过程中，边界层计算得到的位移厚度用于构造等效新外形示意图如图 2 所示。

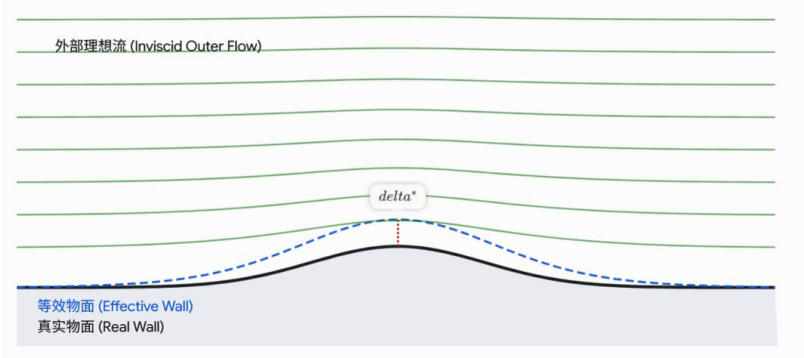


图 2 等效物面示意图

收敛后，翼型的总阻力系数由摩擦阻力和压力阻力两部分构成。其中摩擦阻力由边界层摩擦系数沿翼型表面积分获得，压力阻力由壁面压力系数及其在法向方向上的投影积分获得。通过该流程，可以在不求解完整 N-S/RANS 方程的情况下，获得具有工程参考价值的边界层厚度和阻力预测结果。

2 计算结果与分析

利用所构建的无粘-有粘耦合计算框架，对 NACA0012 翼型在特定层流工况下的气动性能进行了模拟与验证。工况参数设定如下

表 1 NACA0012 层流工况

Ma	p	aoa	Re
0.1	7292.08	0	2000

由于所计算的工况为层流，故只求解了公式 2-3。如图 3 所示为无粘-有粘耦合迭代过程中等效外形的演化过程，图 4 为其迭代过程中最大位移厚度增量的收敛过程。在边界层计算得到位移厚度后，通过将其叠加至原始物面形成有效几何外形，并交回笛卡尔网格无粘求解器进行重新计算。从图中不同迭代步数（step 5、step 15 及收敛步 step 39）的对比可以看出，随着迭代的进行，等效外形逐渐向外膨胀并趋于稳定。

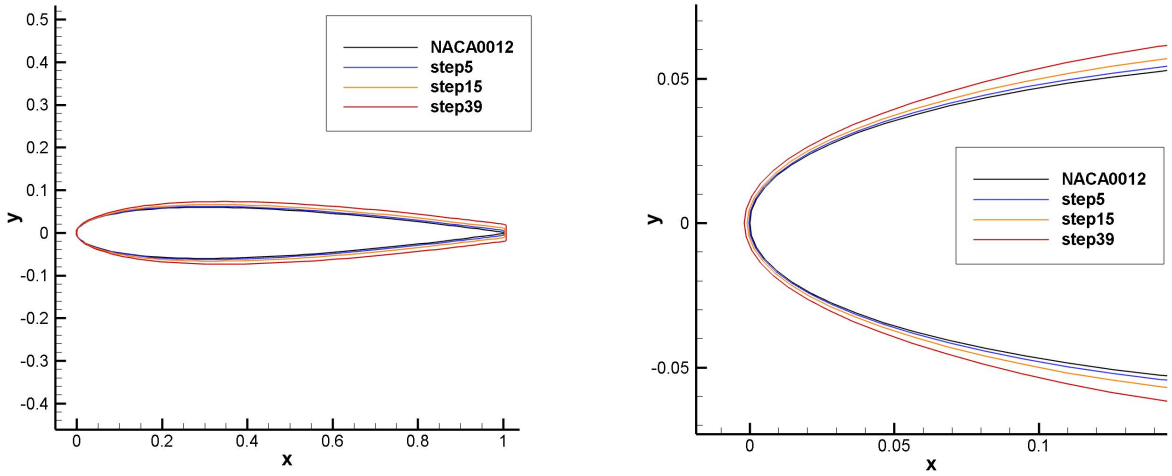


图 3 耦合过程等效外形变化过程

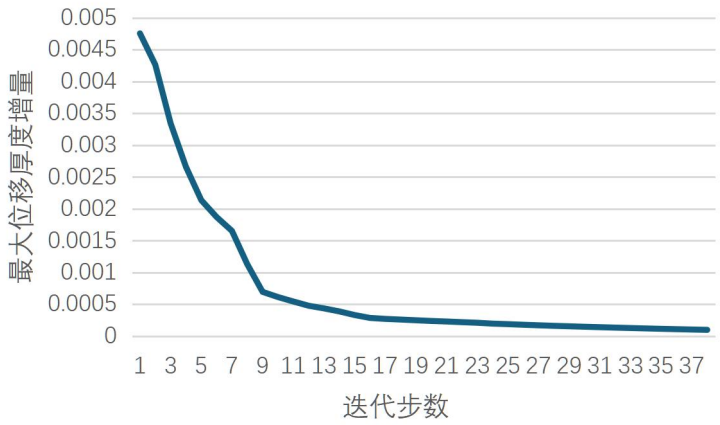


图 4 最大位移厚度增量收敛曲线

最终收敛的结果如图 5 所示，从图中可以看出，本文提出的无粘-有粘耦合求解方法（VII）所计算得到的表面摩擦系数c_f沿物面分布趋势与主流求解器（SU2）的计算结果吻合良好，尤其在前缘高梯度区域以及中后部区域，均能准确捕捉到c_f的变化规律。

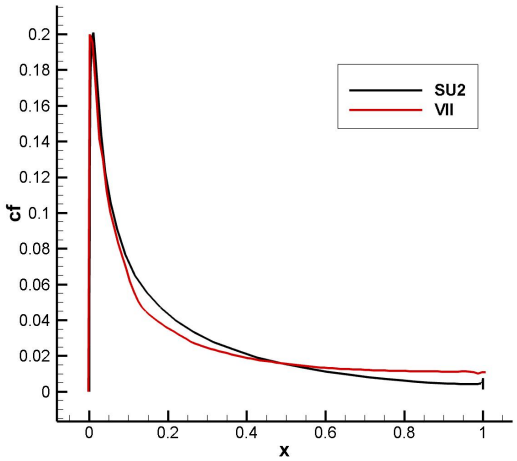


图 5 表面摩擦系数c_f沿物面分布与 SU2 求解结果对比

此外，表 2 给出了总体阻力系数C_D的对比结果。基准求解器 SU2 计算得到的C_D为 0.089177，而本文方法得到的C_D为 0.0850775，两者之间的相对误差仅为 4.597%。这一结果表明，在不直接求解完整 N-S/RANS 方程的前提下，基于的笛卡尔网格的无粘-有粘耦合计算框架不仅能够保持较高的计算精度，还能提升计算效率，验证了该方法的有效性与工程实用价值。

表 2 总体阻力系数C_D计算结果与 SU2 对比

	SU2	VII	相对误差
C_D	0.089177	0.0850775	4.597%

3 结　论

本文针对传统粘性流数值模拟对高质量贴体网格的强依赖及高计算成本问题，成功构建了一套基于笛卡尔网格的无粘-有粘耦合边界层动量积分方程计算框架，在无需求解完整 N-S/RANS 方程的前提下，实现了对翼型边界层参数和气动阻力的快速、准确预测。

在后续的研究中，拟从以下两个方向展开进一步拓展：

（1）湍流工况拓展：引入剪切应力滞后方程，将当前计算框架由层流顺利推进至湍流及转捩流动状态，全面提升复杂流动条件下的适应能力。

（2）三维流线扩展：将现有的二维边界层积分方法与三维笛卡尔网格无粘求解器相结合，开发适用于三维复杂飞行器表面的流线追踪与边界层耦合计算技术，进一步拓宽该方法在三维气动设计与工程优化中的应用前景。

参 考 文 献:

[1] MITTAL R, IACCARINO G. IMMERSED BOUNDARY METHODS[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2005, 37(1): 239-261.

[2] AFTOSMIS M J, BERGER M J, MELTON J E. Robust and Efficient Cartesian Mesh Generation for Component-Based Geometry[J].

[3] PIOMELLI U. Wall-layer models for large-eddy simulations[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2008, 44(6): 437-446.

[4] BERGER M J, LEVEQUE R J. Stable boundary conditions for Cartesian grid calculations[J]. Computing Systems in Engineering, 1990, 1(2-4): 305-311.

[5] 唐志共, 陈浩. 自适应笛卡尔网格超声速黏性流动数值模拟[J]. 航空学报, 2018, 39(5): 121697.

[6] DRELA M, GILES M B. Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils[J]. AIAA Journal, 1987, 25(10): 1347-1355.

[7] DRELA M. XFOIL: An Analysis and Design System for Low Reynolds Number Airfoils[C]//MUELLER T J. Low Reynolds Number Aerodynamics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989: 1-12.

[8] LOCK R C, WILLIAMS B R. Viscous-inviscid interactions in external aerodynamics[J]. Progress in Aerospace Sciences, 1987, 24(2): 51-171.

基于流形样条曲面的四边形网格几何优化

陈富卫，罗钟铉，雷娜*

（大连理工大学，大连 116620）

摘　要：针对任意拓扑四边形网格中普遍存在的单元非平面、局部翻转以及离散网格与后续样条曲面表达不一致等问题，提出一种由流形样条曲面反向驱动的几何优化方法。该方法保持网格连接关系不变，先由输入网格构造兼顾奇异点、边界和特征线的流形样条曲面，在几何拟合与相邻曲面片连续性约束下得到统一的光滑几何载体，再借助构造的流形样条曲面更新网格顶点。该策略把四边形网格优化从纯离散邻域平滑转化为曲面一致性校正。结果表明，基于流形样条曲面的几何优化能够在维持原拓扑和总体形状的同时，显著改善四边形的可平面化程度并抑制退化单元，为曲面重建、网格分析和后续高阶几何处理提供更一致的离散输入。

关键词：流形样条曲面；四边形网格；几何优化；非平面度；曲面拟合

0　引　　言

四边形网格兼具结构清晰、参数方向明确和高阶基函数构造方便等特点，是几何建模、有限元/等几何分析以及网格重构中的重要离散形式。现有自动四边形化多借助方向场、全局参数化与整数约束联合确定拓扑结构和几何嵌入[8]；但经过参数量化、等值线提取和局部拓扑修复后，所得网格仍可能包含非平面四边形、极端角度、边长振荡或局部翻转。直接采用拉普拉斯平滑容易引起曲面收缩和特征钝化，而基于角度、长宽比或 Jacobian 的显式质量优化虽能控制单元形状[6,7]，不同质量项与曲面逼近误差之间仍需权衡。

流形样条利用局部图册在任意拓扑网格上定义分片多项式曲面，可自然覆盖奇异点，并通过图册过渡与曲面片约束保持跨片一致性[1-3]。因此，若把由原网格拟合得到的流形样条曲面视为统一几何载体，再从曲面反求网格顶点，就可避免仅依赖离散一环邻域的无方向平滑。本文据此提出一种曲面驱动的四边形网格几何优化框架。其贡献体现在：1）在保持四边形网格拓扑与面数不变的前提下，建立网格与流形样条曲面的显式位置对应；2）基于该对应关系回写网格顶点，使离散网格与连续曲面在几何上相容；3）多类模型实验表明，该方法能够稳定降低单元非平面度并减少翻转单元，验证了其改善网格几何质量的有效性。

1　曲面驱动的几何优化

1.1　问题表述与数据关系

设原始三角网格为T，四边形网格为$Q=(V,F)$。优化过程中保持F及全部顶点--面关联不变，仅更新顶点坐标。本文严格以原始四边形网格作为控制网格的初始位置，原始三角网格则作为流形样条曲面的直接拟合对象和几何误差参考。目标首先是获得尽可能逼近T的连续流形样条曲面S，再利用Q与S在曲面片的明确对应，从S上重新取得四边形顶点V'。因此，最终输出点是曲面上的真实几何点，而不是优化方程中的控

制点坐标。

1.2 三角网格点投影与拟合参数

本文采用纯几何映射：以三角网格顶点x为查询点，在Q的近邻顶点一环中建立候选四边形面；将每个候选四边形沿对角线划分为两个三角形，计算x到三角形的最近点及其重心坐标，并转换为四边形局部参数(u,v)。最小距离对应的四边形面f与参数共同构成拟合样本(f,u,v,x)。

除全部三角网格顶点外，算法还采样边界边和二面角大于$60°$的特征边中点，以增强尖锐区域约束；若某四边形面没有被上述样本覆盖，则将其参数中心$(0.5,0.5)$投影到 T，形成保守的回退样本。这样既保留原始三角网格的几何细节，又避免按三角形面密度重复加权。

1.3 基于极形式同构的流形样条拟合与曲面点回写

流形样条$S=(M,C,F)$，其中M为带图册$A=(U_\alpha,\varphi_\alpha)$的参数流形，$C$为控制点集，$F:M\to R^3$为整体曲面映射。相交图册上的局部曲面$F_\alpha=F\circ\varphi_\alpha^{-1}$满足坐标无关性

$$F_\alpha=F_\beta\circ\varphi_{\alpha\beta},\ \varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}. \tag{1}$$

本文在每个四边形图表上采用双五次多项式曲面。其极形式f_α关于前、后五个变量分别对称且多维仿射，并满足$F_\alpha(u,v)=f_\alpha(u,u,u,u,u;v,v,v,v,v)$。因此，曲面控制点及局部曲面可写为

$$A_{ij}^{\alpha}=f_\alpha\left(\underbrace{0,\dots,0}_{5-i},\underbrace{1,\dots,1}_{i};\underbrace{0,\dots,0}_{5-j},\underbrace{1,\dots,1}_{j}\right),\qquad F_\alpha(u,v)=\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5}B_i^5(u)B_j^5(v)A_{ij}^{\alpha}. \tag{2}$$

极形式将局部网格点与曲面控制点之间的关系转化为显式仿射组合。对奇异点周围按环序排列的相邻曲面片$F^{(r)}$与$F^{(r+1)}$，设公共边为$E_r(v)$，则跨片G^1连续条件为

$$F_u^{(r)}(0,v)+F_w^{(r+1)}(v,0)=\beta_r(v)E_r'(v),\qquad \beta_r(v)=(1-v)\beta_0+v\beta_1. \tag{3}$$

令B_j为公共边控制点，U_j、W_j为两侧跨边向量，$T_k=B_{k+1}-B_k$为边界切向量。比较 Bernstein 系数即可把式(3)化为六组线性约束：

$$U_0+W_0=\beta_0T_0,\ U_j+W_j=\frac{5-j}{5}\beta_0T_j+\frac{j}{5}\beta_1T_{j-1},1\le j\le 4,\ U_5+W_5=\beta_1T_4. \tag{4}$$

双五次曲面为公共边两端的扭矢约束提供独立内部自由度，避免双三次曲面在多个奇异点间产生过约束。将式(2)、(4)装配后，以投影样本和薄板能量求解控制点P：

$$E(\mathbf{P})=\sum_s\left\|F_{\alpha_s}(u_s,v_s)-\mathbf{x}_s\right\|^2+\lambda\iint(\|F_{uu}\|^2+2\|F_{uv}\|^2+\|F_{vv}\|^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{5}$$

实验采用拟合阈值10^{-5}和$\lambda=0.05$。拟合后，依据半边方向建立网格顶点与相邻曲面参数角点的对应，流程见图 1。



图 1　三角网格直接拟合与流形样条曲面点回写流程

2　实验结果与分析

2.1　实验设置与评价指标

实验采用 Pietroni 等提出的可靠特征线驱动四边形重网格化方法所生成的原始四边形化结果及其平滑结果[10]：前者作为本文方法的输入，后者仅作为常规平滑对比基线。评价指标包括平均角度偏差、缩放 Jacobian、负 Jacobian 单元数、边长变异、平均非平面度，以及相对原始三角网格的对称 RMS 和近似 Hausdorff 距离。几何误差在候选四边形曲面和参考三角曲面上分别等面积采样 30 000 个点，进行双向最近三角形距离查询，并用参考模型包围盒对角线归一化。所有方法对同一模型使用相同随机种子，以减少采样噪声。

表 1　本文优化结果相对常规平滑结果的几何误差对比

模型	面数	RMS 平滑	RMS 本文	RMS 改善/%	Haus 改善/%
Bunny	6,495	6.87e-04	4.79e-04	+30.4	-4.0
Cube	4,344	2.16e-04	1.32e-04	+38.8	+6.6
Gargoyle	42,155	8.03e-04	4.41e-04	+45.2	+28.6
Knot	9,271	1.28e-03	1.32e-03	-3.6	-38.7
Spoon	9,458	3.96e-05	1.63e-05	+58.8	-25.0
D. torus	5,328	5.79e-04	5.34e-04	+7.7	-78.4

表 2　本文结果相对输入四边形网格的其它质量量变化（初/本）

模型	角偏差↓ 初/本	缩放 J↑ 初/本	边长变异↓ 初/本	非平面度↓ 初/本	负 J↓ 初/本
Bunny	16.13/15.34	0.904/0.914	0.176/0.168	1.32e-02/1.35e-02	17/12
Cube	1.04/1.02	0.998/0.998	0.014/0.014	3.62e-04/3.24e-04	0/0
Gargoyle	20.32/19.08	0.834/0.853	0.242/0.224	2.08e-02/2.54e-02	273/191
Knot	25.07/25.13	0.800/0.806	0.237/0.220	2.30e-02/2.41e-02	137/108
Spoon	23.12/22.87	0.853/0.855	0.478/0.477	1.10e-03/1.10e-03	7/3
D. torus	4.56/4.33	0.990/0.992	0.082/0.080	6.83e-03/5.24e-03	0/0

表 1 表明，六个模型中有五个模型的归一化 RMS 得到改善，模型级平均改善率为 29.55%。其中，Spoon、Gargoyle 和 Cube carved 分别降低 58.86%、45.15% 和 38.79%，Bunny 由 6.875×10^{-4} 降至 4.786×10^{-4}，降低 30.38%；Double torus 降低 7.69%，Knot 则增大 3.59%。Hausdorff 距离仅在 Cube carved 和 Gargoyle 上改善，而 Bunny、Knot、Spoon 和 Double torus 出现不同程度增大，说明当前全局最小二乘拟合更有利于降低平均误差，但尚未显式抑制少量局部离群点。

表 2 给出了相对输入四边形网格的单元质量变化。除 Knot 外，其余五个模型的平均角度偏差均降低；六个模型的缩放 Jacobian 均保持或提高，边长变异均未增大。存在翻转单元的 Bunny、Gargoyle、Knot 和 Spoon，其负 Jacobian 单元数分别由 17、273、137 和 7 降至 12、191、108 和 3；六个模型合计由 434 个降至 314 个，减少 27.65%。非平面度则仅在 Cube carved 和 Double torus 上降低，在 Spoon 上基本不变，在 Bunny、Gargoyle 和 Knot 上略有增加，表明几何逼近、单元平面性与局部有效性仍是相关但不完全等价的优化目标。

2.2 可视化对比

为直观展示几何精度变化，图 2～图 4 仅保留 Bunny、Cube carved 和 Gargoyle 三个模型。每个模型由三幅图横向排列：左图为本文方法的输入四边形网格，中图为之前方法相对输入三角网格的几何误差，右图为本文方法的几何误差。

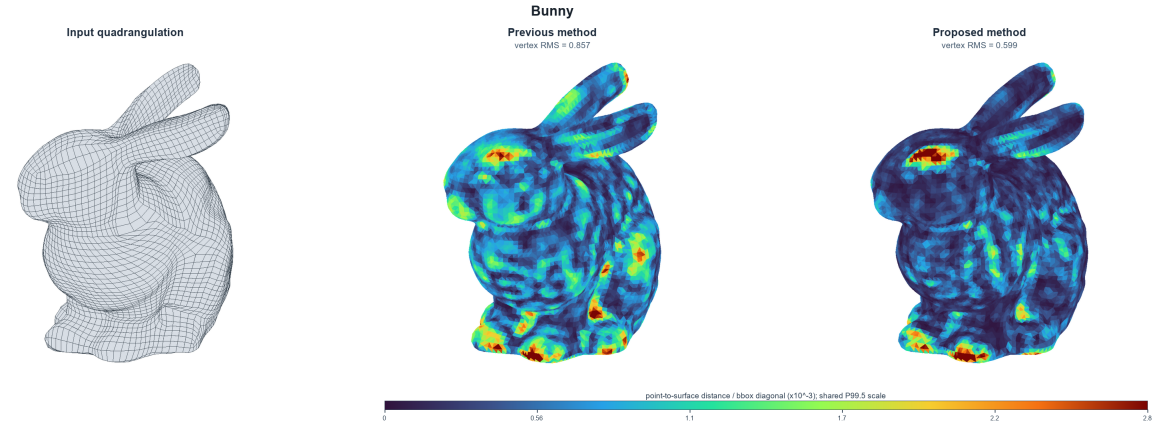


图 2　Bunny：输入四边形网格、之前方法与本文方法的几何误差

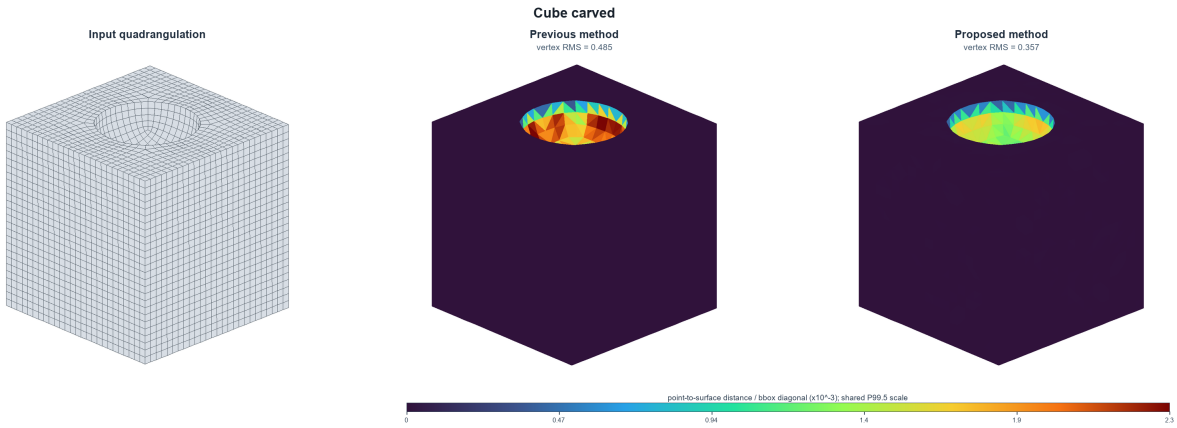


图 3　Cube carved：输入四边形网格、之前方法与本文方法的几何误差

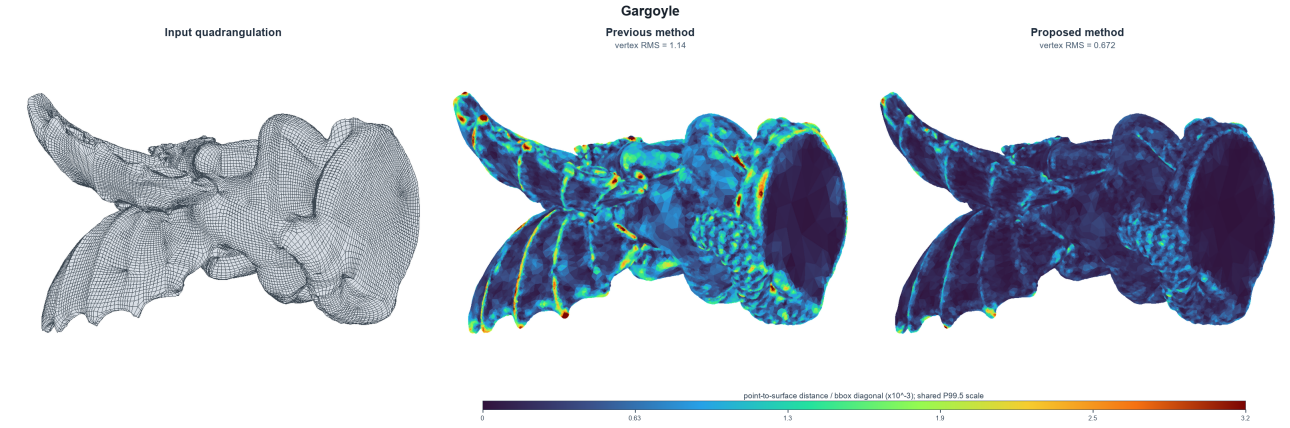


图 4　Gargoyle：输入四边形网格、之前方法与本文方法的几何误差

在共同色标下，本文方法在三个模型中的高误差区域均明显收缩。Bunny、Cube carved 和 Gargoyle 的三角顶点单向 RMS 分别由 0.857、0.485 和 1.14（$\times10^{-3}$）降至 0.599、0.357 和 0.672（$\times10^{-3}$），降幅约为 30.1%、26.4% 和 41.1%，与表 1 的双向采样 RMS 变化趋势一致。Cube carved 凹陷区域的橙红色高误差范围明显减小，Gargoyle 复杂褶皱和轮廓附近的连续高误差带也得到抑制；Bunny 的整体误差下降，但额头等少量局部极值仍然存在，这与其 Hausdorff 指标未同步改善相一致。

3　结　论

本文完善了一种由流形样条曲面反向驱动的四边形网格几何优化方法。其关键是以原始三角网格作为直接拟合对象，通过三角顶点到四边形面的几何投影获得拟合参数；控制网格严格由原始四边形化结果初始化，常规平滑网格只作为比较对象。本文方法的实验结果验证了流形样条曲面为四边形网格提供了高精度、拓扑一致的连续几何载体；若要同时获得严格的局部最大误差与单元有效性保证，还需将自适应采样、特征约束和可行域修正纳入统一优化。

参 考 文 献:

[1] GRIMM C M, HUGHES J F. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds[C]//Proceedings of SIGGRAPH. 1995: 359-368.
[2] GU X, HE Y, QIN H. Manifold splines[C]//Proceedings of the ACM Symposium on Solid and Physical Modeling. 2005: 27-38.
[3] YING L, ZORIN D. A simple manifold-based construction of surfaces of arbitrary smoothness[J]. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 271-275.
[4] EPPSTEIN D, GOODRICH M T, KIM E, et al. Motorcycle graphs: canonical quad mesh partitioning[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(5): 1477-1486.
[5] GREINER G. Variational design and fairing of spline surfaces[J]. Computer Graphics Forum, 1994, 13(3): 143-154.
[6] KNUPP P M. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(3): 217-241.
[7] LI Y, WANG W, LING R, et al. Shape optimization of quad mesh elements[J]. Computers & Graphics, 2011, 35(3): 444-451.
[8] BOMMES D, LÉVY B, PIETRONI N, et al. Quad-mesh generation and processing: A survey[J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(6): 51-76.
[9] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41): 4135-4195.
[10] PIETRONI N, NUVOLI S, ALDERIGHI T, et al. Reliable feature-line driven quad-remeshing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): 1-17.

网格策略与自适应过程对方柱–平板临界间隙流动及气动声学响应的影响

邢志超，徐林程*（西北工业大学航空学院）

摘 要：方柱尾迹与下游薄平板的相互作用在临界间距附近呈现竞争性流动模态，局部离散差异可能改变模态选择，并通过壁面非定常载荷放大为远场声压突变。本文在自适应笛卡尔网格上耦合多松弛时间格子 Boltzmann 方法（MRT-LBM）与二维频域 Ffowcs Williams–Hawkings（FW-H）声比拟，比较均匀单块网格、静态多块网格及两类自适应网格细化策略对临界间距、流动结构和气动声学响应的影响。结果表明，临界模态的选择并非仅由局部网格尺度决定，还受到网格组织方式及动态粗化过程的显著影响。静态网格在充分解析尾迹后表现出较稳定的预测，而两类 AMR 判据对粗化过程呈现不同响应，其中 AMR-2 的临界模态预测具有更强的参数依赖性。非临界工况下各网格策略保持相同主导模态和偶极型声辐射，临界区内则可能因剪切层卷吸与间隙脱涡状态切换产生显著声压差异。研究说明，临界流动的数值可信度不能仅由局部网格尺度或单一固定间距下的收敛性判断，还应同时报告细网格覆盖、层级界面、动态粗化设置及临界参数扫描分辨率。

关键词：方柱–平板；临界间隙流动；网格组织；自适应网格细化；气动声学

1 研究背景与目标

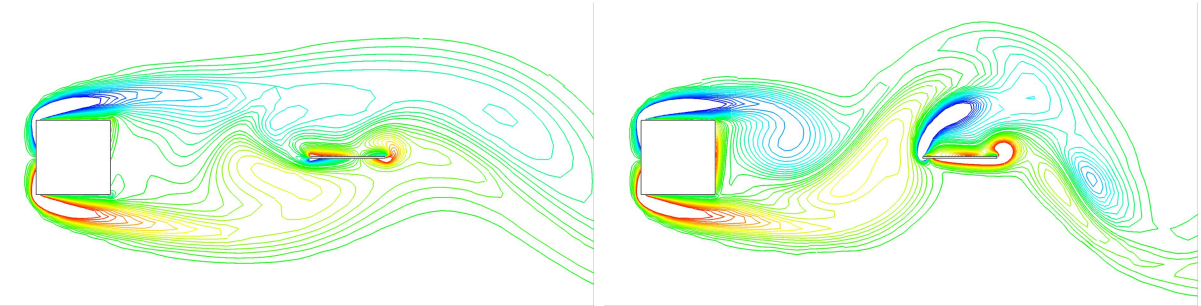
钝体尾迹与下游构件之间的干涉广泛存在于起落架、换热器、海洋结构和机械装备中。随方柱后表面至平板前缘间距 r 增大，方柱分离剪切层由受平板约束的延迟卷吸状态转变为间隙内的周期性脱涡状态；成熟涡旋随后冲击平板，使壁面压力脉动及远场噪声显著增强。临界区内两种长期流动状态相互竞争，因此网格层级连接、细网格覆盖和动态重构造成的有限离散扰动，可能改变临界位置，而不再只是使同一流动解产生连续的小幅误差。

本文将临界间距 r_c 作为竞争性流动模态选择的表征参数，重点回答三个问题：不同网格组织方式能否给出一致的 r_c；AMR 粗化过程是否会改变长期模态；这种变化如何经由近场流动与壁面载荷传递至远场声学响应。研究目的不是对两种 AMR 判据作普适优劣排序，而是揭示临界流动对网格过程扰动的放大机制。

2 数值方法与临界模态判定

近场流动采用 D2Q9 MRT-LBM 求解，高阶矩独立松弛以提高层级网格计算的稳定性；远场噪声采用二维频域 FW-H 方法，以方柱和平板固体壁面作为不可渗透积分面。在 M=0.2、Re=150 条件下，方柱边长为 D，下游平板长度 L=D、厚度 h=0.02D，观测半径为 80D。AMR-1 基于流场变量梯度识别大梯度区域，AMR-2 基于二阶导数识别曲率快速变化区域；两者采用相同的最细/最粗网格尺度，仅改变自适应判据和粗化阈值。圆柱与方柱绕流验证表明，MRT-LBM/FW-H 框架能够合理预测平均阻力、脉动载荷、Strouhal 数及偶极型声指向性。

沿 r/D 对模态转换区间进行扫描，并以 Δr/D=0.01 细化定位。当方柱剪切层首次在平板上游形成稳定的大尺度周期性脱落涡，且远场均方根声压同步突变时，将对应的最小测试间距定义为 r_c。因而，所报告 r_c 的可分辨精度受扫描步长限制，差异不超过 0.01D 时不作物理偏移解释。



(a) 延迟卷吸模态，r/D=2.7　　(b) 间隙脱涡模态，r/D=2.8

图 1 临界区间两侧的典型瞬时涡量场

图 1 显示，临界间距以下，剪切层尚未在间隙内完成卷吸便与平板作用，主要涡旋在平板下游形成；超过临界区后，方柱近尾流缩短，间隙内出现交替脱涡，涡旋周期性冲击平板。两种状态对应不同的非定常载荷形成机制，为临界位置附近的声压跃迁提供了流动物理基础。

3 网格组织方式对临界间距的影响

均匀单块网格不含粗细层级界面，可用于检验整体空间分辨率的影响。现有结果为：Δx/D=0.04、0.02 和 0.01 时，r_c/D 分别为 2.95、2.90 和 2.90。因此，在当前扫描精度下，均匀网格结果于 Δx≤0.02D 后稳定在 2.90，而 0.04D 的 2.95 仍属于未充分收敛结果。

静态多块网格通过局部加密方柱、间隙和平板附近区域降低计算量。随着尾迹区最大网格尺度由 0.16D 减小至 0.04D，r_c/D 由 2.63 增至约 2.80；继续加密至 0.02D 和 0.01D 后结果保持 2.80，形成稳定平台。进一步将每级细网格覆盖由原始配置扩展至 30 层，使主要高涡量剪切层不再穿越粗细界面，M0 与 M30 仍均得到 r_c/D=2.80。这说明在当前配置内，继续扩大覆盖范围不改变静态多块网格所选择的长期模态，但其平台值仍与均匀细网格相差 0.10D，明显大于扫描步长。

表 1 不同网格组织方式下临界间距的现有结果汇总

网格策略	控制变量	r_c/D	主要特征
均匀单块	Δx/D=0.04→0.02→0.01	2.95→2.90→2.90	整体加密后稳定
静态多块（含 M0/M30）	尾迹尺度≤0.04D；扩大覆盖	约 2.80	尺度与覆盖均形成平台
AMR-1	改变粗化阈值	2.78–2.82	阈值响应较弱
AMR-2	改变粗化阈值	2.42–2.82	强响应且局部非单调

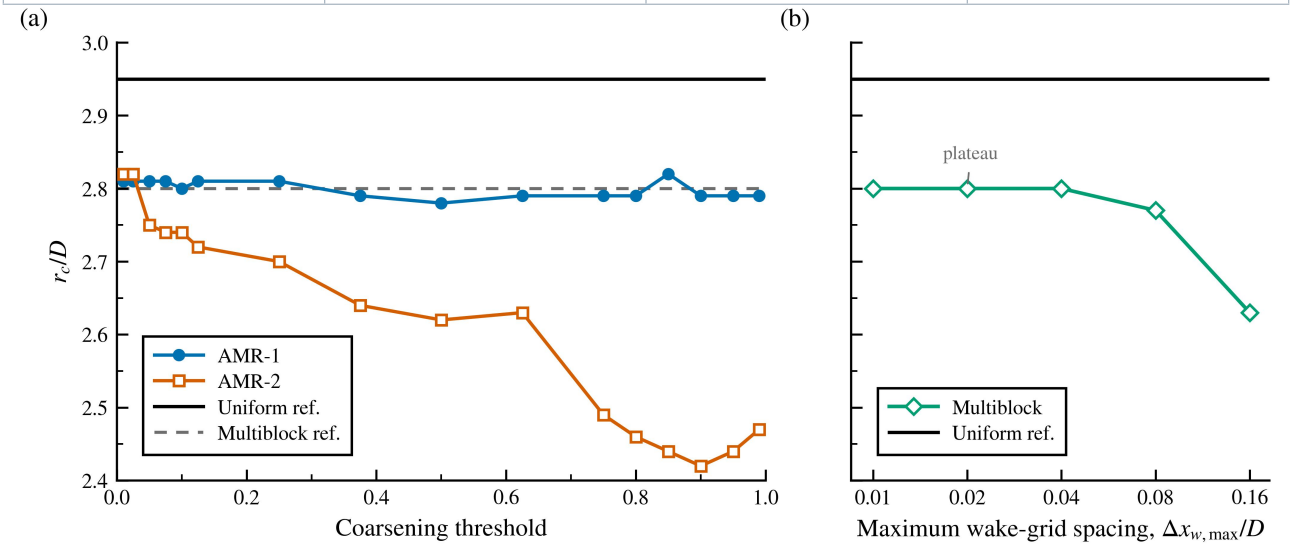
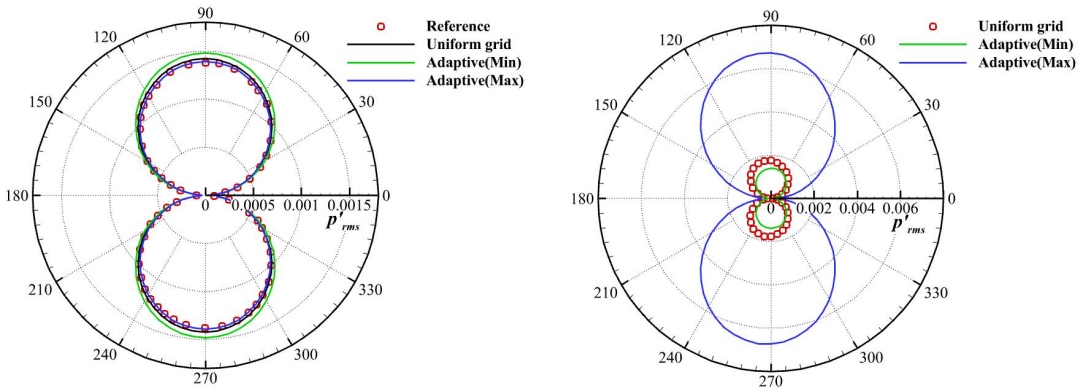


图 2 临界间距随 AMR 粗化阈值及静态多块尾迹尺度的变化（原图中的均匀网格参考线后续应按最新收敛值 2.90 更新）

在固定细化阈值下，AMR-1 所得 r_c/D 始终位于 2.78–2.82，围绕静态多块平台值小幅波动；AMR-2 则随粗化阈值放宽总体向更小间距移动，最低达到 2.42，并在高阈值区呈局部非单调变化。两类方案的差异表明，临界间距不仅取决于最小网格尺度，还取决于细网格保留与释放、层级界面相对剪切层的位置以及动态重构频率。现有结果尚不能把这种变化唯一归因于数值耗散，因为网格覆盖、界面位置、层间传递和重构过程会同时改变。

4 非临界稳定与临界放大

为区分同一模态内部的离散误差与模态切换造成的有限跃迁，选取 r/D=0.5 和 5.6 作为非临界对照，并以 r/D=2.6 表征临界敏感区。小间距时，平板位于方柱近尾流回流区内，剪切层在不同网格设置下均未于间隙内独立脱涡；大间距时，各设置均形成成熟卡门涡街。两种非临界状态下，静态粗细网格及 AMR 阈值变化主要引起声压幅值的有限偏差，辐射主方向和偶极型特征保持一致。



(a) 非临界工况 r/D=0.5，AMR-2　　(b) 临界敏感区 r/D=2.6，AMR-2

图 3 非临界与临界工况下代表性 AMR-2 设置的远场 RMS 声压指向性

与非临界工况相比，r/D=2.6 时不同设置的声压曲线差异明显增大，且 AMR-2 的响应强于 AMR-1。其原因并非 AMR 参数直接进入 FW-H 方程，而是网格过程首先改变剪切层卷吸和涡旋形成位置：延迟卷吸模态下，平板位于较长低速回流区内，表面压力脉动较弱；间隙脱涡模态下，成熟涡旋冲击平板前缘及上下表面，横向非定常载荷增强，最终形成更强的远场偶极声辐射。因此可建立“网格设置—局部离散解析—流动模态—壁面载荷—远场声压”的作用链条。由于方柱、平板及组合系统的脉动载荷统计尚未补齐，本文现阶段仅对该链条作流场与声学层面的定性验证，不报告未经数据支撑的载荷增幅。

5 主要结论

1. 均匀单块网格加密至 $\Delta x \le 0.02D$ 后得到 $r_c/D=2.90$；静态多块网格在尾迹最大尺度≤0.04D 时形成约 2.80 的平台。二者差异为 0.10D，不能由 0.01D 的扫描分辨率解释。
2. 扩大静态细网格覆盖范围未改变 r_c，而 AMR-2 对粗化阈值表现出远强于 AMR-1 的响应，说明动态保留/释放过程及层级组织能够参与临界模态选择。
3. 网格过程的影响具有明显状态依赖性：远离临界区时主要表现为同一模态内部的幅值误差；临界区内则可能触发长期流动模态切换，并放大为壁面载荷与远场声压的有限跃迁。
4. 临界流动的可信度评价应同时报告网格尺度、细网格覆盖、层级界面、自适应阈值、扫描步长和统计时间；单一固定间距下的气动力或声压一致，不能替代对临界参数的系统扫描。

基于结构/非结构网格的时域电磁 FVTD 算法

许 勇， 傅杨奥骁， 江 涛， 李 鹏， 于新童

（中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所，绵阳 621000）

摘 要：目标电磁特性数值模拟过程中，网格形式、网格密度及网格分布对离散化的电磁求解器软件算法精度和效率有重要影响，因此有针对性地研究不同网格形式的电磁算法成为关键因素之一。本文针对结构网格和非结构网格提出一种全隐式时域有限体积方法。它直接求解时域麦克斯韦方程组，采用双时间方法添加定常虚拟时间导数项，物理时间推进步长由数值精度决定而不受稳定性限制，虚拟时间子迭代则满足格式稳定性要求。空间隐式通量采用 Steger-Warming 分裂。电磁散射数值试验表明，结构/非结构网格 FVTD 算法在保持高数值精度同时，能节省计算时间并提升计算效率。

关键词：麦克斯韦方程组，时域有限体积法，电磁场，雷达散射截面

0 引 言

计算电磁学包含两大类数值模拟方法，一类是求解电磁流积分程组的数值算法—矩量法[1]。矩量法主要采用表面耦合积分方程(Coupled Integral Equation，CIE)来分析计算电磁流分布，在导体表面用电场积分方程(electric field integral equations， EFIE)、磁场积分方程(magnetic field integral equations， MFIE)或组合场积分方程(combined field integral equations， CFIE)来描述，矩量法在解决电大尺寸导体目标电磁散射方面取得巨大成功。另一大类则是求解电磁学麦克斯韦方程组的有限元法[2]（Finite Element Method, FEM）和时域有限差分法[3]（Finite Difference Time Domain, FDTD）。上世纪 90 年代随计算机发展，时域有限体积法[4-5](Finite Volume Time Domain, FVTD)从 CFD 领域引入到计算电磁学，FVTD 使用贴体保形网格并且网格单元形状多样，适用于复杂外形、介质目标的电磁模拟问题。

时域方法能自洽地模拟散射、辐射、波激励等复杂电磁现象，且能准确模拟整个场变化时间历程，对特殊电磁现象(如边缘绕射)也不用专门处理，因此目前广泛应用于各种时变电磁问题。但是早期时域方法如传统 FDTD 都使用显式格式，显式方法最大缺点是其时间步长受稳定性约束，时间推进必须采用最小全局时间步长，网格贴体加密（例如棱边、尖点、台阶等几何奇异处网格加密以反映大的场梯度），由此产生很小全局时间步长，使获取稳定的时变电磁场需更多时间，带来效率下降与计算资源浪费。

求解电磁学麦克斯韦方程组或赫姆霍兹波动方程的微分类算法，需要用网格把连续的三维空间区域划分开。对于散射体外的无限大空间，需要人为设置边界条件使求解区域具有有限尺寸，这种做法会带来截断误差和网格的色散误差，而且对计算机硬件资源也有较高的要求。本文涉及的时域有限体积法，支持结构网格和非结构网格以及多区域分解，采用贴体网格直接将麦克斯韦方程组守恒律的积分形式应用到离散的曲线坐标系网格单元。

1 时域有限体积法与算例

电磁学时域麦克斯韦方程组两个旋度方程守恒形式为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}B_x\\B_y\\B_z\\D_x\\D_y\\D_z\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{F}_x=\begin{bmatrix}0\\-E_z\\E_y\\0\\H_z\\-H_y\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{F}_y=\begin{bmatrix}E_z\\0\\-E_x\\-H_z\\0\\H_x\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{F}_z=\begin{bmatrix}-E_y\\E_x\\0\\H_y\\-H_x\\0\end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度矢量；$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量；$\boldsymbol{F}$ 是通量矢量。

电磁通量 $\boldsymbol{F}$ 采用 Steger-Warming 分裂计算：

$$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{F}_k^{+}+\boldsymbol{F}_k^{-}\qquad k=\xi,\eta,\zeta \tag{2}$$

双时间步方法是计算流体力学中常用的一种非定常算法，包含物理时间推进为外循环，以及添加的虚拟时间子迭代作为内循环的双重循环时间推进，对应控制方程组(1)经双时间步方法处理改变为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \tau}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z}=0 \tag{3}$$

虚拟时间定常内循环 $\partial \boldsymbol{Q}/\partial \tau=0$，收敛到原方程组。物理时间导数后向差分计算有二阶时间精度。

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}=\frac{3\boldsymbol{Q}^{n+1}-4\boldsymbol{Q}^{n}+\boldsymbol{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \tag{4}$$

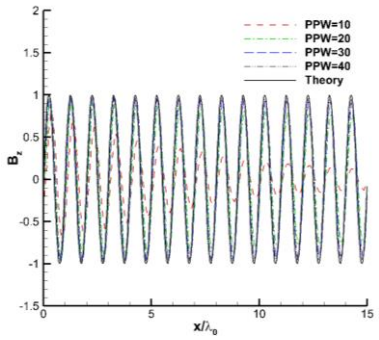


图 1 网格密度对一维电磁传输的影响

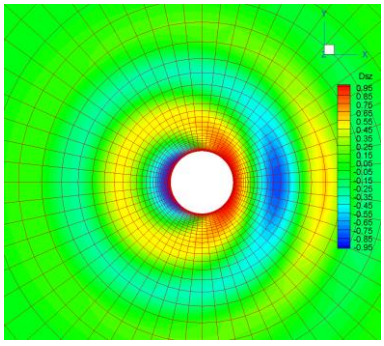


图 2 二维结构网格与散射电场等值线云图

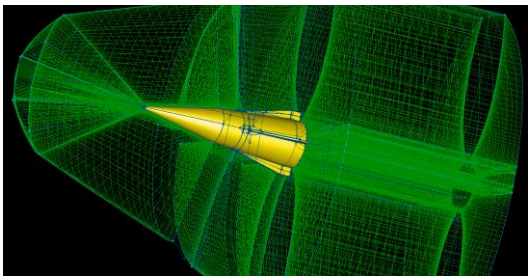


图 3 三维复杂外形目标及电磁计算结构网格

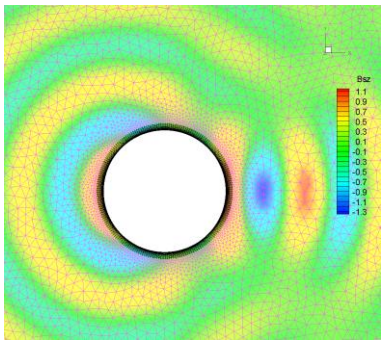


图 4 二维非结构网格与散射磁场等值线云图

2 结　论

本文针对目标电磁特性数值模拟问题，分别基于结构网格和非结构网格条件，开发了一种直接求解时域麦克斯韦方程组、全隐式时域有限体积方法。数值算例表明，该方法能成功并准确模拟一维、二维以及三维情况目标电磁传输与散射的广泛问题。

参 考 文 献:

[1] SONG J, LU C C, CHEW W C. Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects[J]. IEEE transactions on antennas and propagation, 1997, 45(10):1488-1493.

[2] 金建铭, 王建国译. 电磁场有限元方法[M]. 西安：西安电子科技大学出版社, 1998.
J M JIN. Finite Element Method of Electromagnetic Field. Xi An, Xi An electronic science and technology university press[M]. 1998.

[3] YEE K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE transactions on antennas and propagation, 1966, AP-14: 302-307.

[4] SHANG J S, GAITONDE D. Characteristic-based time-dependent Maxwell equations solver on a general curvilinear frame [C]. AIAA-93-3178.

[5] 许勇, 丁明松, 江涛, 等. 时变电磁场计算的隐式 DTS-FVTD 方法[J]. 电波科学学报,2025, 40(2): 294-300.
XU YONG, DING MINGSONG, JIANG TAO, et al. Implicit DTS-FVTD method for solving time dependent electromagnetic fields[J]. Chinese journal of radio science, 2025, 40(2): 294-300.

动态非结构重叠网格的并行增量装配方法

曾凯，乔龙，李艳亮

（中国航空工业空气动力研究院，沈阳 110000）

摘　要：非结构重叠网格方法通过在独立生成的部件网格之间建立洞单元、插值单元与贡献单元关系，为复杂构型、多体相对运动及大位移非定常流动提供了灵活的网格处理手段。然而，在动态计算中，传统方法通常随网格运动反复执行全域壁面距离计算、单元类型判定、贡献单元搜索、插值模板生成和进程间通信关系重构，使重叠网格装配成本随网格规模、部件数量和并行进程数显著增长。然而在实际应用中，相邻物理时间步之间的网格位移通常小于局部网格尺度，插值边界仅在有限空间邻域内迁移。针对全量重新装配未充分利用时间相干性的问题，本文基于已经开发的基于壁面距离的重叠网格隐式装配方法，面向分布式非结构网格提出一种并行增量装配框架。该方法以上一时间步装配结果为基准，将动态装配表述为单元状态、贡献关系和通信依赖的增删更新问题，通过构造受影响域数据结构，仅使可能发生状态变化的单元进入重新判定过程，为大规模动态非结构重叠网格更新提供了高效的装配方法。此外，为保证局部更新的可靠性，该方法设置插值边界连通性检查、贡献模板合法性检查和全量装配回退等机制，保证了动态装配更新的鲁棒性。针对动态装配中不断有单元进入和脱离计算域，本文采用最大熵线性权重等多种机制降低了动态拓扑切换引起的非物理扰动。

关键词：非结构重叠网格；动态网格；增量装配；并行装配

0 引　言

重叠网格方法将复杂计算域分解为相互覆盖的背景网格和部件网格，各子网格可以独立生成、独立分区并随对应物体运动。与依赖网格变形或频繁重构的单域动网格方法相比，该方法更适合多体分离、舵面偏转、旋翼运动及多体耦合等存在大范围相对运动的问题。重叠网格方法的关键并非网格本身的生成，而是重叠网格装配（overset grid assembly, OGA），即在所有子网格单元中确定参与控制方程离散的计算单元、由其他网格提供数据的插值单元以及被屏蔽的洞单元，并为每个插值单元建立合法的贡献单元及插值模板。

针对并行分区非结构网格，Roget 和 Sitaraman[1]建立了自动并行装配方法，并讨论了复杂分区边界、贡献单元搜索及装配负载不均衡等问题。Horne 和 Mahesh[2]面向大量运动非结构网格发展了大规模并行连接算法，利用网格运动的时间相干性减少重复搜索。Chang 等[3]采用背景网格、全局—局部搜索及并行推进阵面构造了非结构网格隐式洞切割方法。Xia 等[4]进一步利用壁面距离减少装配查询点，提高了并行非结构重叠网格装配效率。这些研究为自动洞切割、并行 donor 搜索及工程应用奠定了基础。

动态计算仍然面临显著的重复装配问题。当任一部件发生运动时，全量方法通常重新计算大范围壁面距离，并重建全部洞切割结果、插值边界、贡献模板和通信关系，而相邻时间步中真正变化的区域往往只占总网格的一小部分。Fu 等[5]基于洞边界识别和扩展缩小了参与动态重装配的单元集合，说明局部

重装配具有明确的性能潜力。然而，动态 OGA 不仅包含洞单元判定，还包含空间查询结构、壁面距离、插值边界、贡献模板和分布式通信依赖等相互耦合的环节。仅局部更新其中一个环节，其他环节仍可能形成主要开销；若局部影响域识别不完整，还可能产生跨分区拓扑断裂、无效贡献单元或未初始化的新激活单元。

基于上述认识，本文研究动态非结构重叠网格的并行增量装配问题，实现在增量判据成立时复用未变化区域以提高装配效率，并在局部性假设失效时自动回退，从而同时满足装配正确性、鲁棒性和并行效率要求。

1 问题描述

（1）动态重叠网格装配问题

设计算域由N_z个相互重叠的非结构子网格组成，第 z 个子网格在时刻t^n的几何位置由刚体或一般网格运动映射$x^n = \mathcal{M}_z^n(x^0)$给出。对任一真实单元$e_i$，定义重叠状态

$$s_i^n \in \{C, A, H\}$$

其中，C 为计算单元，A 为插值单元，H 为洞单元。若$s_i^n = A$，还需确定中心贡献单元D_i^n、插值模板$\mathcal{S}_i^n$、权重集合W_i^n以及贡献单元所属 MPI 进程。因而，一个时间步的装配结果可表示为

$$\mathcal{A}^n = \{s^n, D^n, \mathcal{S}^n, \mathcal{W}^n, \mathcal{G}_{comm}^n\},$$

其中$\mathcal{G}_{comm}^n$为 D-A 进程通信图。全量装配由当前全部网格几何直接计算$\mathcal{A}^{n+1}$；增量装配则以$\mathcal{A}^n$为输入，只求取状态差分

$$\Delta\mathcal{A}^{n+1} = \mathcal{A}^{n+1} \ominus \mathcal{A}^n$$

理想情况下，其计算量应主要取决于状态发生变化的单元数$N_{\Delta e}$、变化的插值连接数$N_{\Delta c}$及相关通信邻居数。因此，问题的关键是构造一个既足够小、又不会遗漏任何可能变化单元的受影响集合Ω_{dirty}^{n+1}，并保证该集合之外的历史结果仍然有效。

（2）运动感知的受影响域与局部壁面距离更新

对发生运动的子网格，依据其从t^n到t^{n+1}的平移、转动或节点位移构造表面扫掠包络。包络向外扩张的安全宽度由局部单元尺度、插值层数和最大相对运动量共同确定。上一时间步的洞边界、插值边界及其邻接缓冲层与扫掠包络相交后形成初始脏区。为适应强非均匀和高长宽比网格，安全宽度使用局部几何尺度，而不是单一全局平均尺度。

壁面距离缓存的处理方法是当查询点所属网格或目标壁面发生运动，且对应空间包围盒与扫掠区域相交时，才重新计算该距离；其他距离结果保持不变。局部更新完成后，对受影响域边界执行闭合检查。若边界上的距离优先级或内外判定与历史状态不一致，则继续扩张受影响域，直至状态变化被完整包围

或触发全量回退。

（3）跨分区增量拓扑传播

以上一时间步最终插值阵面、扫掠包络相交单元及失效连接对应的插值单元为初始阵面，对访问单元执行与全量装配完全一致的隐式判型准则。若新旧状态不同，则将其面邻接单元加入下一层；若状态相同且位于安全包络之外，则停止沿该方向传播。对于 MPI 分区边界，阵面单元及变化标志在每一传播层后交换，使变化能够跨进程连续迁移，而不是仅在本地真实单元中扩散。

增量传播结束后重新提取局部 C-H 界面，并对新增、删除和保留的插值单元分别处理。通过并行连通性检查检测断裂阵面、孤立计算区及不合法双重插值链。如果访问单元比例超过阈值、影响域无法闭合或并行检查失败，则清除当前增量结果并执行全量隐式装配。该回退机制使性能优化不改变装配问题的最终定义。

（4）贡献关系与通信图的增量维护

对保留的插值单元，首先检查上一时间步中心贡献单元是否仍包含当前贡献单元中心，并验证仍为独立计算单元。若原贡献单元有效，则直接复用其进程，并仅在几何位置变化时更新插值权重；若原贡献单元失效，则以其为起点执行邻接单元搜索。失败后依次转入目标进程局部 KDT 搜索和基于全局包围盒的完整并行搜索。新生成的插值单元直接进入分级搜索流程，被删除插值单元对应的贡献单元模板和通信项则从缓存中移除。

为避免中心贡献单元切换导致整个离散模板突变，插值模板不局限于中心贡献单元的一环邻域，而是在可跨时间步复用的固定物理支撑半径内构造。候选贡献单元穿过支撑边界时，通过在边界处函数值及一阶导数均为零的 Wendland 核实现连续加入和退出。线性插值采用正权、单位分解且线性精确的局部最大熵权重；最小二乘插值则以最大熵权重为稳定基准，在局部矩阵条件允许时混入二次精确权重，并以总负权重上限约束修正幅度。该机制分别针对动态界面的两类主要数值扰动：连续支撑域抑制插值模板离散切换，受限二次修正降低受体中心状态随网格相位变化的曲率截断误差。

通信层以进程对之间新增、删除和保留的 D-A 关系为差分，更新$\mathcal{G}_{\mathrm{comm}}$。只有存在变化请求的进程对交换连接数据；未变化的插值模板和通信缓冲区保持不变。必要的全局归约仅用于模式选择、失败检测和回退决策，主体搜索与模板更新限定在受影响进程邻域内。该设计旨在避免每个时间步重建全部进程通信关系，并降低大规模并行环境中的全局同步开销。

（5）新激活单元处理

新激活单元需要按不同状态转移分别处理。对于 H-C 单元，旧洞区值不具有物理有效性，本文将优先使用同一子域内可信计算邻居对守恒变量进行局部重构；本地信息不足时，采用跨子域网格贡献单元

插值，并同步当前场、非定常历史层。仅对此类真正新激活单元及其邻域实施有限时间步的低阶保护，防止局部初始化误差被高阶重构放大。对于 A-C 单元，其当前层和历史层已经由贡献单元连续更新，因此直接沿用已有状态，不重复初始化。新激活单元机制用于保证拓扑切换后的状态合法性和求解鲁棒性。

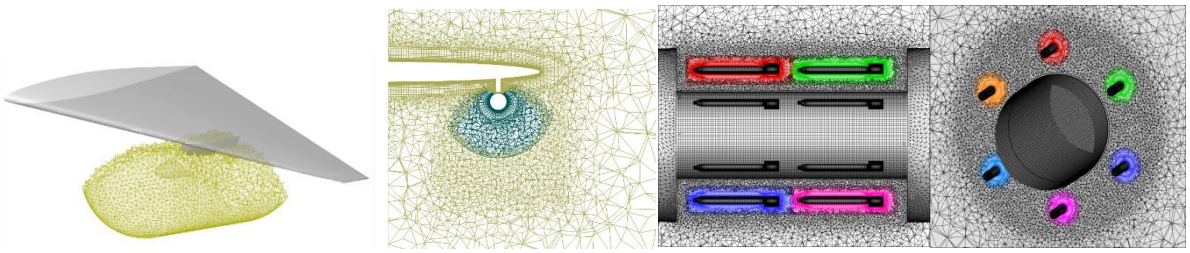


图 1 三维构型的动态重叠网格装配测试（左：AEDC-WPS 外挂投放标模；右：子母弹分离模型）

2 结　论

本文针对动态非结构重叠网格全量重装配中大量状态、搜索和通信信息被重复计算的问题，提出并行增量装配方法。该方法将动态 OGA 表述为单元状态、贡献模板和通信依赖的差分更新，通过运动扫掠包络和历史插值边界确定受影响域，在分布式网格上执行跨分区拓扑传播，并利用历史贡献单元搜索信息进行分级搜索和连接复用。局部壁面距离失效和增量通信图维护使增量思想覆盖从几何判定到求解器连接更新的主要环节；连续紧支撑、局部最大熵与受限二次修正用于降低移动人工界面的插值模板切换和截断扰动；分类的新激活计算单元处理则保证这些单元状态的合法性。闭合检查、合法性检查和全量回退共同为算法鲁棒性提供保障。

当前工作已形成自动隐式装配、并行贡献单元搜索、动态模式选择、局部拓扑判定、历史贡献单元提示及新激活单元处理等基础模块。后续将重点完成增量—全量逐项等价验证及大规模并行测试量化该算法收益。预期最终方法能够在保持全量装配拓扑与插值合法性的前提下，使动态装配耗时大幅降低，为复杂多体运动问题的高效非定常计算提供基础。

参 考 文 献:

[1] Roget D, Sitaraman J. Robust and efficient overset grid assembly for partitioned unstructured meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 260: 1－24.

[2] Horne W J, Mahesh K. A massively-parallel, unstructured overset method for mesh connectivity[J]. Journal of Computational Physics, 2019, 376: 585－596.

[3] Chang X H, Ma R, Wang N H, Zhao Z, Zhang L P. A parallel implicit hole-cutting method based on background mesh for unstructured Chimera grid[J]. Computers & Fluids, 2020, 198: 104403.

[4] Xia J, Fu H, Tian S L, Chen L. Highly efficient wall-distance-based parallel unstructured overset grid assembly[J]. AIAA Journal, 2021, 59(12): 5347－5359.

[5] Fu H, Xia J, Tian S L. A new overset grid assembly strategy for dynamic grid systems[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2023, 211: 171－191.

重叠网格分布特性对分布式复合翼飞行器流场气动特性影响的数值仿真研究

杨硕[1]，史万里[1]，贺宇豪[1]，杨万里[2]，徐腾宏[2]

（1 中国航空工业集团公司沈阳空气动力研究所，沈阳 110034；2 合肥览翌航空科技有限公司，合肥 230000）

摘　要：本文针对分布式复合翼飞行器构型，采用不同分布特性的重叠网格系统构建悬停状态流场，通过数值仿真分析网格分布特性对流场涡结构捕捉以及气动特性的影响，探讨表面网格分布和空间网格分布特性及多块重叠网格的组装关系对计算结果的影响。

关键词：分布式复合翼飞行器，重叠网格，网格分布，滑流干扰

0 引　言

低空经济是以各种有人驾驶和无人驾驶航空器的各类低空飞行活动为牵引，辐射带动相关领域融合发展的综合性经济形态。低空经济作为新兴支柱产业，其核心载体是低空空域巡航的民用航空器，包括直升机、倾转旋翼机、小型固定翼飞机、eVTOL（电动垂直起降航空器）等。其中 eVTOL 以分布式复合翼飞行器为典型代表，具有垂直起降、绿色环保、高效巡航等综合优势，在低空物流、载人交通、应急救援等场景有良好的发展前景。

由于低空飞行环境的复杂性，以及低空飞行任务的多样性，eVTOL 在设计定型过程中对气动外形设计、仿真验证等技术需求是急迫的。本文针对典型的分布式复合翼飞行器构型，探讨基于动态重叠网格技术构建低空典型飞行状态流场的数值仿真方法，并对复合翼飞行器非定常流场结构及气动特性进行研究。

1 问题描述

分布式复合翼飞行器机翼采用了展弦比较大的梯形翼设计，机翼上布置了分布式的旋转轴垂直地面的升力桨，以及旋转轴平行地面的推进桨，用以适应地面垂直起降和空中高速巡航助推的综合性要求。分布式多旋翼的设计方案具有较好的综合性能，但其气动外形的复杂性和多旋翼控制律的复杂性，以及低空亚音速飞行环境的复杂性，导致复杂的流场结构和复杂的气动干扰作用，气动外形设计及气动性能验证工作有诸多难点。

考虑重叠网格系统能够描述这种复杂运动控制律，本文采用动态重叠网格方法构建分布式复合翼飞行器流场，通过流场数值仿真结果对比分析，探讨适用的网格分布特征，以及能够捕捉到分布式多旋翼滑流尾迹、低空亚音速飞行滑流干扰效应、机翼的附着流动和分离流动等复杂流动现象的网格系统。

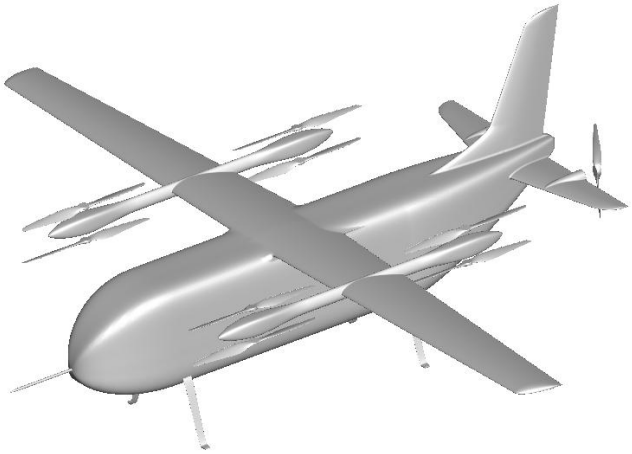


图 1 分布式复合翼飞行器构型

本文采用动态重叠网格方法构建分布式复合翼飞行器流场，构建远场计算域生成背景网格，将飞行器机身和机翼、尾翼、起落架作为平飞部件构建单独的机身网格，每个旋翼桨单独构建旋转网格，将所有网格进行组装形成完整的复合翼飞行器流场。

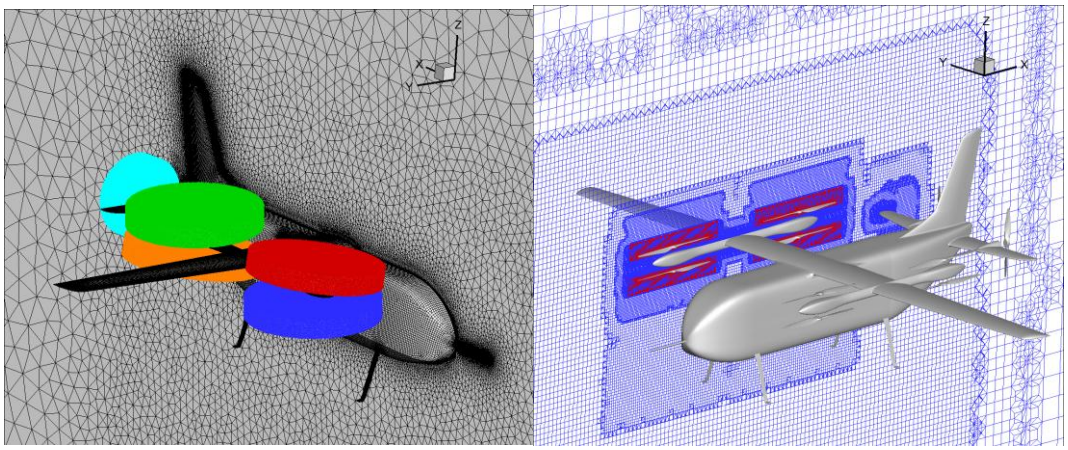


图 2 分布式复合翼飞行器动态重叠网格

对重叠网格系统开展网格分布特性研究，每个单块网格设置粗、中等、细三种表面网格分布密度，构建单块空间网格。背景网格中包含机身表面，采用非结构混合网格边界层+笛卡尔空间网格的形式，粗、中等、细网格的通过机身机翼的表面网格尺度和机翼下洗区空间网格单元最大尺度来控制网格量，网格单元最大尺度依次降低 0.8 倍，不考虑远场大尺度网格单元的影响。对于每个旋翼桨盘网格，采用结构网格形式，粗、中等、细网格保持拓扑关系一致，而各方向上网格点数依次增长 1.25 倍，空间网格单元总数则依次加倍。最后协调背景网格与旋翼桨盘网格之间的网格尺度匹配关系，保持旋翼桨盘网格与背景网格在重叠边界的最大网格尺度匹配，从而形成粗、中、细三套重叠网格系统，网格单元总量依次为 8400 万、11000 万、15800 万。

采用飞行器空中悬停工况开展数值仿真方法研究，数值仿真计算采用自研求解器，流场控制方程为非

定常可压缩 Navier-Stokes 方程，采用 SA-IDDES 算法。

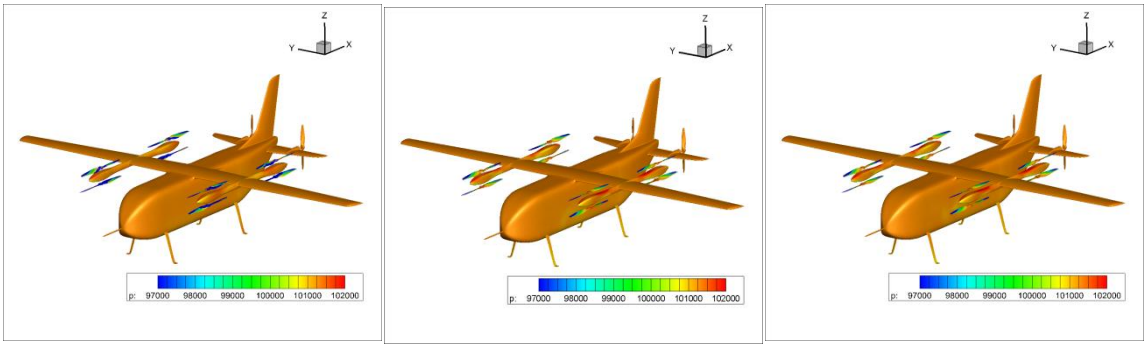
飞行器起飞重量 136kg，空中悬停时自然风速为 4.2m/s，重力加速度按照 9.8m/s² 计算，飞行器悬停升力应为为 1342.32N，阻力相对升力为小量。计算获得的飞行器气动力结果如下表所示。

表 1 气动力计算结果

网格编号	网格单元总数（万）	升力（N）	阻力（N）
粗网格	8400	1403.73	44.26
中等网格	11000	1351.97	27.03
细网格	15800	1358.59	26.99

计算结果显示中等网格和细网格的升阻力计算结果基本一致，且与飞行器悬停升力差距在 1%左右，粗网格相对偏差较大。

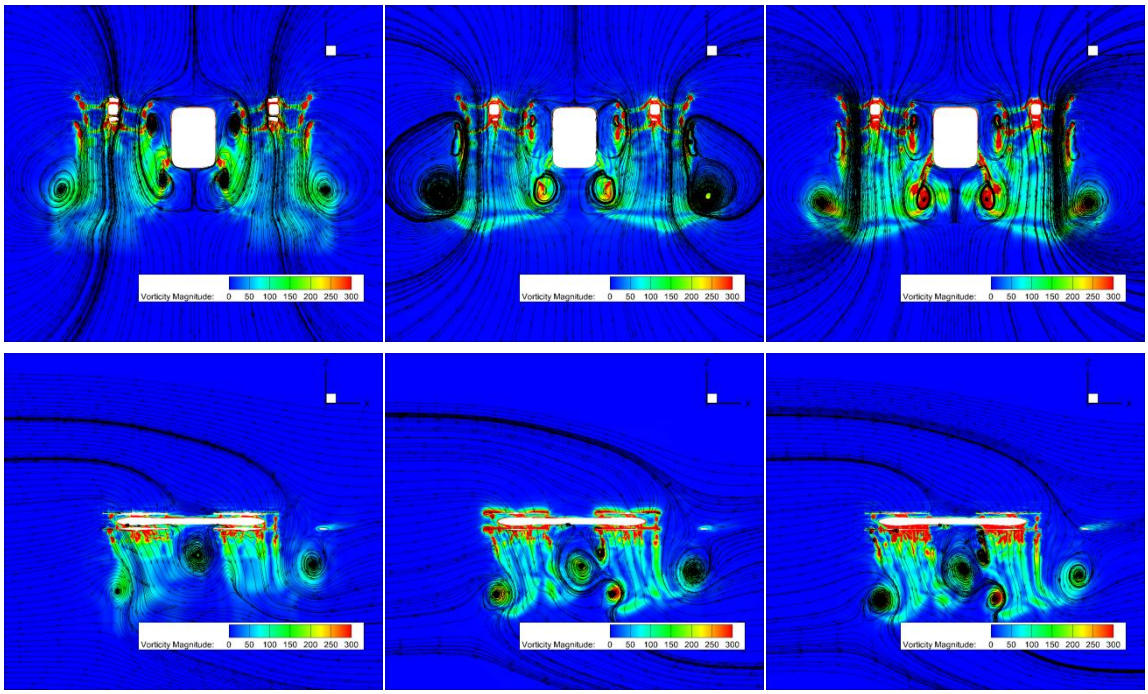
粗、中等、细网格获得的飞行器表面压力分布计算结果如下图所示。中等网格和细网格的计算结果基本相同，4 个上桨盘表面压力分布特征一致，4 个下桨盘结论相同。而粗网格在桨毂区域存在突变的低压区，这是由于桨毂附近区域的重叠边界网格单元不完全匹配，背景网格单元尺度过大，导致桨盘区域流场解析分辨率不足。而桨盘表面压力分布的差异与升力值的差异相对应。



（a）粗网格　　（b）中等网格　　（c）细网格

图 3 不同网格表面压力计算结果

选取机翼前桨盘的中心截面作为特征截面，粗、中等、细网格获得滑流下洗流空间涡量分布及表面流线计算结果如下图所示。空间网格分布特性对旋翼下洗流的运动和耗散影响很大，空间网格尺度会影响滑流下洗过程中涡核耗散速度，并且空间网格增长率会影响下洗流涡核运动位置和强度，从而导致粗网格获得的滑流结果在离开桨盘区域后，涡核强度迅速降低，且靠近机身侧的涡核垂向位移量较小。



（a）粗网格　　（b）中等网格　　（c）细网格

图 4 不同网格空间涡量及表面流线计算结果

2 结　论

本文采用动态重叠网格系统构建分布式复合翼飞行器流场，将机身、机翼、旋翼桨盘等关键气动部件的网格单元量依次加倍，生成粗、中等、细三套网格，基于不同网格数值仿真结果，探讨了表面网格分布特性、空间网格分布特性及多块重叠网格的组装关系对计算结果的影响。其中表面网格分布密度会影响气动力结果，网格重叠边界单元尺度不匹配会导致压力场突变，而空间网格分布特性影响滑流的运动轨迹和涡核耗散。

参 考 文 献:

[1] P.R.Spalart, .H.Strelets, S.R.Allmaras, “Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach”, Proceedings of 1st AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, LA, Aug.1997.

[2] Patricia Coronadol，Carlos Velez，Marcel Ilie，Ge-Cheng Zha，High angle of attack helicopter blade-vortex interaction; numerical studies using LES. AIAA 2011-55.

[3] 王博,招启军,徐广,徐国华. 一种适合于旋翼前飞非定常流场计算的新型运动嵌套网格方法[J].空气动力学学报, 2012, 30(1) : 14-21.

[4] 曹 栋,曹义华. 垂直下降状态下的旋翼三维流场数值模拟. 北京航空航天大学学报. 2012, 38(5): 641-647.

A Particle-Based GPU Parallel Method for Fast and High-Quality Tetrahedral Mesh Generation

Yuefan Hu[1], Honglei Bai[1], Chunguang Xu[1], Huaibao Zhang[1*]

[1*]School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou, 510006, Guangdong, China.

*Corresponding author(s). E-mail(s): zhanghb28@mail.sysu.edu.cn;
Contributing authors: hyfgrid@163.com; baihlei3@mail.sysu.edu.cn;
xuchg5@mail.sysu.edu.cn;

Abstract

In this paper, we propose a GPU-parallelized framework for efficient and high-quality tetrahedral mesh generation based on particle relaxation. The framework incorporates two complementary strategies: GPU-accelerated Adaptive Smoothing Length Smoothed Particle Hydrodynamics (ASL-SPH) for efficient particle relaxation, and an adaptive initial particle distribution strategy based on local integration over a three-dimensional background grid to improve relaxation convergence. After particle relaxation, TetGen's Delaunay tetrahedralization algorithm is employed to establish the topological connectivity and generate the final tetrahedral mesh. By combining GPU acceleration with adaptive initialization, the proposed framework improves the efficiency of the overall mesh generation process. Comparative experiments using identical boundary inputs demonstrate that the proposed method achieves shorter generation time and better mesh quality than TetGen's default mesh generation workflow under the tested conditions.

Keywords: Tetrahedral Mesh, Smoothed Particle Hydrodynamics, GPU Parallelization, Delaunay Tetrahedralization Method, Particle-Based Mesh Generation Method

1 Introduction

Mesh generation is a critical preprocessing step in numerical simulations, often accounting for a significant portion of the total computational time. Previous studies

report that mesh generation can consume approximately 60% of the overall simulation runtime [1][2]. Furthermore, NASA's CFD2030 report highlights that mesh generation remains a major challenge impacting simulation efficiency [3]. Meshes can be categorized into two types: structured and unstructured meshes. Structured meshes exhibit regular topological features, which facilitate computational efficiency; however, fully automatic topological partitioning remains an open and challenging problem in mesh generation [4][5]. In contrast, unstructured meshes offer superior adaptability to complex geometries and a high degree of automation. The flexible placement of mesh vertices enables straightforward mesh refinement and local enrichment. Consequently, unstructured meshes are extensively employed in engineering applications. Among them, tetrahedral meshes are particularly popular due to their simplicity, ease of construction, and ability to conform to complex domains [6]. The current mainstream tetrahedral mesh generation methods primarily include the Delaunay algorithm [7][8], the Advancing Front method [9][10], and the octree-based method [11][12]. The Delaunay algorithm satisfies size distribution requirements by incrementally inserting points and reconstructing the local mesh; however, it requires additional boundary recovery procedures [13][14]. In three dimensions, boundary recovery for the Delaunay algorithm remains a challenging problem and has been extensively investigated [15][16]. The advancing front method initiates from a prescribed boundary and progresses layer by layer. While it can strictly preserve the geometric boundary, its performance depends on the organizational strategy of the front and places stringent demands on the convergence in complex domains [17]. The octree-based method generates meshes rapidly via spatial recursive subdivision, performing well for simple geometries but requiring additional cutting to handle irregular boundaries [18]. Although these approaches are capable of producing high-quality meshes, they exhibit certain limitations: (1) sensitivity to complex geometries, which increases the complexity of geometric processing; (2) all three algorithms are inherently designed with serial architectures, making them challenging to adapt to GPU-based fine-grained parallelism.

The particle-based mesh generation method treats grid points as a set of interacting particles. By simulating inter-particle interactions, an optimal point cloud distribution is achieved within the computational domain, after which the Delaunay algorithm is applied to connect these points into a mesh [19]. The core of particle-based mesh generation lies in the particle relaxation strategy, which can be classified into three main categories: energy minimization, mechanical models, and the SPH method.The energy minimization strategy models particles as variables and defines an energy functional F to quantify the deviation of the point set from the target density. By iteratively minimizing F using gradient descent or quasi-Newton methods, the particle distribution progressively converges to the desired configuration. A representative approach in this category is Centroidal Voronoi Tessellation [20]. The mechanical modeling strategy treats particles as mass points, with nodes interconnected by repulsive forces to simulate their spatial distribution at mechanical equilibrium. A commonly used approach is the repulsive potential energy model [21]. The SPH method, originating from fluid mechanics [22][23], treats mesh nodes as particles driven by fluid interaction forces. Their positions are updated through iterative relaxation until they conform to the

target size field distribution. Subsequently, particle topology is connected to generate a high-quality adaptive mesh [24][25][26].

The SPH-based particle relaxation strategy provides a physically grounded approach to particle distribution and enables the point cloud to adapt to the target size field. Therefore, SPH is adopted for particle relaxation in this study. However, the iterative nature of particle relaxation entails substantial computational costs, limiting its efficiency in practical engineering applications. Previous studies have developed CPU-parallel mesh generation frameworks based on multiphase SPH, enabling parallel domain decomposition and mesh construction [27]. Nevertheless, the computational cost of iterative relaxation remains a major bottleneck. To address this limitation, this paper proposes a GPU-parallelized tetrahedral mesh generation framework based on Adaptive Smoothing Length Smoothed Particle Hydrodynamics (ASL-SPH). By exploiting the Lagrangian nature and local interaction characteristics of SPH, the particle relaxation process is parallelized on the GPU to improve computational efficiency. Furthermore, an adaptive initial particle distribution strategy based on local integration over a three-dimensional background grid is introduced to provide a suitable initial particle configuration and accelerate relaxation convergence. After relaxation, TetGen's Delaunay tetrahedralization algorithm is employed to construct the final tetrahedral mesh. The main contributions of this work are summarized as follows:

- A GPU-parallelized ASL-SPH particle relaxation strategy is developed to accelerate particle evolution and improve the computational efficiency of mesh generation.
- An adaptive initial particle distribution strategy based on three-dimensional background grid integration is proposed to improve the initial particle configuration and accelerate relaxation convergence.
- Comparative experiments with TetGen, using identical boundary inputs, demonstrate that the proposed framework achieves shorter overall mesh generation time and improved tetrahedral mesh quality under the tested conditions.

2 Method

2.1 Overview of The Method

The proposed method comprises the following steps: 1. Reading the model surface mesh; 2. Generating the target fields, including the target size field, target density field, and signed distance field; 3. Generating initial adaptive particles based on the target density field; 4. Performing GPU-parallel particle relaxation using the ASL−SPH scheme; 5. Establishing particle topological relationships via the constrained Delaunay algorithm to construct the tetrahedral mesh. Particle relaxation is executed on the GPU device, while algorithmic control and auxiliary computations are performed on the host. To fully exploit computing resources and enhance overall efficiency, parallelization is also applied wherever possible on the host. Detailed descriptions of the algorithm are provided below Figure 1.

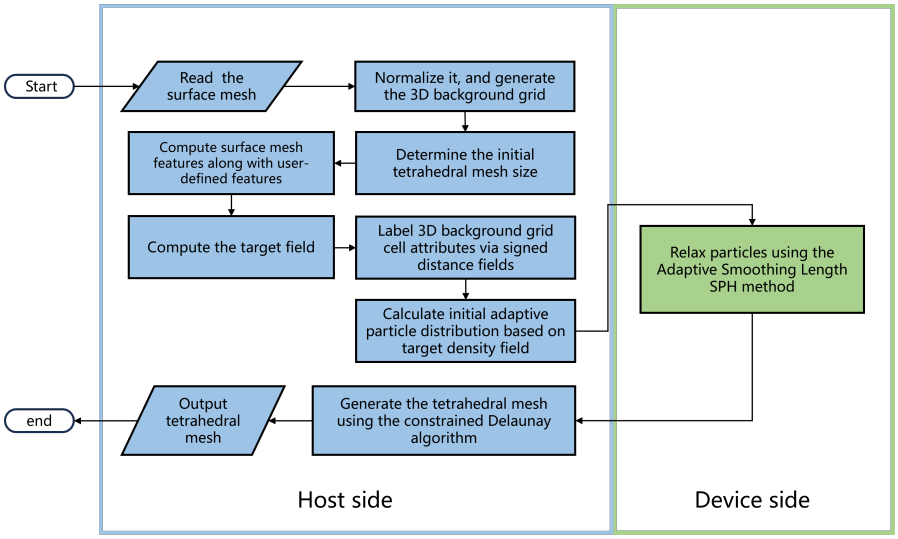


Fig. 1: Overview of the Proposed Method: Process Flow and Module Division

2.2 Model Input Data

The proposed method takes input in the Piecewise Linear Complex format, a standard data structure for representing geometric domains requiring meshing. A Piecewise Linear Complex is composed of vertices, segments, and facets that collectively define the boundaries and internal voids of a 2D or 3D domain.

2.3 Target Field Definition

The target field primarily comprises the target size field $h(\mathbf{x})_t$, target density field $\rho(\mathbf{x})_t$, and signed distance field $sdf(\mathbf{x})$. Since GPUs are more efficient at accessing simple data structures, a 3D uniform background grid is employed to store the target field and is thus implemented as a one-dimensional array. The $h(\mathbf{x})_t$ governs the final particle distribution to achieve a prescribed mesh density. During the SPH-based computation, the particle pressure gradient is driven by the $\rho(\mathbf{x})_t$, thereby guiding particle motion. The $h(\mathbf{x})_t$ is determined based on both the geometric features of the model and user-defined specifications. The relationship between the $\rho(\mathbf{x})_t$ and the $h(\mathbf{x})_t$ is expressed as follows:

$$\rho(\mathbf{x})_t = \frac{1}{(h(\mathbf{x})_t)^3}. \tag{1}$$

The model boundary is treated as the zero isosurface for computing the $sdf(\mathbf{x})$, with distances inside the domain assigned positive values and those outside negative values. Once the signed distance field is obtained, all background grid points and cells are labeled: cells inside the domain are assigned a value of 1, cells outside -1, and intersecting cells 0. During particle relaxation, particle region properties can be efficiently determined by interpolating the $sdf(\mathbf{x})$.

2.4 Initial Adaptive Particle Distribution

We propose a local integration method, based on a three-dimensional background grid, for generating an initial adaptive particle distribution. The core principle is as follows: each particle is assigned a unit mass that remains constant throughout the relaxation process. The computational domain is traversed cell by cell, and whenever the accumulated mass within a cell exceeds unity, a particle is randomly placed inside that cell. After all cells have been processed, an initial adaptive particle distribution is established across the computational domain. The mass of each grid cell is computed using the following formula:

$$m_{cell_{(i,j,k)}} = V_{cell_{(i,j,k)}} * \rho_{t,cell_{(i,j,k)}}, \tag{2}$$

here, $cell_{(i,j,k)}$ denotes the grid cell. $V_{cell_{(i,j,k)}}$ represents the volume of a grid cell, and $\rho_{t,cell_{(i,j,k)}}$ represents the cell's average target density, which is calculated by interpolating the target density field at the eight grid points and taking their mean. The initial adaptive particle distribution is then computed using the following algorithm:

2.5 Relaxation

2.5.1 Adaptive Smoothing Length SPH

The ASL-SPH method is an extension of the standard SPH technique, designed to improve simulation accuracy and adaptability [28][29]. Its core principle lies in the automatic adjustment of each particle′s smoothing length based on the local particle density. During mesh generation with the ASL-SPH method, the local smoothing length is determined by interpolating the target size field. Moreover, the ASL-SPH method alleviates load imbalance and facilitates more efficient utilization of GPU computing resources. In the present study, all flows are assumed to be isothermal and incompressible, leading to two primary governing equations [26][30].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla \rho) = 0. \tag{3}$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{a}_i^{pre} + \mathbf{a}_i^{vis}. \tag{4}$$

The acceleration resulting from the repulsive pressure force $\mathbf{a}_i^{pre}$ is calculated using the following discrete formulation:

$$\mathbf{a}_i^{pre} = -\sum_{j=0}^{n} m_j \left(\frac{P}{(\rho_{(t,i)})^2} + \frac{P}{(\rho_{(t,j)})^2} \right) \frac{\partial W(||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||, h_i)}{\partial ||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||}, \tag{5}$$

here, m denotes the particle mass, P the reference pressure, and $\mathbf{r}$ the particle's position in space. The target density, $\rho_{(t,j)}$, is obtained by interpolating the relevant values from the target density field. h_i denotes the smoothing length.

The discrete formulation for computing the acceleration due to viscous forces $\mathbf{a}_i^{vis}$ is:

$$\mathbf{a}_i^{vis} = \sum_{j=0}^{n} m_j \frac{2\eta_i \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \left(\frac{1}{(\rho_i)^2} + \frac{1}{(\rho_j)^2} \right) \frac{\partial W(||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||, h_i)}{\partial ||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||} \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j||}, \tag{6}$$

Algorithm 1 Initial Adaptive Particle Distribution

Input: 3D background grid resolution (n_x, n_y, n_z), 3D background grid $\mathcal{G}$, cell flags $\mathcal{F}$
Output: Set of in-domain particles $\mathcal{P}_{\text{in}}$
Initialize total mass accumulator: $Q \leftarrow 0$
Set cell size: $h = 0.3 \times h_{\max}$, $V_{\text{cell}} \leftarrow h^3$
for $k = 0$ to $n_z - 2$ **do**
  for $j = 0$ to $n_y - 2$ **do**
    for $i = 0$ to $n_x - 2$ **do**
      Retrieve cell flag: $label \leftarrow \mathcal{F}[i + j(n_x - 1) + k(n_x - 1)(n_y - 1)]$
      if $label \in \{-1, 0\}$ **then**
        continue ▷ Skip cells outside the domain
      end if
      Estimate cell density:

$$\rho_{t,cell_{(i,j,k)}} \leftarrow \frac{1}{8} \sum_{\text{corner } \mathbf{p}} \text{Interpolate}(\mathbf{p}, \mathcal{G})$$

      Compute cell mass: $m_{cell_{(i,j,k)}} \leftarrow \rho_{t,cell_{(i,j,k)}} \cdot V_{\text{cell}}$
      Accumulate total mass: $Q \leftarrow Q + m_{cell_{(i,j,k)}}$
      Determine number of particles to generate: $n \leftarrow \lfloor Q \rfloor$
      if $n > 0$ **then**
        Define cell bounds:

$$x \in [ih, (i+1)h], \quad y \in [jh, (j+1)h], \quad z \in [kh, (k+1)h]$$

        for $l = 1$ to n **do**
          Sample particle position (x, y, z) randomly within the cell
          Add particle: $\mathcal{P}_{\text{in}} \leftarrow \mathcal{P}_{\text{in}} \cup \{(x, y, z)\}$
        end for
        Update accumulator: $Q \leftarrow Q - n$
      end if
    end for
  end for
end for

the parameter η indicates the fluid′s dynamic viscosity, $\eta_i = 0.1\rho_{(t,i)}h_i\,|\mathbf{v}_i|$, while ρ_i specifies the actual density of particle i during the relaxation process.

The actual particle density is calculated as follows:

$$\rho_i = \sum_j m_j W(||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|\,|, h_i). \tag{7}$$

The equation of state is adopted from [26] and is given as follows:

$$p_i = P\frac{\rho_i^2}{\left(\rho_{(t,i)}\right)^2}, \tag{8}$$

where p_i is the pressure.

The smoothing kernel function employed in this work is the Wendland Quintic (C6) kernel [31][32]. One of its commonly used formulations is given as follows:

$$W(r,h) = \begin{cases} \alpha_3 \left(1-\frac{q}{2}\right)^8 \left(4q^3 + 6.25q^2 + 4q + 1\right), & 0 \le q \le 2 \\ 0, & q > 2, \end{cases} \tag{9}$$

here, $q = \frac{r}{h}$, where r is the distance between two particles, and h denotes the smoothing length, computed as the average of the smoothing lengths of the two particles. The constant α_3 is given by:

$$\alpha_3 = \frac{1365}{512\pi h^3}. \tag{10}$$

2.5.2 Field Search

During the iteration process, it is necessary to query the neighboring particles of each particle to compute physical quantities such as density and acceleration. Therefore, an efficient spatial search structure is required. In this work, we propose a GPU-oriented fast search algorithm. A uniform grid ($grid_{(m,n,l)}$) is adopted as the underlying data structure to facilitate efficient neighbor searching. The grid is first initialized using the h_{max} as the cell size. Each particle is then assigned a hash value and registered to the corresponding grid cell, Fig2. When querying a particle's neighbors, only the particles in the corresponding cell and its adjacent cells need to be traversed, allowing for rapid identification of neighboring particles.

The hash value corresponding to a grid cell is computed as follows:

$$\text{Hash}_{(i,j,k)} = k \cdot m \cdot n + j \cdot m + i. \tag{11}$$

The hash value of each particle is computed using the following expression:

$$\text{Hash}_{\mathbf{p}_i} = \frac{z_{\mathbf{p}_i}}{h_{\max}} \cdot m * n + \frac{y_{\mathbf{p}_i}}{h_{\max}} \cdot m + \frac{x_{\mathbf{p}_i}}{h_{\max}}. \tag{12}$$

Neighboring Particle Determination Principle: The smoothing length h is interpolated from the background grid based on the particle position, and the particle search radius is defined as $2h$. Consequently, the influence domain of a particle is a sphere of radius $2h$. Any particle located within this radius from the reference particle is considered a neighboring particle.

2.5.3 Particle Relaxation

The model surface mesh is used as input and serves as a constraint, with its position remaining fixed. During the particle relaxation process, the mesh participates in the

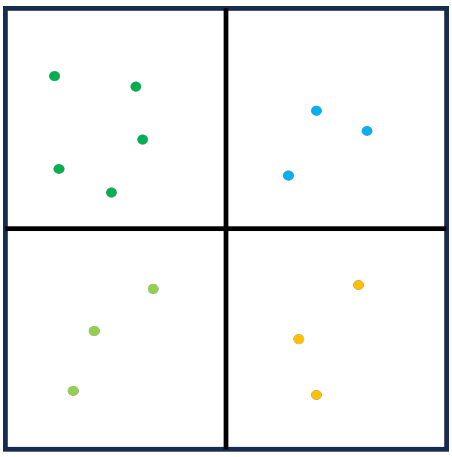


Fig. 2: Particles are mapped to grid cells; particles sharing the same color are assigned to the same cell.

computations, but its position does not need to be updated. Only the positions of particles within the in-domain are updated. For the convergence criterion of the iterative process, we adopt a practical approach suitable for engineering applications. The primary purpose of using SPH to relax particle positions is to facilitate grid generation. Therefore, when the number of neighboring particles for each particle stabilizes, the iterative process is considered to have converged. Numerical examples demonstrate that this criterion effectively meets the requirements of grid generation. The particle relaxation algorithm proceeds as follows:

2.6 GPU Parallelization

To accelerate the ASL-SPH particle relaxation process, a GPU-parallelized computational strategy is implemented using CUDA. The implementation consists of three main stages: spatial indexing, neighbor search, and SPH physical quantity evaluation.

First, a uniform background grid is employed to organize particles spatially and facilitate efficient neighbor searching. Each CUDA thread processes one particle, calculates its grid coordinates from its position, and maps the coordinates to a one-dimensional hash value. The corresponding particle index is stored alongside the hash value. The calculation formulas are given by Equations 11 and 12. Subsequently, the hash values are sorted in ascending order using the Thrust library, while the associated particle indices are reordered accordingly. A CUDA kernel then identifies the boundaries between consecutive groups of identical hash values and constructs the start and end indices for each occupied grid cell. This indexing structure enables efficient access to particles within a specified cell without traversing the entire particle set.

Second, grid-based neighbor searching is performed during SPH computation. Each CUDA thread processes a target particle and determines its grid location. The local information stored in the three-dimensional background grid is interpolated to obtain

Algorithm 2 In-domain Particle Relaxation

Input: Initial in-domain particle positions $\mathcal{P}_{in}$
Output: Relaxed particle distribution
repeat
    Construct the neighborhood structure for $\mathcal{P}_{in}$
    for each particle $\mathbf{r}_i$ in $\mathcal{P}_{in}$ **do**
        Compute the density ρ_i
    end for
    for each particle $\mathbf{r}_i$ in $\mathcal{P}_{in}$ **do**
        Compute the total acceleration

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i^{pre} + \mathbf{a}_i^{vis}$$

    end for
    Determine the time step Δt based on the stability criteria
    for each particle $\mathbf{r}_i$ in $\mathcal{P}_{in}$ **do**
        Update the particle position $\mathbf{r}_i$
        if $\mathbf{r}_i$ is outside the domain **then**
            Label particle $\mathbf{r}_i$ accordingly
        end if
    end for
until The mean number of neighboring particles across all particles reaches a stable state.

the particle's adaptive smoothing length. The algorithm then traverses the neighboring grid cells within a predefined search depth, specified by `MAX_SEARCH_DEPTH`, and retrieves candidate particles using the previously constructed cell indices. The spatial distances between the target particle and candidate particles are evaluated to identify valid neighbors. These neighbors are subsequently used to calculate the particle density and other SPH interaction quantities, including forces.

Finally, particle-level parallelism is exploited to accelerate the SPH calculations. Since the neighbor search and physical quantity evaluation for each target particle can be performed independently, these tasks are distributed across CUDA threads. Regarding memory organization, particle data are stored separately from the hash values, particle indices, and grid-cell boundary arrays. Only the hash values and their associated indices are reordered during sorting, avoiding the need to move the complete particle data. This index-based organization facilitates particle retrieval and supports the parallel evaluation of SPH quantities.

Considering that GPUs are well suited for large-scale parallel computing but may suffer from reduced efficiency in scenarios involving complex control branches and non-contiguous memory accesses, we uniformly employ one-dimensional arrays as the data storage structure to optimize memory access patterns, reduce data access overhead, and improve the execution efficiency of the proposed algorithm on GPU architectures.

2.7 Mesh Generation

After particle relaxation, the particle distribution becomes optimal; however, no topological connections exist between particles. Therefore, establishing such connections is necessary for constructing a tetrahedral mesh. Due to the favorable properties of the Delaunay algorithm—such as maximizing the minimum angle and satisfying the empty circumsphere criterion—combined with its computational efficiency, it was chosen for this purpose. In this work, the open-source TetGen library [33] is employed for point-set tetrahedralization. During the tetrahedralization process, TetGen does not introduce additional interior points.

3 Result and Discussion

In this section, the overall performance of the proposed method is evaluated through a series of test cases spanning from simple to complex geometries. The experiments focus on three key aspects: mesh generation efficiency and mesh quality. Mesh quality is assessed using two widely adopted metrics: the minimum internal angle and the skewness equiangle (SE). The minimum internal angle is defined as the smallest dihedral angle within a tetrahedral element, with a theoretical range of 0° to 60°. An angle of 60° indicates optimal quality, whereas smaller angles imply reduced quality. An angle of 0° corresponds to a degenerate (collapsed) element. The notations $\theta_{\max}$ and $\theta_{\min}$ represent the largest and smallest minimum angles across all elements, respectively, while θ_{avg} denotes their average. The SE metric provides a complementary measure of element shape quality, ranging from 0.0 to 1.0. A value of 0.0 corresponds to optimal quality, larger values indicate increased distortion, and a value of 1.0 represents a collapsed element. The quantities $\text{SE}_{\max}$ and $\text{SE}_{\min}$ denote the best- and worst-shaped elements, respectively, and SE_{avg} indicates the average SE value across the mesh. The experimental platform was equipped with an Intel Core i9-13900HX CPU, 64 GB of RAM, and an NVIDIA GeForce RTX 4060 Laptop GPU with 8 GB of VRAM.

3.1 Verification of Convergence Acceleration and GPU-Accelerated Performance

Two-dimensional cases are employed to validate the effectiveness of the initial adaptive particle distribution in accelerating convergence and to evaluate the performance improvement achieved by GPU-accelerated computation. The two-dimensional cases provide a clear visualization of the particle convergence process, facilitating the analysis of the convergence behavior of the proposed method.

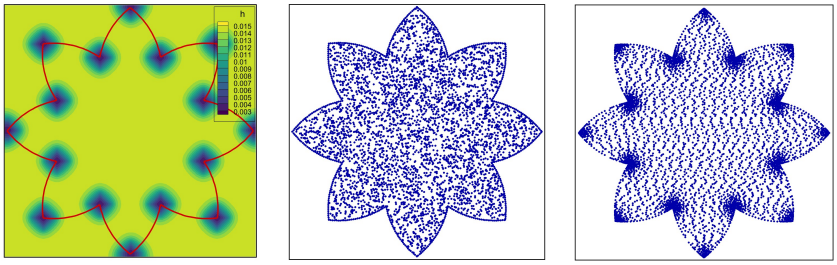
A flower-shaped computational domain with 16 corner points is considered, with mesh sizes set to $h_{max} = 0.015$ and $h_{min} = 0.003$. Table 1 summarizes the experimental data for the flower-shaped domain under the two initial particle distribution states. The results indicate that even in a complex geometry with sharp corners, both initial distributions are capable of generating high-quality meshes. From the perspective of algorithm convergence speed, the initial adaptive particle distribution exhibits significantly faster convergence, achieving several times the speed of the initial uniform

particle distribution. A detailed analysis of these results is provided in the following sections.

Table 1: Comparison of convergence steps, convergence time, and mesh quality for the flower domain under the two initial particle distribution states.

	N_p	N_{tri}	$\theta_{max}/\theta_{min}/\theta_{avg}$	$SE_{max}/SE_{min}/SE_{avg}$	N_{in}	T_{in} (s)
Uniform Distribution	4811	9108	59.97/30.65/54.02	0.49/0.00047/0.099	5000	2.510
Adaptive Distribution	4963	9430	59.98/31.59/54.83	0.47/0.00036/0.086	1000	0.683

The target size field of the flower-shaped domain is shown in Figure 3(a), while Figure 3(b) and Figure 3(c) illustrate the initial uniform particle distribution and the initial adaptive particle distribution, respectively, both generated based on the target size field. Figure 4 presents the particle relaxation process within the computational domain. At 500 iterations, it is evident that the results obtained from the initial adaptive distribution are superior to those from the initial uniform distribution. The mesh is shown in Figure 5. Figure 6 illustrates the convergence processes of the two initial particle distributions. From the convergence curves, it is clear that the adaptive sampling method proposed in this paper not only significantly enhances the convergence speed of the algorithm but also ensures a smoother convergence process.



(a) (b) (c)

Fig. 3: (a) The target size field of the flower-shaped domain. (b) and (c) show the initial uniform and adaptive particle distributions generated from the target size field, respectively.

Subsequently, a lake contour case is employed to evaluate the acceleration performance achieved by GPU computation. Lake is a lake contour consisting of 29 corner points, with the mesh size parameters set to $h_{\max} = 0.010$ and $h_{\min} = 0.001$. As shown in Table 2, both GPU and CPU implementations successfully generate high-quality meshes, achieving an average mesh quality of $\theta_{\text{avg}} = 53.78°$. The two implementations share the same algorithmic framework and differ only in the computational platform used for the particle relaxation process. The GPU implementation demonstrates significantly higher computational efficiency, achieving a particle relaxation speed nearly 10 times faster than that of the CPU implementation. The mesh generation process

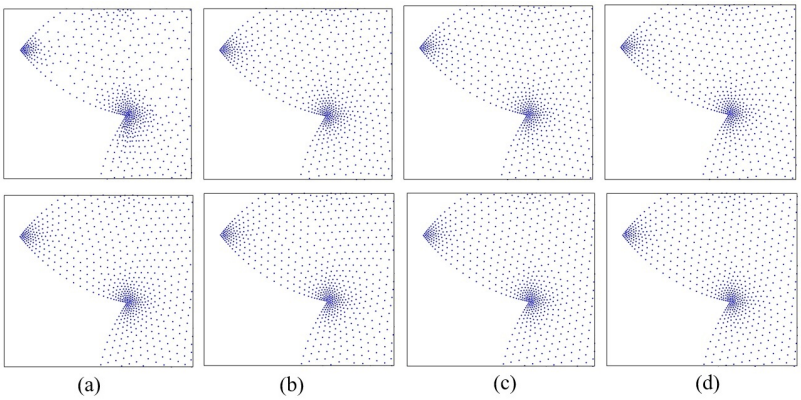


Fig. 4: Results of particle relaxation in the computational domain: (a) 500 steps, (b) 2000 steps, (c) 5000 steps, and (d) 10000 steps. The first column presents the results for the initial uniform particle distribution, while the second column displays the results for the initial adaptive particle distribution.

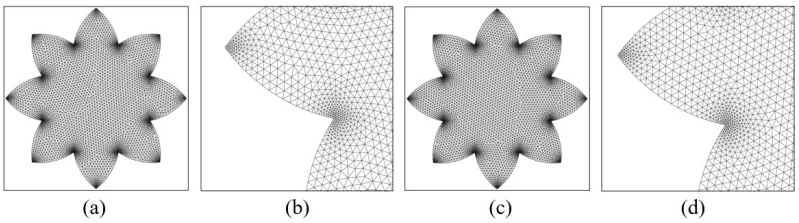


Fig. 5: The overall mesh. (a) and (b) show the results obtained from the initial uniform particle distribution, while (c) and (d) present the results derived from the initial adaptive particle distribution.

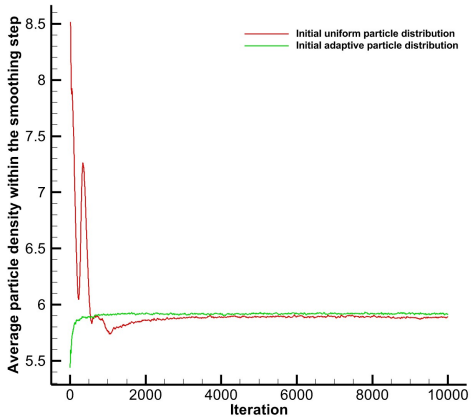


Fig. 6: Particle convergence history under two different initial distributions.

for the Lake case is illustrated in Figure 7, where Figure 7(c) shows that high-quality meshes can still be generated in regions with sharp corners and high curvature.

Table 2: Comparison of Experimental Data for Lake Under Two Algorithm Frameworks.

	N_p	N_{tri}	$\theta_{max}/\theta_{min}/\theta_{avg}$	$SE_{max}/SE_{min}/SE_{avg}$	N_{in}	T_{in} (s)
GPU	10741	20187	59.99/31.17/53.79	0.45/0.00017/0.10	600	0.635
CPU	10745	20195	59.99/29.55/53.78	0.51/0.00018/0.10	600	5.669

The results demonstrate that the proposed adaptive sampling method significantly accelerates the convergence process, while GPU implementation effectively improves computational efficiency. By combining the advantages of adaptive sampling and GPU acceleration, the overall performance of the proposed method is substantially enhanced.

3.2 Performance Evaluation and Comparison with TetGen

A total of five models were selected for case studies. The five models were employed to evaluate its overall performance and to conduct a comparative study against the open-source TetGen library. Table 3 summarizes the results for five test models using the proposed framework and TetGen with identical boundary inputs. The two workflows differ in their interior point generation strategies. In the proposed framework, interior points are generated and relaxed using the ASL-SPH method with GPU acceleration, and TetGen is used only to construct the tetrahedral connectivity through Delaunay tetrahedralization. In contrast, the TetGen baseline employs its own point generation and tetrahedral mesh construction procedures throughout the entire meshing process. Thus, the comparison evaluates the overall performance of the proposed particle-based mesh generation framework against TetGen's complete mesh generation workflow, rather than comparing two independent tetrahedralization algorithms.

As shown in Table 3, the proposed framework achieves higher mesh generation rates for all five models, ranging from approximately 1.26×10^5 to 1.49×10^5 cells/s, compared with 1.04×10^5 to 1.15×10^5 cells/s for TetGen. The total computation time is reduced by approximately 22.4%–29.0%. Regarding mesh quality, the proposed framework produces higher average tetrahedral angles in all five cases, with θ_{avg} ranging from 43.35° to 46.33°, compared with 40.94° to 41.58° for TetGen. The average SE values are also lower for the proposed framework across all test cases. However, the minimum tetrahedral angle does not consistently improve, indicating that the quality gains are not uniform across all metrics. These results suggest that the proposed ASL-SPH-based point generation and relaxation strategy can improve the overall efficiency and selected quality measures of the resulting tetrahedral meshes compared with TetGen's complete meshing workflow for the five models examined.

Figures 8 and 9 compare the mesh quality obtained using the proposed method and TetGen for the M6 wing and Gear models, respectively. Subfigures (a) and (b)

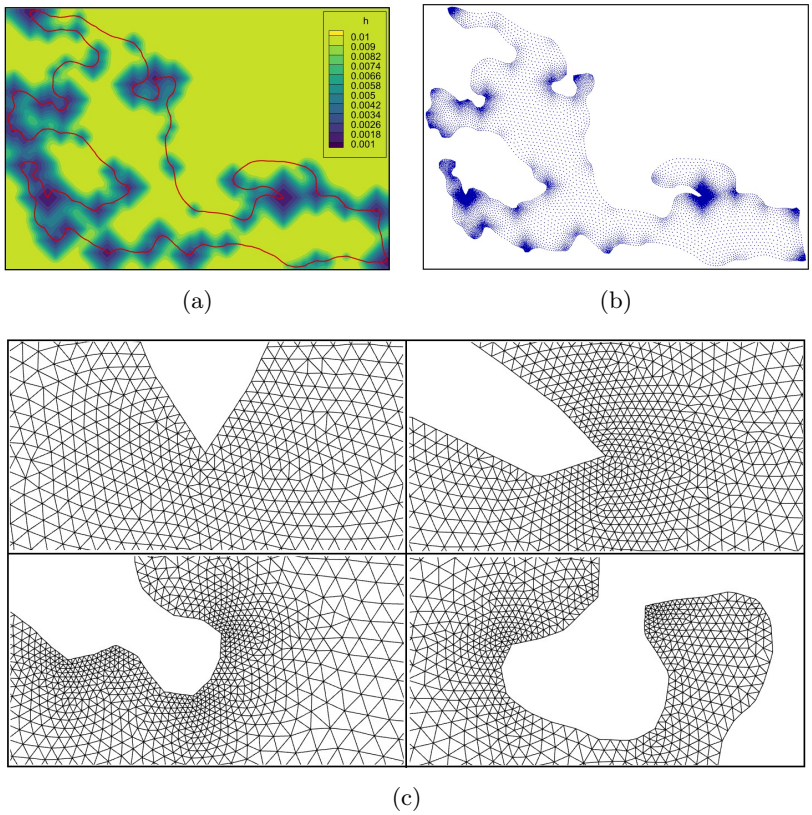


Fig. 7: Mesh generation process of Lake: (a) generation of the target size field; (b) particle relaxation results after 600 iterations; (c) magnified view of a local region of the mesh.

show cross-sectional contours of the angular quality of the meshes generated by the proposed method and TetGen, respectively. Element quality is represented by a color scale ranging from blue (low quality) to red (high quality), with cyan, green, and yellow indicating intermediate quality levels. The contour plots suggest that the proposed method achieves a modest improvement in angular quality compared with TetGen. Subfigures (c) and (d) present the corresponding histograms of the angular-quality and SE-quality distributions, respectively. These distributions indicate that both methods generate predominantly high-quality elements, while the proposed method yields a more favorable quality distribution than TetGen for both test models.

Figures 10–12 compare the meshes generated by the proposed method and TetGen for the rocket, submarine, and car models, respectively. The cross-sectional element-quality contours in Figures 10(a,b), 11(a–d), and 12(a–d) reveal an overall improvement in mesh quality achieved by the proposed method relative to TetGen.

Table 3: Summary of experimental results, including mesh generation efficiency and mesh quality for all test cases.

Model	Method	$N_P/N_{\mathbf{tri}}$ (Input)	$N_P/N_{\mathbf{tet}}$ (Output)	$\theta_{\max}/\theta_{\min}/\theta_{\mathbf{avg}}$	$\mathbf{SE}_{\max}/\mathbf{SE}_{\min}/\mathbf{SE}_{\mathbf{avg}}$	Rate (cells/s)	$T_{\mathbf{Total}}$ (s)
gear	Proposed Method	41030/82060	226879/1252857	59.970/6.693/43.349	0.905/0.00048/0.304	140960	8.888
	TetGen		234440/1297526	59.164/8.029/40.938	0.886/0.013/0.340	113291	11.453
M6	Proposed Method	27299/54594	140303/762592	59.751/4.708/44.663	0.933/0.00414/0.280	129847	5.873
	TetGen		138524/759167	59.187/6.724/41.199	0.904/0.013546/0.336	115252	6.587
rocket	Proposed Method	49839/99674	327548/1822907	59.810/11.442/45.597	0.837/0.00315/0.266	148541	12.272
	TetGen		320229/1799202	59.028/10.287/41.372	0.854/0.01618/0.333	103676	17.354
submarine	Proposed Method	37385/74766	451258/2632765	59.866/2.644/43.801	0.962/0.00238/0.297	126611	20.794
	TetGen		448982/2619953	59.613/2.710/41.473	0.954/0.00643/0.332	108974	24.042
car	Proposed Method	71415/142826	853405/4907927	59.925/10.151/46.331	0.856/0.00124/0.251	146719	33.451
	TetGen		838429/4892741	59.178/9.626/41.581	0.863/0.01378/0.330	103904	47.089

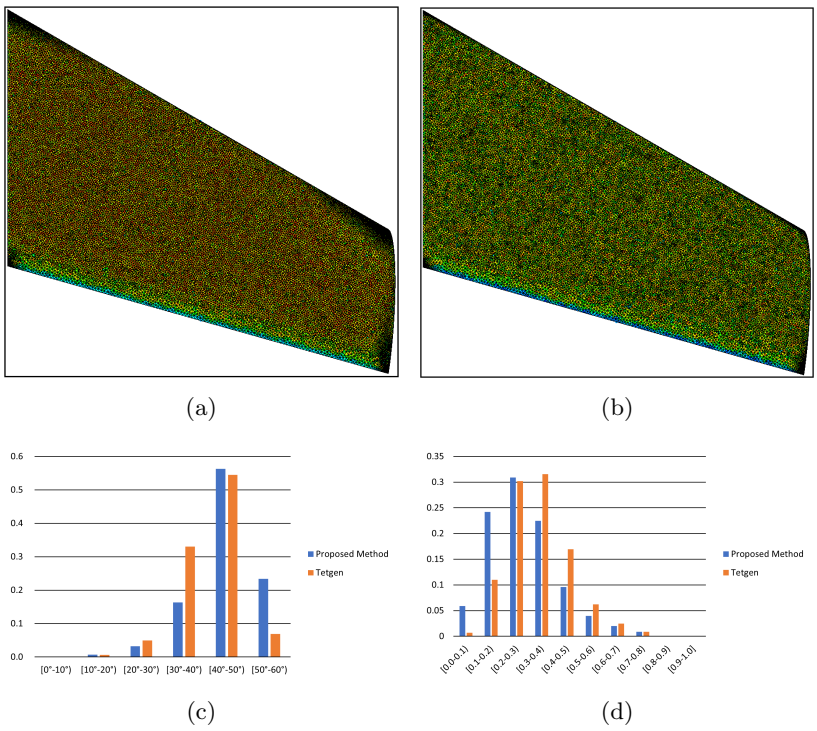


Fig. 8: Mesh generation for the M6 model using two methods. (a) angular quality contour of the mesh from the proposed method; (b) angular quality contour of the mesh from Tetgen; (c) angular quality histogram; (d) SE quality histogram.

This observation is further corroborated by the corresponding quality-distribution histograms in Figures 10(c,d), 11(e,f), and 12(e,f), which provide a statistical comparison of the mesh quality obtained using the two methods. In addition, the enlarged views in Figures 10(g,h) and 11(g,h) illustrate smoother transitions between neighboring elements in the meshes generated by the proposed method, highlighting its ability to maintain a more gradual variation in mesh quality across local regions.

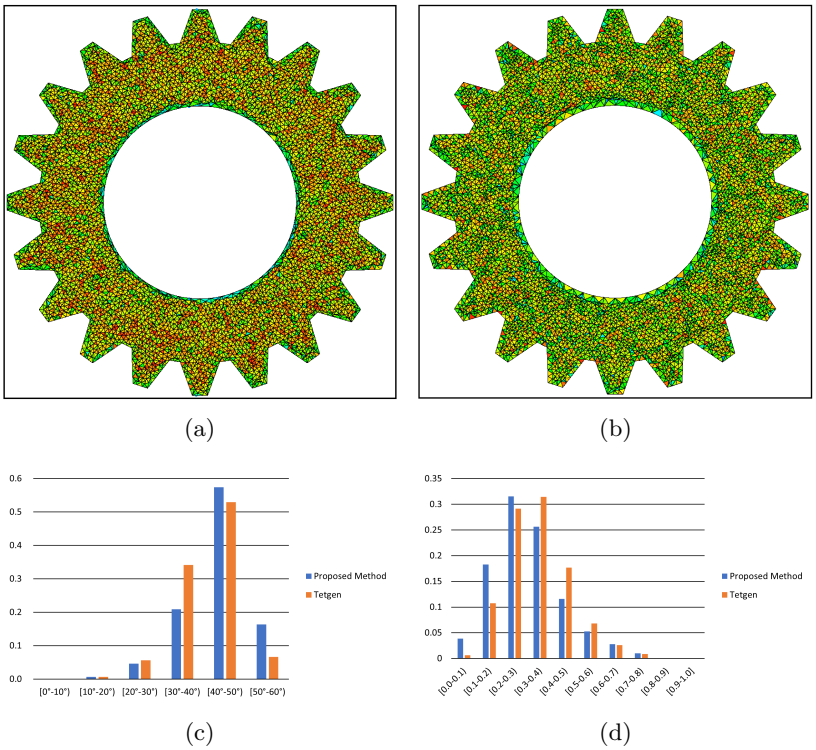


Fig. 9: Gear mesh generation comparison. (a) angular quality contour from the proposed method; (b) angular quality contour from Tetgen; (c) histogram of angular quality; (d) histogram of SE quality.

4 Conclusion

This paper presents a GPU-parallelized tetrahedral mesh generation framework based on Adaptive Smoothing Length Smoothed Particle Hydrodynamics. The framework combines GPU-accelerated particle relaxation with an adaptive initial particle distribution strategy based on local integration over a three-dimensional background grid to improve computational efficiency and facilitate relaxation convergence. TetGen is subsequently used to construct the tetrahedral connectivity through Delaunay tetrahedralization. Experiments on five geometric models show that, compared with TetGen's complete mesh generation workflow using identical boundary inputs, the proposed framework reduces total generation time by approximately 22.4%–29.0% and achieves higher generation rates in all test cases. It also yields higher average tetrahedral angles and lower average SE values across all five models. These results demonstrate the potential of the proposed framework to improve overall mesh generation efficiency and selected mesh quality measures under the tested conditions.

List of abbreviations

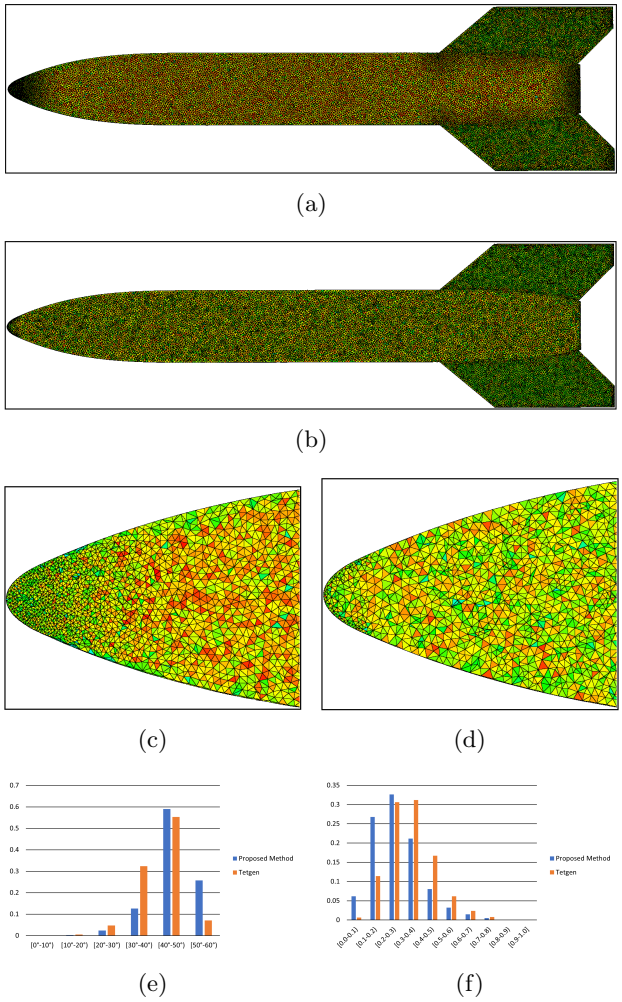


Fig. 10: Rocket mesh generation. (a), (b) angular quality contour slices from the proposed method and TetGen; (c), (d) magnified head views from (a) and (b); (e) angular quality histogram; (f) SE quality histogram.

ASL−SPH Adaptive Smoothing Length Smoothed Particle Hydrodynamics

Authors' contributions

Conceptualization was carried out by Hl B. Methodology was developed by Yf H, while formal analysis was performed by Hb Z. The original draft was written by Yf H, with review and editing contributions from Yf H. Supervision was provided by Cg X. All authors have read and approved the final manuscript.

Declarations

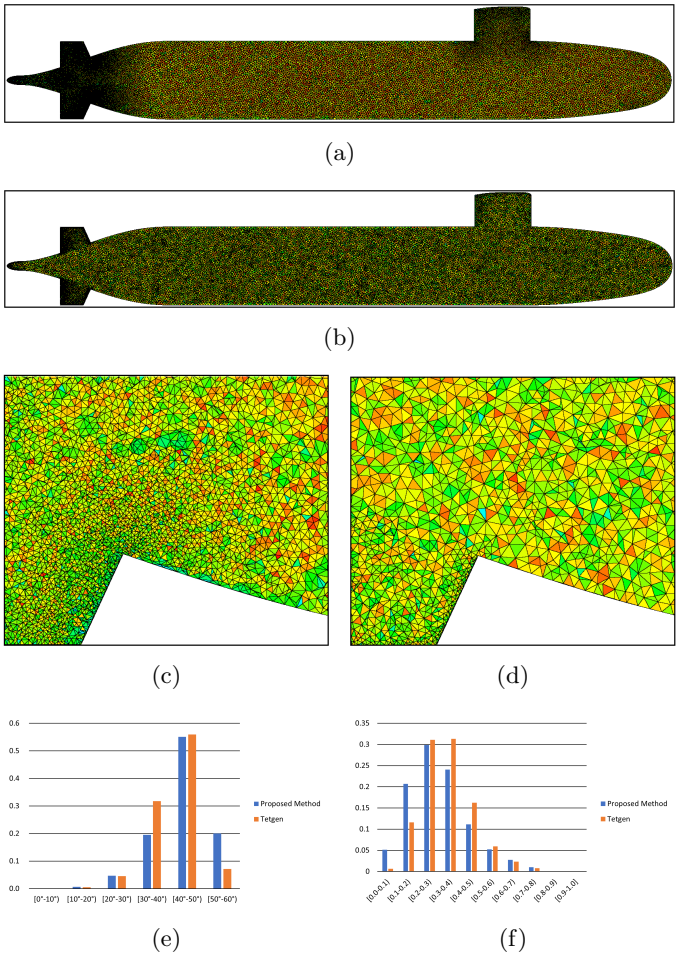


Fig. 11: Submarine mesh generation using two methods. (a),(b) slices of angular quality contours from the proposed method and Tetgen, (c),(d) zoomed-in views of (a) and (b), and (e),(f) angular quality and SE distribution histograms.

Competing interests

The authors have no conflicts of interest to declare.

References

[1] Chawner, J.R., Taylor, N.J.: Progress in geometry modeling and mesh generation toward the CFD vision 2030. In: AIAA Aviation 2019 Forum, p. 2945. AIAA, ??? (2019)

[2] Lu, P., Wang, N., Chang, X., *et al.*: An ANN-based advancing double-front

method for automatic isotropic triangle generation. Scientific Reports **12**(1), 13109 (2022)

[3] Slotnick, J.P., Khodadoust, A., Alonso, J., et al.: CFD vision 2030 study: a path to revolutionary computational aerosciences (2014)

[4] Bommes, D., Lévy, B., Pietroni, N., *et al.*: Quad-mesh generation and processing: A survey. Computer Graphics Forum **32**(6), 51–76 (2013)

[5] Pietroni, N., Campen, M., Sheffer, A., *et al.*: Hex-mesh generation and processing: a survey. ACM Transactions on Graphics **42**(2), 1–44 (2023)

[6] Danilov, A.A.: Unstructured tetrahedral mesh generation technology. Computational Mathematics and Mathematical Physics **50**(1), 139–156 (2010)

[7] Si, H.: Adaptive tetrahedral mesh generation by constrained delaunay refinement. International Journal for Numerical Methods in Engineering **75**(7), 856–880 (2008)

[8] Shewchuk, J.R., Si, H.: Higher-quality tetrahedral mesh generation for domains with small angles by constrained delaunay refinement. In: Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry, pp. 290–299. ACM, ??? (2014)

[9] Möller, P., Hansbo, P.: On advancing front mesh generation in three dimensions. International Journal for Numerical Methods in Engineering **38**(21), 3551–3569 (1995)

[10] Song, S., Wan, M., Wang, S., *et al.*: Robust and quality boundary constrained tetrahedral mesh generation. Communications in Computational Physics **14**(5), 1304–1321 (2013)

[11] Sans, A.C., Navarra, E.O.I.: Robust volume mesh generation for non-watertight geometries. Ph.d. thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (2014)

[12] Au, K.M., Yu, K.M.: Balanced octree for tetrahedral mesh generation. In: Materials Science Forum, vol. 471, pp. 608–612. Trans Tech Publications Ltd, ??? (2004)

[13] Cheng, S.W., Dey, T.K., Shewchuk, J., *et al.*: Delaunay Mesh Generation. CRC Press, Boca Raton (2013)

[14] Shewchuk, J.R.: Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. Computational Geometry **22**(1-3), 21–74 (2002)

[15] Shewchuk, J.R.: Constrained delaunay tetrahedralizations and provably good boundary recovery. International Mathematics Research **193**, 204–204 (2002)

[16] Du, Q., Wang, D.: Constrained boundary recovery for three dimensional delaunay triangulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering **61**(9), 1471–1500 (2004)

[17] Guan, Z., Shan, J., Zheng, Y., *et al.*: An extended advancing front technique for closed surfaces mesh generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering **74**(4), 642–667 (2008)

[18] Shephard, M.S., Georges, M.K.: Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering **32**(4), 709–749 (1991)

[19] Wang, Z., Srinivasa, A.R., Reddy, J.N., *et al.*: Pimesh: An automatic point cloud and unstructured mesh generation algorithm for meshless methods and finite element analysis–with applications in surgical simulations. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering **38**(8), 3615 (2022)

[20] Yang, H., Gunzburger, M., Ju, L.: Fast spherical centroidal voronoi mesh generation: A lloyd-preconditioned lbfgs method in parallel. Journal of Computational Physics **367**, 235–252 (2018)

[21] Zeng, Q., Ohsaki, M., Zhang, J., *et al.*: Structured triangular mesh generation method for free-form gridshells based on conformal mapping and virtual interaction forces. Engineering Structures **295**, 116879 (2023)

[22] Gingold, R.A., Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **181**(3), 375–389 (1977)

[23] Liu, M.B., Liu, G.R.: Smoothed particle hydrodynamics (sph): an overview and recent developments. Archives of Computational Methods in Engineering **17**(1), 25–76 (2010)

[24] Ji, Z., Fu, L., Hu, X., *et al.*: A feature-aware sph for isotropic unstructured mesh generation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **375**, 113634 (2021)

[25] Fu, L., Hu, X.Y., Adams, N.A.: Adaptive anisotropic unstructured mesh generation method based on fluid relaxation analogy. Communications in Computational Physics (2020)

[26] Fu, L., Han, L., Hu, X.Y., *et al.*: An isotropic unstructured mesh generation method based on a fluid relaxation analogy. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **350**, 396–431 (2019)

[27] Ji, Z., Fu, L., Hu, X., *et al.*: A consistent parallel isotropic unstructured mesh generation method based on multi-phase sph. Computer Methods in Applied

Mechanics and Engineering **363**, 112881 (2020)

[28] Nelson, R.P., Papaloizou, J.C.B.: Variable smoothing lengths and energy conservation in smoothed particle hydrodynamics. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **270**(1), 1–20 (1994)

[29] Yang, X., Kong, S.-C.: Adaptive resolution for multiphase smoothed particle hydrodynamics. Computer Physics Communications **239**, 112–125 (2019)

[30] Müller, M., Charypar, D., Gross, M.: Particle-based fluid simulation for interactive applications. In: Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp. 154–159 (2003)

[31] Dehnen, W., Aly, H.: Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **425**(2), 1068–1082 (2012)

[32] Wendland, H.: Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. Advances in Computational Mathematics **4**(1), 389–396 (1995)

[33] Hang, S.: Tetgen, a delaunay-based quality tetrahedral mesh generator. ACM Transactions on Mathematical Software **41**(2), 11 (2015)

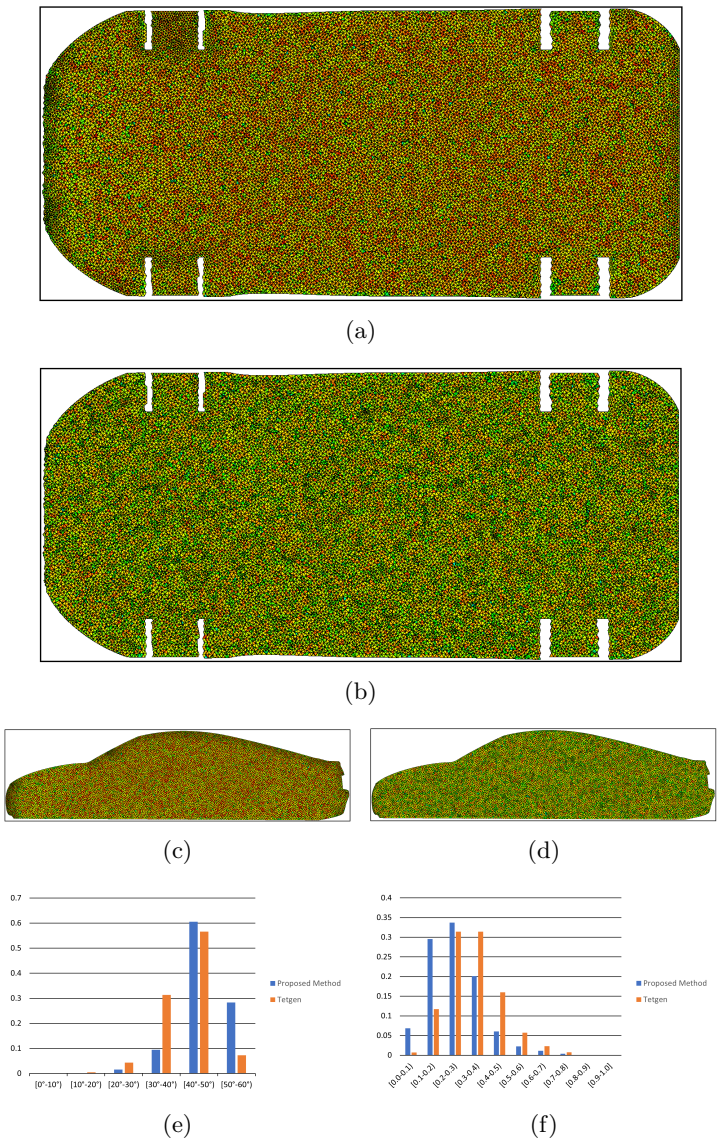


Fig. 12: Car mesh generation by two methods. (a), (c) angular quality contour slices (proposed method); (b), (d) angular quality contour slices (TetGen); (e) angular quality histogram; (f) SE quality histogram.

基于收缩包裹与可见性引导的三角网格法向快速矫正

杜云云[1)]，杨鑫[2)]，翟月雯[3)]，付营建[1)]，赵国忠[1)*]，关振群[1)]

[1)] (大连理工大学力学与航空航天学院工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室　大连　116023)
[2)] (大连理工大学能源与动力工程学院　大连　116024)
[3)] (中国机械总院集团北京机电研究所有限公司　北京　100080)
(zhaogz@dlut.edu.cn)

摘　要：针对含非流形、孔洞及自交等缺陷的复杂三角网格法向矫正鲁棒性不足、计算开销较大的问题，提出一种结合收缩包裹与可见性引导的快速法向矫正方法。首先构建均匀背景栅格，并通过洪水填充在模型外侧生成包络体素层，为法向判定提供外部方向参考；随后复用该栅格对包络体素层进行可见性扫描与计分，以适应网格中的开放边界；最后基于可见性加权投票结果确定各流形聚类的法向翻转状态，实现全模型法向统一。多个复杂模型的测试结果表明，所提方法的矫正效果优于传统射线法，计算速度提升 12 倍以上；在所测试模型中，还观察到其相对效率优势随网格规模增大而更加显著。

关键词：法向矫正；收缩包裹；可见性评分；均匀栅格；缺陷三角网格

Fast Normal Correction for Triangle Meshes Based on Shrink-Wrapping and Visibility Guidance

Du Yunyun[1)], Yang Xin[2)], Zhai Yuewen[3)], Fu Yingjian[1)], Zhao Guozhong[1)*], and Guan Zhenqun[1)]

[1)] (*State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology, Dalian* 116023)
[2)] (*School of Energy and Power Engineering, Dalian University of Technology, Dalian* 116024)
[3)] (*Beijing Research Institute of Mechanical and Electrical Technology Co., Ltd., China Academy of Machinery, Beijing* 100080)

Abstract: To address the limited robustness and high computational cost of normal correction for complex triangle meshes with non-manifold structures, holes, and self-intersections, a fast method integrating shrink wrapping and visibility guidance is proposed. First, a uniform background grid is constructed, and an exterior voxel envelope is generated by flood filling to provide a directional reference; the same grid is then reused for visibility scanning and scoring to accommodate open boundaries; finally, visibility-weighted voting determines the normal-flipping state of each manifold cluster, achieving globally consistent normal orientation. Tests on multiple complex models demonstrate that the proposed method achieves better normal correction results than conventional ray-based methods, with a speedup of more than 12 times. Among the tested models, the relative efficiency advantage was also observed to become more pronounced as the mesh size increased.

Key words: normal correction; shrink-wrapping; visibility scoring; uniform grid; defective triangle meshes

三角形表面网格是有限元分析（finite element method, FEM）及计算机图形学领域中最通用的边界离散形式。对于隐含着实体对象的表面网格，其外层三角形法向应按照右手准则指向模型外部。三角形表面网格的法向一致性，对诸多下游应用而言是一个看似基础却影响深远的前提。在 3D 打印领域中，错误的法向可能导致支撑结构生成偏差[1]。在实时渲染中，法向错乱会引发经典的"棋盘格效应"，使背面剔除失效[2]。在网格简化层面，Garland 等[3]提出的属性扩展二次误差度量可将顶点法向纳入误差计算，法向不一致会使法向属性场产生异常跳变，进而影响边收缩代价及其排序，降低简化结果的可靠性。

在面向脏几何的四面体网格生成领域，Hu 等[4-5]提出的 Wild 类方法依赖 Jacobson 等[6]的广义绕数进行内外空间分割，以实现对输入表面孔洞的容忍能力。但绕数场的计算以面片的法向为输入，错误的法向将扰动局部绕数场，导致内外分区出错。类似地，Diazzi 等[7]在生成四面体网格时，采用图分割实现内外分区，该方法同样依赖法向的正确性。事实上，在脏几何上生成体网格对法向正确性的依赖是根本性的，法向错误将直接导致外轮廓追踪失败，使修复过程中几何畸变被系统性放大[8]。

法向不一致是三维网格模型中常见的缺陷类型之一[9-10]，例如 Thingi10K 数据集[11]。对 10k 个用户建模数据的统计显示，约 10%的模型存在法向不一致问题。法向错乱的来源多样且相互叠加：扫描重建受噪声、遮挡及多视角拼接等因素影响，局部法向易出现方向错误[12-13]；交互建模中的镜像、复制等操作可能引入局部不一致；复杂工业网格中常存在重叠面、非流形边和局部自交等拓扑缺陷[14]，这些问题会破坏网格的邻接关系，增加法向一致性判定的难度[15]。

法向定向在点云处理领域得到了广泛研究。Metzer 等[13]提出偶极子传播方法，利用全局电场传递点云片区的方向信息；Xu 等[16]提出基于卷绕数场正则化的法向定向方法，求解全局一致法向；Lin 等[17]提出卷绕数法向一致性（winding number normal consistency，WNNC）性质，并据此构建点法向迭代更新方法；Hou 等[18]提出迭代泊松曲面重建（iterative Poisson surface reconstruction，iPSR）方法，通过交替进行曲面重建与法向更新处理无向点云。这些方法面向缺少显式连接关系的点云，依赖空间邻域或隐式场，部分方法还会同时重建曲面。将其迁移至三角网格时，在相互邻近的不同表面和非流形结构处，仅凭空间邻域或隐式场可能难以识别面片所属的表面分支，因而不能直接替代基于面片及拓扑关系的法向矫正方法。

与点云不同，三角网格具有显式的边—面拓扑，最直接的法向矫正路线是沿边邻接关系逐面传播定向。但传统的二面邻接传播在非流形边处会产生歧义：非流形边的邻接面数量超过 2 个，面片之间的传播关系不再唯一。林建立等[19]通过拓扑关系和相邻面法向夹角确定传播方向，缓解了非流形边处的法向矫正歧义，但该方法依赖网格正则化和拓扑重构。

射线法是法向一致化工作中的另一重要路线。其核心思想可概括为“从外部观察时，可见面片的法向应大致朝向观察方向”。Borodin 等[2]基于这一思想，沿面片法向发射射线，以射线能否无遮挡到达无穷远作为该面片的可见性判据，同时结合相邻面片间的边界相干性约束和贪心聚合策略在可见性证据与局部拓扑一致性之间权衡决策。不过，该方法的贪心策略缺乏全局最优性保证，且当射线因共面或自相交几何在短距离内被截断时，可见性判断的可靠性会下降。Takayama 等[20]做了两项改进：同时向正反两侧发射对称射线，消除单侧采样偏差；对被遮挡的内部面片，引入射线交点距离启发式判据与交点数量奇偶性判据，弥补了单纯无遮挡判定在内部面片上的盲区。Zheng 等[21]采用多次弹射光线追踪，使深腔与遮挡区域的面片借助间接可见性仍能获得有效的朝向判定信号，进一步改善了射线法在被遮挡区域的可靠性。孟祥桥等[22]在包围球上均匀采样多视角进行光栅化渲染，统计每个面片法向朝向观察者的像素占比，据此决定是否执行法向翻转。该方法仅需光栅化和像素计数，无需射线求交，效率相比传统射线法更高。

Zhou 等[23]放弃了单面片射线采样的思路，转而计算面片对之间的相互可见性——若两个面片之间的连线未被遮挡，则它们彼此可见。将所有面片的相互可见关系构建为全局图，用最小割方法一次性判定每个面片朝向模型内部还是外部。这种基于全局可见性图的策略对孔洞和自交场景更为鲁棒，且对被遮挡区域仍具备判定能力，代价是计算开销显著增大。

此外，Murali 等[24]提出的基于实体的方法将法向问题转化为内外空间分类问题：将空间划分为多面体单元，通过单元间的不透明度扩散判定每个单

元的实体归属，从实体与非实体单元的界面自动导出一致法向。该方法对输入面片的相交、重叠和非流形边具有较强的容忍能力，但隐含要求输入面片完整覆盖实体边界，当面片存在孔洞时，外部性可能渗入内部导致分类失效。

收缩包裹（shrink-wrap）方法[25-26]是另一条值得关注的技术路线。该方法在输入模型外部生成初始包络面，再以迭代方式向内收缩至贴合模型表面。外包络面天然定义了明确的外部方向，收缩过程中的法向一致性由包络面的拓扑结构自然保证。收缩包裹对输入网格的裂缝（小尺度孔洞）、相交及重叠具有较强的包容能力，但当输入表面存在开放边界（大尺度孔洞）时，外包络面可能通过孔洞进入模型内部，导致内外空间定义的失效。此外，现有收缩包裹方法均以生成显式表面网格为研究目标，且迭代收缩计算代价较高，因此尚未被用于解决法向矫正的问题。

针对现有法向矫正方法在非流形边、孔洞及遮挡区域等复杂场景下难以兼顾鲁棒性与计算效率的问题，提出一种融合收缩包裹思想与可见性评分的法向矫正方法。不同于传统收缩包裹方法，该方法无需生成显式表面网格，而是在均匀背景栅格上通过洪水填充快速构建外部包络体素层，为面片法向判定提供局部方向参考。该策略可容忍非流形边与自交等缺陷，并自动封堵小尺度裂缝。在此基础上，引入基于栅格步进扫描的多向可见性评分，无需执行传统射线扫描中的精确求交，即可将适用范围拓展至收缩包裹失效的开放边界模型，同时保证较高的计算效率。

1　收缩包裹构建包络体素层

1.1　面片栅格化

背景空间可采用均匀栅格或自适应八叉树离散。八叉树能通过局部加密减少体素数量，但不同层级的叶单元之间为非一致邻接。本文的包络构造依赖洪水填充遍历相邻体素：即使采用相邻叶单元层级差不超过 1 的平衡八叉树，仅靠面邻接也无法遍历全部相邻体素，须搜索面、边、顶点相邻的 26 邻域才能保证包络体素层封闭；若为非平衡八叉树，一个粗叶单元可邻接大量细叶单元，固定 26 邻域仍覆盖不全，还需递归查询。相比之下，均匀栅格体素尺寸一致、面邻接规整，洪水填充及包络提取仅需 6 邻域搜索，多方向可见性扫描也可由规则索引步进直接实现。因此，八叉树的自适应优势难以抵消其邻域维护与步进遍历开销，本文最终选用均匀栅格作为背景网格。

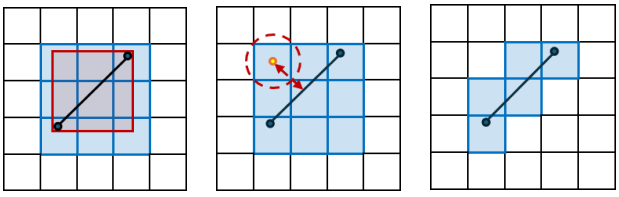
均匀栅格的构建较为直观，首先计算输入模型的轴对齐包围盒（axis-aligned bounding box, AABB），该包围盒需略大于输入模型，为后续洪水填充预留外部空间通道。包围盒沿 3 个坐标轴的体素数量由下式确定

$$\begin{cases} N_x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{d} \\ N_y = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{d} \\ N_z = \dfrac{z_{\max} - z_{\min}}{d} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_{\min}$ 和 $x_{\max}$ 等为包围盒在各轴上的最小与最大坐标，d 为体素边长，其定义如下

$$d = \max(\alpha \cdot \bar{l}_e, 1\mathrm{E}-3 \cdot l_{\mathrm{diag}}) \tag{2}$$

其中 $\bar{l}_e$ 为三角网格单元的平均边长值，l_{diag} 为模型包围盒对角线长度。该式表明，体素边长通常取网格平均边长的 15%（$\alpha = 15\%$），这是一个兼顾边界拟合精度、裂缝封堵能力和计算效率的经验值。为防止体素数量在极密网格模型下过度膨胀，取外包围盒对角线长度的 $1\mathrm{E}-3$ 作为边长下界。

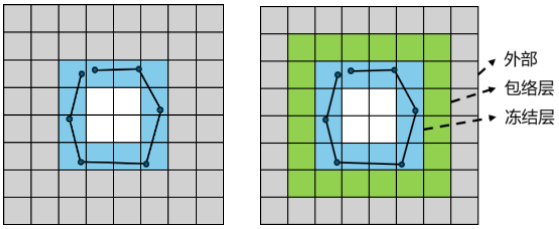


a. 获取索引范围　b. 外接球距离精筛　c. 栅格化结果

图 1　输入网格栅格化（2D）

栅格构建完毕后，需确定各三角面片所覆盖的体素。该过程分为两步，第 1 步为索引范围获取（图 1a）：计算三角形的 AABB，利用栅格的坐标映射将包围盒的角点直接转换为体素的 3D 索引范围，得到三角形可能覆盖的全部候选体素（图 1a 中蓝色区域）；第 2 步为外接球距离精筛（图 1b）：对候选体素，计算体素中心到三角面的垂直距离，若该距离小于体素外接球半径，则判定该体素被面片覆盖。通过该流程，无需进行精确相交测试，所有被输入表面覆盖的体素被快速标记，形成冻结体素层，如图 1c 中蓝色区域所示。

1.2 洪水填充提取包络体素层



a. 定义外部栅格空间　b. 提取包络体素层

图 2　提取包络体素层（2D）

输入表面存在的小尺度裂缝会被冻结体素自动封堵，形成封闭的体素层（图 2a 蓝色区域）。此时，采用洪水填充可以将栅格中未被面片覆盖的区域划分为外部体素和内部体素两类：以栅格外边界的非冻结体素为种子，沿 6 邻域在非冻结体素间执行广度优先搜索（breadth-first search, BFS），将可达体素标记为外部体素（图 2a 灰色区域）；将受冻结体素阻隔的不可达体素标记为内部体素（图 2a 白色区域）。接着，将所有冻结体素的 26 邻域（以自身为中心的 3×3×3 邻域）内包含的外部体素标记为包络体素（图 2b 中绿色区域），该包络体素层将为后续法向矫正提供外部参考。

2 局部参考法向构建

2.1 基于近距优先的参考法向构建

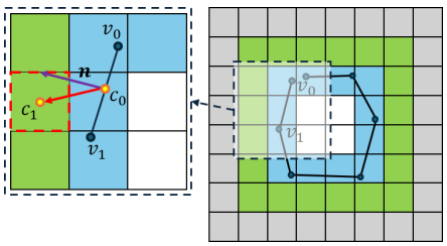


图 3　基于最近包络体素的参考法向构建（2D）

如图 3 所示，以 2D 网格中的边 v_0v_1 为例，在其中心点 c_0 所在体素的 26 邻域内搜索距离最近的包络体素（红色虚线框内），连接 c_0 与该包络体素中心 c_1，得到参考向量 $\boldsymbol{c_0c_1}$。由于包络体素源于外部体素，则该向量通常由局部冻结区域指向外部包络区域，逼近模型在该局部位置的正确法向。将网格单元自身的法向 $\boldsymbol{n}$（三角形按顶点顺序由右手准则确定）与 $\boldsymbol{c_0c_1}$ 进行夹角比较，即可判定当前法向是否需要翻转。注意，若以面片中心点 c_0 为采样点在 26 邻域内未找到包络体素，则依次在 c_0 与面片 3 个顶点连线的中点处搜索；若仍无命中，判定该面片位于模型内部，不再参与法向矫正决策。

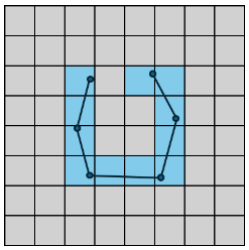


图 4　开放边界导致收缩包裹内外定义失效（2D）

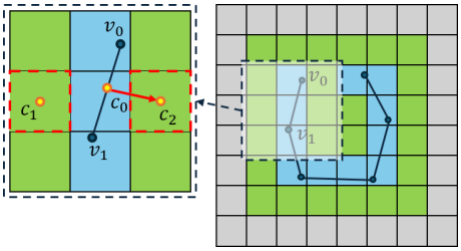
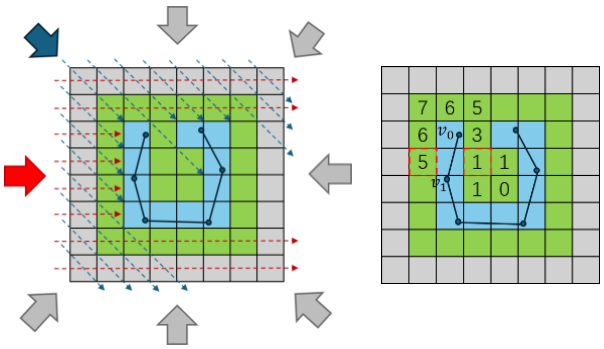


图 5　参考法向错误（2D）

该策略依赖冻结体素层形成封闭壳结构；当输入模型存在大尺度开放边界时，该前提不再成立。如图 4 所示，当表面孔洞大于体素尺度时，冻结体素层无法闭合，洪水填充将涌入模型内部，导致内外空间定义失效。更严重的是，包络体素层可能同时分布在表面的两侧，如图 5 所示。此时若仅按距离最近原则选取包络体素，可能错误地选中位于内侧的包络体素，致使参考法向指向模型内部，诱导错误的翻转判定。

2.2 基于可见性评分的参考法向构建

为将该方法适用范围拓展至极端开放边界情形，本文引入一种基于方向采样的可见性评分机制：从栅格外多个方向向内发射射线，统计每个包络体素被无遮挡"看见"的次数，以此量化其位于模型外侧的置信度。每一方向上的射线若遇冻结体素则终止，途经的包络体素各获 1 次可见性计数。与传统射线方法不同，本评分完全复用前述已构建的均匀栅格，射线步进途中无需进行射线-面片的精确求交运算，计算十分轻量。



a. 多向可见性扫描　　b. 可见性评分结果

图 6　可见性扫描策略（2D）

本文方法设计了两级可见性扫描策略。第 1 级沿栅格的 3 条主轴进行扫描，共 6 个方向。图 6a 红色箭头展示的是一个轴向扫描方向，由于该扫描方向与栅格的存储方向完全一致，射线沿连续内存推进，计算最为高效；第 2 级沿 8 个空间对角方向进行扫描，如图 6a 蓝色箭头所示。设体素三维索引为 (i,j,k)，其一维存储编号为 $I=(kN_y+j)N_x+i$。对角扫描时，更新后的体素索引为

$$(i',j',k')=(i,j,k)+(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z) \tag{3}$$

其中 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\in\{-1,+1\}$ 为各轴的单位索引步进分量，其对应的一维索引增量为

$$\triangle I=(\sigma_z N_y+\sigma_y)N_x+\sigma_x \tag{4}$$

式（4）中，N_x 和 N_y 分别为 x 和 y 轴方向的体素数量；$(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ 的 8 种正负组合对应 8 个空间对角扫描方向。该索引增量仅表示离散体素的索引步进，与第 1.1 节中表示体素边长 d 的含义不同。通过预计算各方向的 $\triangle I$，即可快速跳转至下一体素。

经过多向射线扫描，每个包络体素均被赋予一个可见性评分。该评分与体素到面片的距离共同参与局部参考法向的构建。具体而言，对面片中心所在体素的 26 邻域内各包络体素，定义反距离加权融合可见性评分如下

$$\hat{s}_i=\frac{s_i}{d_i} \tag{5}$$

其中 s_i 为该体素的可见性评分，d_i 为面片中心到该体素中心的欧几里得距离。该融合评分在空间邻近的前提下偏好可见性更高的体素。如图 6b 红色虚线框中所示，两个包络体素与面片中心距离相近，但左侧体素可见性评分远高于右侧，因而被优先选取。可见性评分的引入弥补了 2.1 节描述的近距策略在面对开放边界模型时的不足，内侧包络体素因多向遮挡而可见性评分极低，在竞争中自然落选，降低了参考法向指向模型内部的概率。

3 可见性加权投票

2.2 节中为各包络体素赋予了可见性评分，结合反距离加权择优策略，每个三角面片已选定其最优邻近包络体素并构建了局部参考法向。通过计算面片法向与局部参考法向的夹角，即可判定该面片的法向是否正确。为提升方向判定的可靠性，仅当三角面片法向与参考法向的夹角小于 60°或大于 120°时（即 $|\cos\theta|>0.5$），该面片的方向信号才被视为有效；夹角介于 60°与 120°之间的面片则被视为方向模糊。此外，鉴于单个面片的方向信号可能受采样偶然性影响，本文以流形连通的面片组（聚类）作为法向矫正的基本单位。对于含非流形结构的模型，以非流形边作为聚类边界，BFS 仅沿流形边传播，将输入网格拆分为若干流形连通聚类。矫正过程分两步进行：首先统一聚类内部各面片的拓扑法向，再由聚类内面片投票决定该聚类是否整体翻转，方向模糊的面片不参与投票。

聚类内部的法向统一无需外部方向参考，仅遵循流形网格上相邻三角形的节点顺序约定：两相邻三角形在共享边上的顶点遍历方向相反（如图 7 所示）。据此，以任意面片为种子执行 BFS，沿邻接关系逐层扩散，当相邻两面共享边的节点顺序一致时翻转邻面，即可实现整个聚类的法向统一。

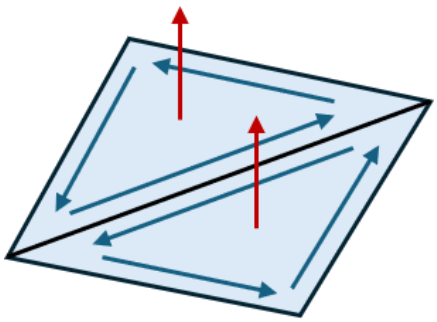


图 7　三角形法向朝向规则

在聚类内面片投票中，首先考虑面片的面积。面积越大的面片在聚类中覆盖的区域越广，投票时应赋予更大的权重。其次要考虑面片方向信号的强度，对于方向信号有效的面片，沿用其最优邻近包络体素的反距离加权融合可见性评分 $\hat{s}_i$，为其计算一个可见性权重，具体公式如下

$$w_i=\min(1+\beta\cdot\hat{s}_i,W_{\max}) \tag{6}$$

其中本文取增量系数 $\beta=0.25$，上限倍率 $W_{\max}=3$. w_i 将可见性评分线性映射为[1, 3]区间内的无量纲权重，完全不可见面片（$\hat{s}_i=0$）的权重因子为 1，保留基础投票资格。上限倍率将高可见面片的可见性权重限制在不可见面片的 3 倍以内，防止少数强信号面片主导投票；增量系数则在此区间内提供连续的权重梯度。

投票时，将可见性权重与面片面积相乘，作为该面片的投票贡献。聚类内参与投票的面片按方向信号分为保持组（法向与参考法向夹角小于 60°）

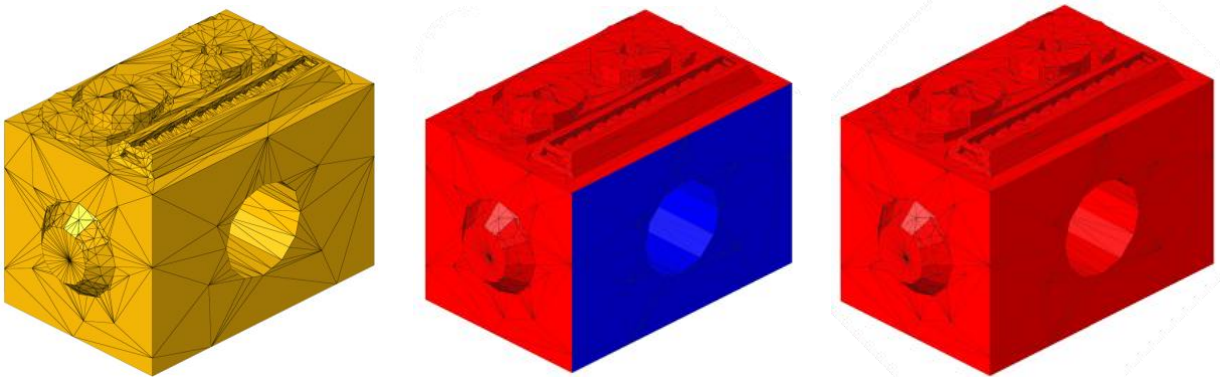
和翻转组（夹角大于120°）。两组分别累加面片的可见性加权面积，总和较大者决定聚类是否翻转，完成法向矫正。该机制综合利用面片面积与可见性信息：前者反映面片在聚类中的几何占比，后者提高外部可见性较强面片的贡献。聚类级累积使整体朝向由面片集合共同决定，从而降低少量异常或可见性不足面片的影响，提高方向判定的稳定性与抗干扰能力。

4 算例与分析

本文方法的核心优势体现在两个层面。矫正效果上，外部包络体素层为法向判定提供了外部空间参考，可见性评分机制将其推广至开放边界区域，使含孔洞、重叠、非流形等复杂缺陷的模型仍能获得高矫正成功率。计算效率上，洪水填充、可见性扫描与加权投票共享同一套均匀栅格，规则的拓扑索引使邻域搜索与方向扫描均可通过偏移高效完成，避免了传统逐面片求交的高额开销。下面将通过典型算例来分析本文方法的鲁棒性及效率。所有算例均是在 Intel Core Ultra 7 255H (2.00 GHz) CPU 上单线程运行的。需要说明，本文的结果图片中以颜色表示法向朝向：红色代表法向指向观察者，蓝色则相反。在法向正确的前提下，可见的外表面应呈现红色。需注意，开放边界或严重自相交可能导致内表面暴露于视野中，此时即使法向正确，可见区域也可能显示为蓝色。

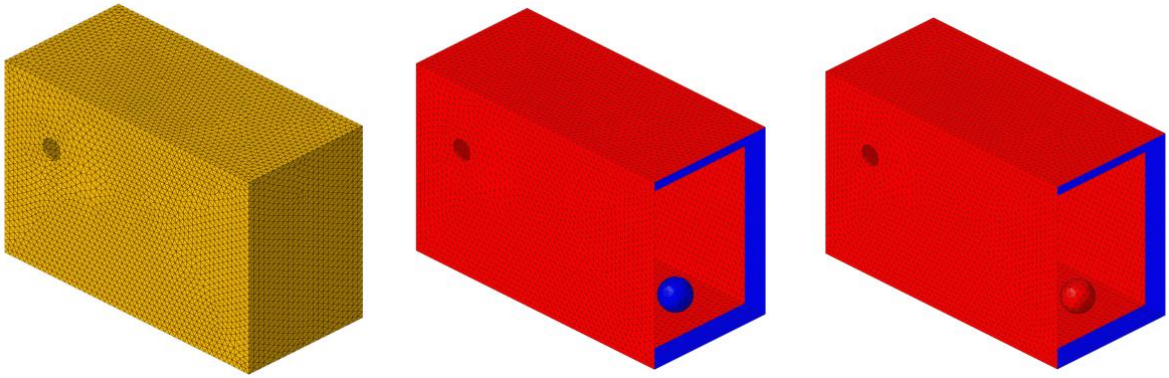
4.1 方法鲁棒性与效率

如图 8 所示，本文选取了 5 个典型模型，并生成了不同规模的三角形网格。图 8a 是具有复杂浮雕图案的笔套模型，其表面网格包含大量低质量三角形，且套孔及临近区域的面片法向出现翻转。图 8b 为厚壁盒体模型，侧面设有 1 个通孔（非缺陷），在盒体内部远离通孔位置放置了 1 个法向翻转的小球，该模型可验证本文方法对深腔遮挡区域内法向的矫正能力。图 8c 为轴套模型，包含两处预设的法向缺陷：一处位于轴套之间的几何遮挡区域，另一处位于小尺度螺栓特征区域，该模型用于检验本文方法在遮挡区域与小特征处的矫正精度。图 8d 是具有开放边界的花瓶模型，其法向完全翻转，该情况下收缩包裹的内外空间定义将完全失效，用以验证可见性评分机制的独立作用。图 8e 为汽车制动系统装配部件经网格布尔运算后得到的网格，装配结合面处存在大量非流形边与低质量三角形。



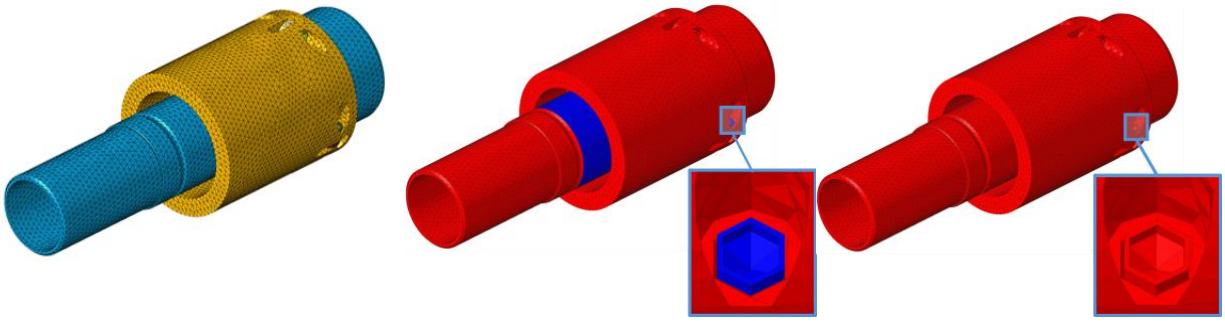
初始　　矫正前法向　　矫正后法向

a. 笔套



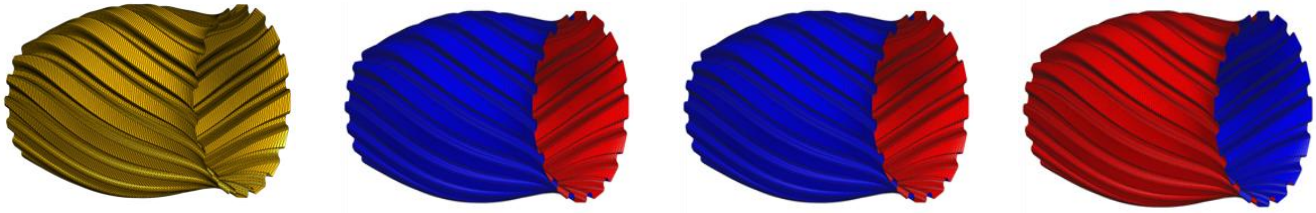
初始　　矫正前法向　　矫正后法向

b. 开孔盒体-内球



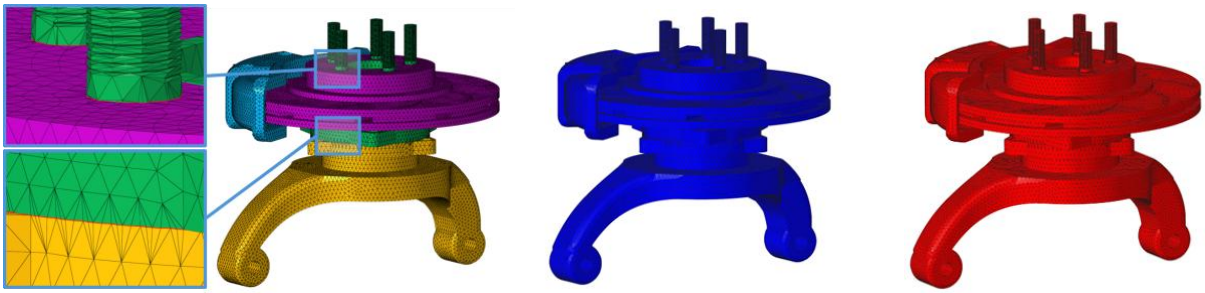
初始　　矫正前法向　　矫正后法向

c. 轴套



初始　　矫正前法向　　仅采用近距策略　　加入可见性评分

d. 花瓶



初始　　矫正前法向　　矫正后法向

e. 制动装配件

图 8　5 个典型案例

如图 8 所示，本文方法成功矫正了上述 5 个模型的法向。原外表面中因法向错误呈蓝色的区域，矫正后均变为红色。需要指出的是，图 8d 为开放边界模型，其暴露的内表面保留蓝色属于正常情况。从矫正机制来看，收缩包裹构建的包络体素层有效支撑了笔套、开孔盒体-内球、轴套及制动装配件模型的法向判定，即使面对非流形边、劣质三角形和几何遮挡区域，包络体素层提供的外部方向参考仍能给出正确的内外指向；可见性评分机制则有效补充了完全开放边界模型（图 8d）的法向矫正，验证了其在收缩包裹失效时的互补作用。为进一步区分可见性评分带来的改善，本文在花瓶模型上关闭该机制，仅按最近距离选择参考体素，其余矫正步骤和判定条件保持不变。如图 8d 所示，仅采用近距策略时，支持整体翻转与保持当前方向的加权面积比例分别为 42.87%和 57.13%，保持当前方向的票占优，因而未能完成整体法向矫正；加入可见性评分后，受多向遮挡的内侧包络体素贡献受到抑制，最终实现了花瓶模型的正确法向矫正。此外，开孔盒体-内球（图 8b）中深腔内部的小球虽与开口距离较远且处于严重遮挡之下，此时可见性评分贡献有限，但收缩包裹栅格仍然可从通孔处深入遮挡区域，完成对小球的法向矫正。总体而言，两种机制协同配合，使本文方法在封闭缺陷模型与开放边界模型上均表现出稳定的矫正能力。

表 1 中给出了针对上述 5 个模型的法向矫正效率数据。以默认参数 $\alpha=15\%$ 为例（α 为栅格体素边长与网格平均单元尺寸之比），7.7 万三角形规模的制动装配件耗时 5.351 s；开放边界的花瓶模型（6.4 万单元）也仅需 4.246 s。当 $\alpha=20\%$ 时，栅格规模缩小约 58%，法向矫正仍保持了相同效果，而矫正效率平均提升约 2 倍以上。这表明，通过适当增大体素尺寸、减少栅格数量，可进一步提高法向矫正效率。尽管如此，为保证精度冗余，本

文方法仍默认采用 $\alpha=15\%$ 构造栅格，对于特征尺度较均匀、无微小特征的模型，用户可适当放宽 α 以进一步提升效率。值得注意的是，开孔盒体-内球模型虽包含深腔遮挡结构，在默认参数下仅耗时 0.24 s，表明本文方法的计算代价主要取决于栅格规模，对模型几何复杂度的敏感度较低。

表 1　本文方法对 5 个典型案例的法向矫正效率

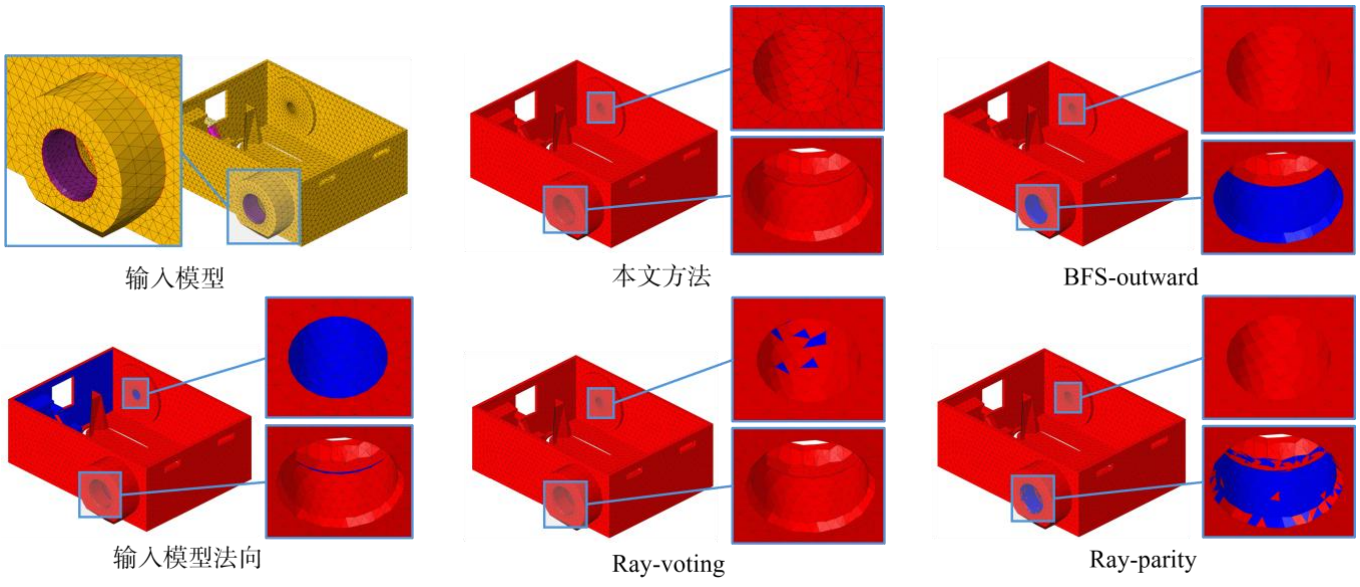
模型	单元数	$\alpha=15\%$		$\alpha=20\%$	
		栅格规模	矫正时间/s	栅格规模	矫正时间/s
笔套	3 894	1 640k	0.040	697k	0.023
开孔盒体-内球	24 978	10 717k	0.239	4 540k	0.110
轴套	36 020	17 470k	0.550	7 322k	0.255
花瓶	64 318	104 630k	4.246	44 153k	1.852
制动装配件	77 224	112 351k	5.351	47 475k	2.263

注：α 为栅格体素边长与网格平均单元尺寸之比。

4.2　与现有方法的对比

为进一步验证本文方法的矫正效果与计算效率，选取以下 3 种代表性方法进行对比。BFS-outward 先通过面邻接 BFS 传播将面片聚类为连通分量并统一聚类内的面片朝向，再以面积加权重心为参考判定各聚类的整体翻转，该方法无需求交、速度最快。Ray-voting 源于 Takayama 等[20]，逐面片从正反两侧发射成对随机射线，优先依据两侧无遮挡射线的数量进行投票，并在数量相同时利用最近交点距离进行判定。Ray-parity 同为文献[20]中提及的方法，统计各条射线的交点数量，并依据其奇偶性进行投票。为保证对比公平，所有测试均采用单线程执行。Ray-voting 与 Ray-parity 均基于 libigl①实现，并采用 Intel Embree 构建 BVH 进行射线求交加速。两种方法采用相同的射线采样设置，采样预算为模型面片数量的 100 倍，并保证每个面片至少具有 10 个方向样本。表 2 中的计时包含各方法内部的预处理和法向矫正过程，其中射线法包含 BVH 构建，但不包含模型文件读写时间。

如图 9 所示，选取了 3 个复杂案例进行对比。图 9a 为零部件模型，如局部放大图所示，该模型含有非流形边（不同颜色对应不同流形聚类），在非流形区域附近形成了条带状的法向翻转，同时模型表面还包含 1 处法向翻转的小孔结构。图 9b 为花朵模型，花瓣之间形成了多处遮挡区域，且薄层花瓣存在严重的自相交（图中高亮区域）；整个模型法向完全翻转——注意图中红色区域并非正确法向，而是自相交导致内部面片暴露所致。图 9c 为汽车空调部件，表面网格中法向错误大量存在，且错误区域关联着相交、重叠、裂缝及开放边界等网格缺陷（图中高亮区域）。



a. 零部件

① https://libigl.github.io

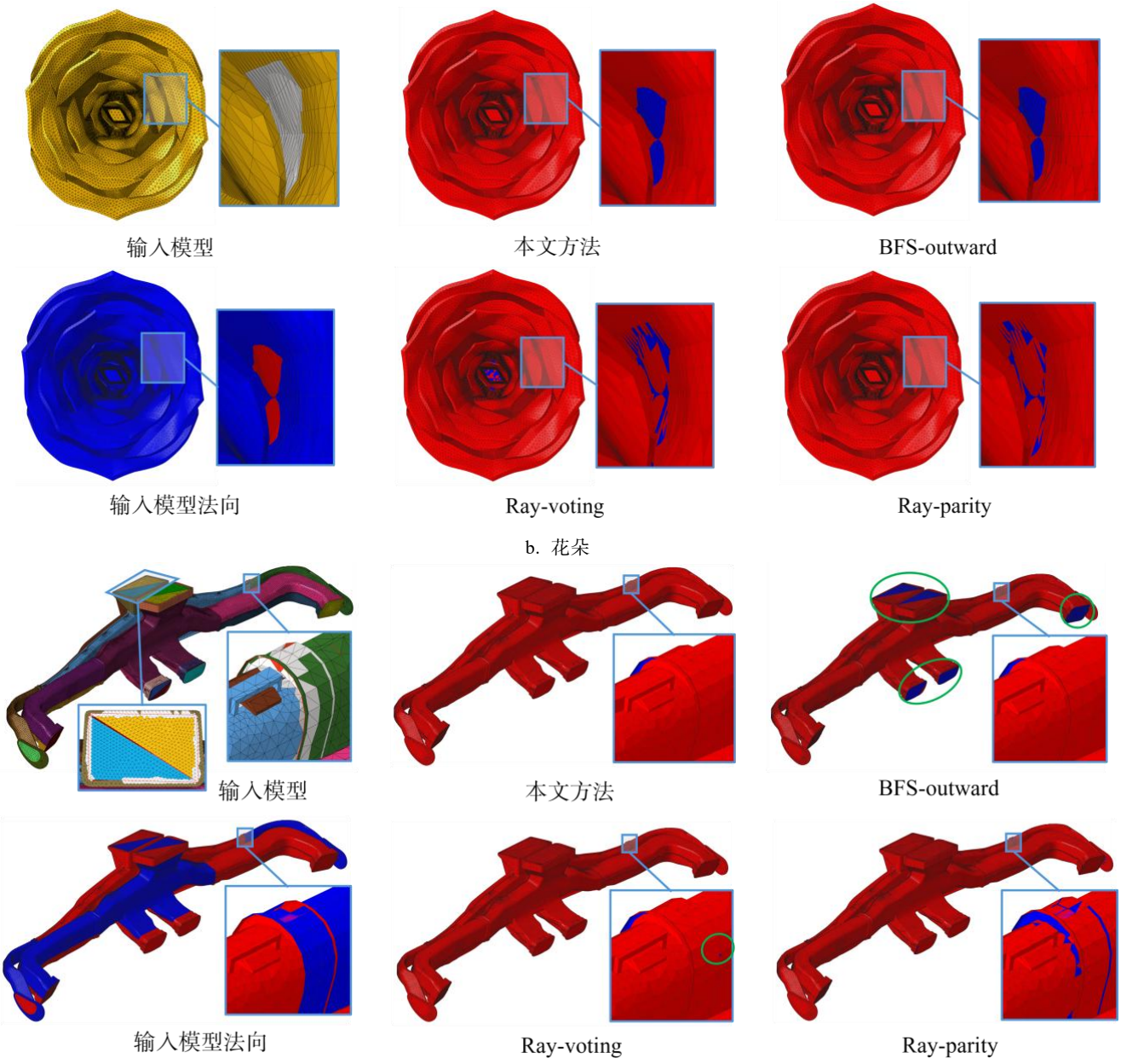


图 9　3 个复杂对比案例

如图 9 中的矫正结果所示，针对零部件模型（图 9a），仅本文方法成功矫正了全部法向错误。对于非流形区域，BFS-outward 与 Ray-parity 完全失效，前者因非流形边的存在需要将模型拆分为多个流形聚类，而不规则或碎片化的聚类会导致重心判定不可靠，后者则因非流形的存在导致奇偶判定规则倒置。Ray-voting 在非流形区域表现良好，但在小孔结构中受射线遮挡影响产生了少数面片误判。针对花朵模型（图 9b），由于不含非流形结构，BFS-outward 与本文方法均完成了法向矫正，而两种射线法则因自相交与遮挡问题均出现了少量误判。针对汽车空调部件模型，本文方法同样表现最佳，如图 9c 所示，复杂的几何形态与网格缺陷导致 BFS-outward 出现大量错误矫正(绿色圆圈内)，两种射线法在自相交与重叠区域亦产生了不同程度的误判。

从表 2 中可以看出，BFS-outward 由于仅需 BFS 传播与重心判定，在各模型上耗时均为最短（0.011~0.153 s），但结合前文矫正结果，其速度优势以复杂缺陷区域中的矫正失败为代价。本文方法在 3 个模型上的矫正时间分别为 0.255 s、2.385 s 和 2.771 s，虽慢于 BFS-outward，但明显快于两种射线方法。相对于 Ray-voting，本文方法在 3 个模型上的加速比分别约为 12.2、27.4 和 49.9；相对于 Ray-parity，加速比分别约为 12.3、27.6 和 49.3。在本文测试的 3 个不同模型及当前实现条件下，加

速比呈增大的现象。在对比实验中，Ray-voting 和 Ray-parity 均采用基于 libigl/Embree 的射线求交实现。其中，Ray-voting 根据射线可见性及最近交点距离进行投票，Ray-parity 通过射线交点数量的奇偶性判断模型内外。相比之下，本文方法主要通过均匀栅格扫描完成方向判定，其计算量主要受栅格规模影响。汽车空调部件的单元数约为花朵模型的 2.4 倍，但其栅格规模略小，这是因为栅格规模同时受到模型包围盒体积与单元尺寸的影响。综合矫正效果与效率，本文方法在当前测试条件下表现出较好的工程适用性。

表 2　几种方法对 3 个复杂案例的法向矫正效率

模型	单元数	栅格规模	矫正时间/s			
			本文方法	BFS-outward	Ray-voting[20]	Ray-parity[20]
零部件	15 397	8 999k	**0.255**	0.011	3.101	3.147
花朵	86 609	52 060k	**2.385**	0.057	65.444	65.730
汽车空调部件	212 069	51 863k	**2.771**	0.153	138.203	136.710

注：加粗为本文方法的结果。

5　结　语

提出了一种适用于含复杂缺陷三角形网格的快速法向矫正方法，将均匀栅格同时复用于收缩包裹与可见性评分两个核心环节，前者在模型外部构建一层包络体素层结构，为法向判定提供外部空间的方向参考，后者通过对包络体素的可见性扫描修正参考法向在开放边界模型中失准的问题，再以流形聚类为单位，通过聚类内部加权投票进行法向矫正，兼顾了矫正鲁棒性与计算效率。通过若干典型算例及与同类方法的比较验证了所提方法的鲁棒性及高效性。未来可继续探索混合判据，以提高腔体内部结构存在开放边界时法向矫正的可靠性。

参考文献(References):

[1] Livesu M, Ellero S, Martínez J, et al. From 3D models to 3D prints: an overview of the processing pipeline[J]. Computer Graphics Forum. 2017, 36(2): 537-564

[2] Borodin P, Zachmann G, Klein R. Consistent normal orientation for polygonal meshes[C] //Proceedings of Computer Graphics International 2004. Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2004: 18-25

[3] Garland M, Heckbert P S. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics[C] //Proceedings of the 9th IEEE Visualization Conference (VIS '98). Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1998: 263-269

[4] Hu Y, Zhou Q, Gao X, et al. Tetrahedral meshing in the wild[J]. ACM Transactions on Graphics. 2018, 37(4): 60

[5] Hu Y, Schneider T, Wang B, et al. Fast tetrahedral meshing in the wild[J]. ACM Transactions on Graphics. 2020, 39(4): 117

[6] Jacobson A, Kavan L, Sorkine-Hornung O. Robust inside-outside segmentation using generalized winding numbers[J]. ACM Transactions on Graphics. 2013, 32(4): 33

[7] Diazzi L, Attene M. Convex polyhedral meshing for robust solid modeling[J]. ACM Transactions on Graphics. 2021, 40(6): 181

[8] Attene M. As-exact-as-possible repair of unprintable STL files[J]. Rapid Prototyping Journal. 2018, 24(5): 855-864

[9] Attene M, Campen M, Kobbelt L. Polygon mesh repairing: An application perspective[J]. ACM Computing Surveys. 2013, 45(2): 15

[10] Wang Pengfei, Xu Minfeng, Xin Shiqing, et al. Robustly watertight manifold surface repair[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics. 2024, 36(7): 1047-1056(in Chinese)
(王鹏飞, 徐敏峰, 辛士庆, 等. 鲁棒的水密流形网格修复[J]. 计算机辅助设计与图形学学报. 2024, 36(7): 1047-1056)

[11] Zhou Q, Jacobson A. Thingi10K: a dataset of 10,000 3D-printing models[OL]. [2016-07-02]. https://arxiv.org/abs/1605.04797

[12] Berger M, Tagliasacchi A, Seversky L M, et al. A survey of surface reconstruction from point clouds[J]. Computer Graphics Forum. 2017, 36(1): 301-329

[13] Metzer G, Hanocka R, Zorin D, et al. Orienting point clouds with dipole propagation[J]. ACM Transactions on Graphics. 2021, 40(4): 165

[14] Wang Xiao, Lei Na, Luo Zhongxuan. An automatic surface-based mesh repairing algorithm[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics. 2022, 34(9): 1391-1401(in Chinese)
(王骁, 雷娜, 罗钟铉. 基于局部的全自动网格修复算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报. 2022, 34(9): 1391-1401)

[15] Cherchi G, Pellacini F, Attene M, et al. Interactive and robust mesh booleans[J]. ACM Transactions on Graphics. 2022, 41(6): 1-14

[16] Xu R, Dou Z, Wang N, et al. Globally consistent normal orientation for point clouds by regularizing the Winding-number

field[J]. ACM Transactions on Graphics. 2023, 42(4): 111

[17] Lin S, Shi Z, Liu Y. Fast and globally consistent normal orientation based on the winding number normal consistency[J]. ACM Transactions on Graphics. 2024, 43(6): 189

[18] Hou F, Wang C, Wang W, et al. Iterative Poisson surface reconstruction (iPSR) for unoriented points[J]. ACM Transactions on Graphics. 2022, 41(4): 128

[19] Lin Jianli, Tang Lei, Yong Junhai. Construction of non-manifold closed regular triangle mesh from polygonal mesh[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics. 2014, 26(10): 1557-1566(in Chinese)
(林建立, 唐磊, 雍俊海. 多边形网格的非流形封闭三角形网格正则化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报. 2014, 26(10): 1557-1566)

[20] Takayama K, Jacobson A, Kavan L, et al. A simple method for correcting facet orientations in polygon meshes based on ray Casting[J]. Journal of Computer Graphics Techniques. 2014, 3(4): 53-63

[21] Zheng Z, Gao X, Pan Z, et al. Visual-preserving mesh repair[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2024, 30(9): 6586-6597

[22] Meng Xiangqiao, Liu Zhiwei, Liu Taoran, et al. Auto-generation algorithm of surface meshes on dirty geometries[J]. Acta Aerodynamica Sinica. 2022, 40(5): 186-194(in Chinese)
(孟祥桥, 刘智伟, 刘陶然, 等. 面向脏几何的曲面网格自动生成算法[J]. 空气动力学学报. 2022, 40(5): 186-194)

[23] Zhou K, Zhang E, Bittner J, et al. Visibility-driven mesh analysis and visualization through graph cuts[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2008, 14(6): 1667-1674

[24] Murali T M, Funkhouser T A. Consistent solid and boundary representations from arbitrary polygonal data[C] //Proceedings of the 1997 symposium on Interactive 3D graphics. New York: Association for Computing Machinery, 1997: 155-162

[25] Kobbelt L P, Vorsatz J, Labsik U, et al. A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces[J]. Computer Graphics Forum. 1999, 18(3): 119-130

[26] Lee Y K, Lim C K, Ghazialam H, et al. Surface mesh generation for dirty geometries by the Cartesian shrink-wrapping technique[J]. Engineering with Computers. 2010, 26(4): 377-390

基于深度强化学习的三角形网格拓扑优化方法

宋文杰[1]，王　瑞[1,2]*，刘玉生[2]

（1. 宁波大学机械工程与力学学院，宁波 315211；2. 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室，杭州 310058）

摘　要：三角形网格在有限元分析中发挥着至关重要的作用，尤其适用于具有不规则边界和精细几何特征的复杂几何体建模。然而，网格质量会直接影响分析的精度与效率。现有的网格生成与优化方法仍难以满足高质量要求，并且大多数网格拓扑优化方法依赖启发式策略和人工经验，容易陷入局部最优。针对这一问题，本文提出了一种基于深度强化学习的三角形网格拓扑优化框架。该框架构建了融合顶点拓扑属性与边几何特征的多头图注意力网络（GAT），并设计了兼顾不规则度改善与几何特征保持的奖励机制，引导智能体在无先验知识的条件下通过自博弈自主探索最优拓扑调整策略。该方法在保留几何特征的同时，使顶点度数分布趋近于最优状态，并有效降低网格不规则度。实验结果表明，该方法在局部自适应拓扑优化中具有良好的有效性与鲁棒性，为高质量网格拓扑优化提供了新的思路。

关键词：三角形网格；拓扑优化；深度强化学习；图注意力网络；近端策略优化

0　引　　言

网格生成是将连续物理域离散为有限单元的关键环节，网格质量直接关系到计算精度、收敛性和求解效率。三角形网格能够灵活适应不规则边界与精细几何特征，因而广泛应用于复杂曲面建模及有限元分析。Delaunay 三角剖分、前沿推进法和四叉树法等生成方法虽然应用成熟，但在复杂拓扑、狭窄区域或高曲率边界附近仍可能产生低质量单元，需要后续优化。几何优化通过移动顶点改善单元形状，却不改变连接关系；拓扑优化则通过调整顶点和单元之间的连接关系扩大可行解空间，是提高网格质量的重要途径。传统拓扑优化通常依据人工制定的局部模板、经验参数和启发式准则选择操作，不同不规则模式对应不同操作组合，方法的通用性和全局寻优能力受到限制。

深度强化学习能够通过智能体与环境的连续交互，根据奖励反馈自主形成序贯决策策略，无需为每种局部拓扑预先给定确定性规则[1]。基于这一特点，本文将曲面三角形网格的连接关系优化表述为马尔可夫决策过程，提出一种基于深度强化学习的三角形网格智能拓扑优化框架，如图 1 所示。在该框架中，将三角形网格建模为强化学习环境，拓扑操作被定义为智能体的动作集合。通过构建合理的状态表示与奖励函数，强化学习智能体在多步交互过程中不断调整优化策略，以实现网格整体质量指标的持续提升。该方法能够在复杂操作空间中自主学习拓扑调整规律，为三角形网格的智能优化提供一种新的实现路径。

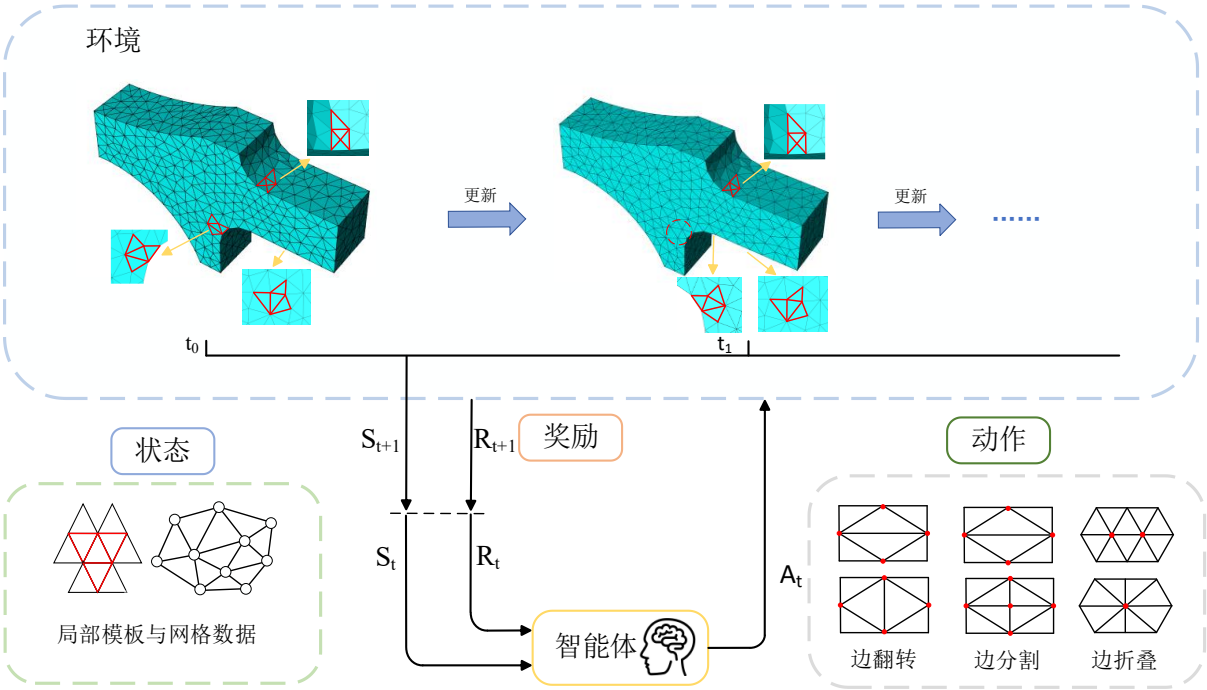


图 1　基于三角形网格拓扑优化的深度强化学习框架

1　三角形网格智能拓扑优化方法

设三角形网格包含 N_v 个顶点，顶点 v_i 的实际度数为 n_i，理想度数为 n_i^{ideal}，则不规则度定义为 $n_i^* = n_i - n_i^{ideal}$，并以所有顶点不规则度绝对值之和作为全局不规则度指标。对于边界顶点，理想度数由边界夹角与理想三角形内角共同确定；本文实验对象均为闭合曲面三角形网格，因此内部顶点的理想度数统一取 6。实际度数等于理想度数的顶点为规则顶点，否则为不规则顶点（奇异点）。由此，拓扑优化可转化为在几何保真和网格质量约束下，选择一系列合法拓扑操作以减少奇异顶点并降低全局不规则度。

强化学习环境基于 OpenMesh 半边数据结构实现，由网格模型和网格更新规则两部分组成。为避免不同网格规模造成状态维数和动作数量不一致，本文以一个三角面为中心沿邻域扩展，构造含 12 个顶点和 9 条可操作边的标准局部模板，并以模板内 12 个顶点不规则度之和衡量局部拓扑复杂程度。该统计允许重复顶点，从而对高度不规则区域形成加权突出。为兼顾探索效率与曲面特征保护，将二面角超过 15° 的边定义为特征边，仅从特征边数量不超过 4 的局部模板中选取不规则度最高的前 L 个作为候选操作区域，避免智能体过度扰动高曲率特征区域，同时保留具有足够优化空间的局部结构。

状态由顶点特征、边特征及局部模板中的可操作边索引组成。顶点特征包括顶点度数和不规则度；边特征包括二面角、相邻两三角形的两个内角以及两个边长比，共 5 项几何描述量，所有输入在训练前进行标准化。动作空间由边翻转、边分割和边折叠三类基本操作构成。每个局部模板包含 9 条可操作边，因而对应 27 个基本动作；同时选取 L 个模板时，动作空间规模为 27L。边翻转改变相邻两三角形的对角连接，边分割通过插入中点增加局部自由度，边折叠则合并边端点并删除相邻面片。每次拓扑操作后，对受影响区域实施拉普拉斯光顺，并将更新后的顶点投影至原始曲面的最近点，以减小连接关系变化引起的几何偏差。

奖励设计直接面向拓扑质量改善。若第 t 步操作合法，则即时奖励取该操作引起的局部不规则度降低量相对于初始局部不规则度的比例，使不同初始复杂程度的模板具有可比性，并鼓励智能体优先选择

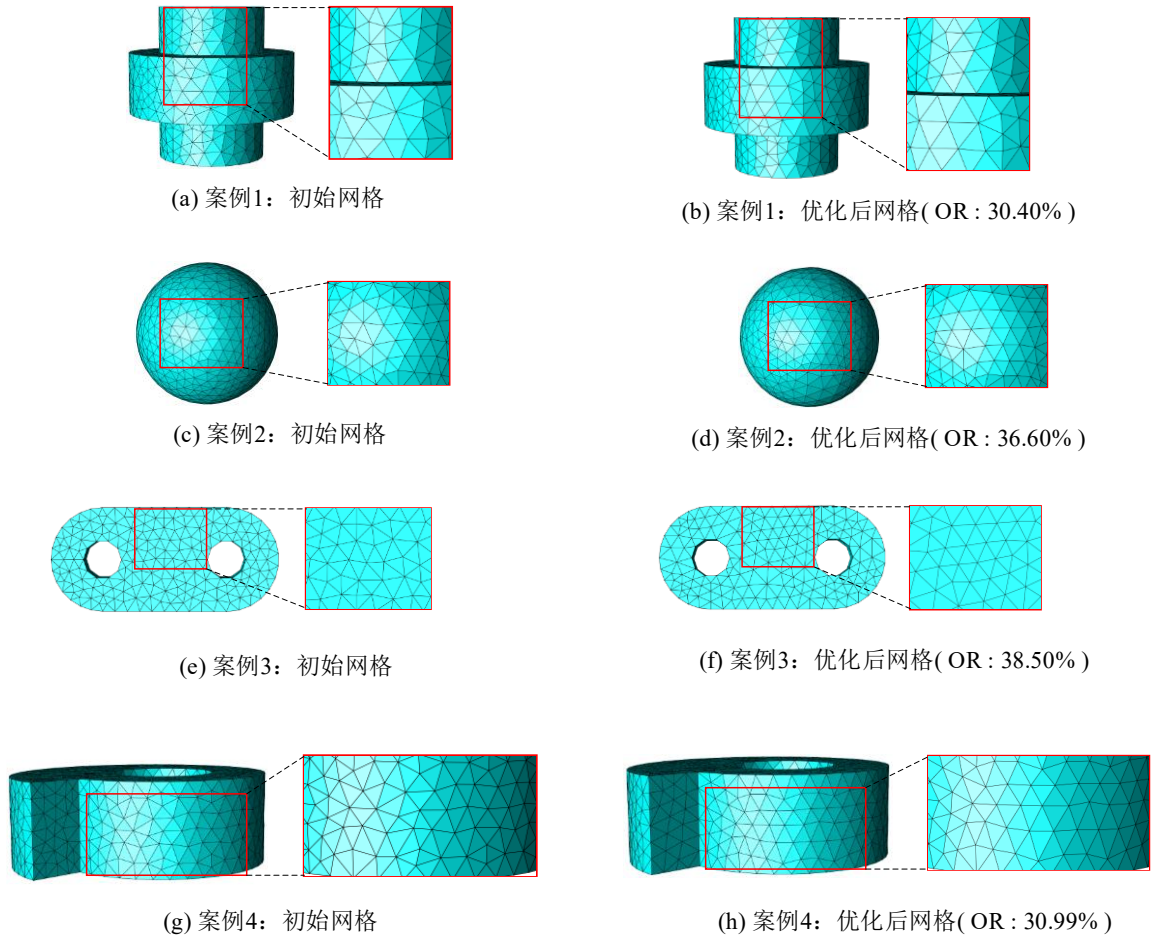
收益更高的操作。若操作使面片法向旋转角超过 15°，表明局部几何保真度受到明显破坏；若生成度数大于 8 的顶点，则形成高阶拓扑异常。上述两类操作均判定为非法并给予-1 的固定惩罚。该奖励机制把不规则度改善、几何特征保持和拓扑有效性纳入统一反馈，使智能体能够在长期累计回报驱动下自主探索操作顺序，而非依赖手工指定的局部修复规则。

策略网络采用 Actor-Critic 架构，主要包括编码、图注意力、特征融合、Actor 和 Critic 五个模块。编码器分别利用两层多层感知机提取顶点与边的初始表示；多头图注意力网络在注意力系数计算中显式引入边的几何特征，自适应聚合中心顶点及其邻域信息[2]。随后，将目标边两端的顶点表示、原始边特征及编码后的边特征拼接，形成动作决策所需的融合表示。Actor 输出各候选边执行三类拓扑操作的概率，Critic 估计当前状态价值。训练采用 PPO 算法[3]，通过裁剪概率比限制单次策略更新幅度，并结合广义优势估计提高训练稳定性。

2 实验结果与分析

训练网格由 Delaunay 三角剖分生成，规模约为 710～1714 个面片。本文从面片数、边数、顶点数、全局不规则度和优化率五个方面评价优化效果，其中优化率定义为全局不规则度降低量与初始全局不规则度之比。三个训练案例的全局不规则度分别由 210、418 和 472 降至 122、254 和 308，对应优化率为 41.90%、39.23%和 34.75%。优化过程中，边翻转、边分割和边折叠的组合能够逐步消除局部奇异连接；随着网格规模增大，优化率有所下降，但三个案例均超过 30%，说明所学习策略可以稳定改善训练网格的顶点度数分布。

为检验策略的泛化能力，进一步在几何形态、网格规模和网格密度均不同的闭合曲面模型上进行验证，部分结果如图 2 所示。测试案例的初始面片数约为 1000～10 万个，全局不规则度优化率为 29.24%～38.50%。用于训练的网格仅含约 710～1714 个面片，而策略仍可直接用于更大规模和不同几何特征的模型，表明局部模板与图特征表达使方法具备较好的跨几何、跨密度和跨尺度适用性。



(a) 案例1：初始网格　(b) 案例1：优化后网格(OR : 30.40%)

(c) 案例2：初始网格　(d) 案例2：优化后网格(OR : 36.60%)

(e) 案例3：初始网格　(f) 案例3：优化后网格(OR : 38.50%)

(g) 案例4：初始网格　(h) 案例4：优化后网格(OR : 30.99%)

图 2　部分三角形网格的拓扑优化结果

3　结　论

本文提出了一种基于深度强化学习的三角形网格拓扑优化方法，将局部连接调整建模为马尔可夫决策过程，并通过 PPO 训练智能体自主选择边翻转、边分割和边折叠操作。该方法利用标准局部模板统一不同网格的决策空间，以多头 GAT 融合顶点拓扑属性和边几何特征，同时通过不规则度收益、几何失真惩罚和拓扑异常惩罚共同约束策略学习；拓扑更新后结合局部光顺与最近点投影修复几何。训练与验证结果显示，该方法能够有效降低全局不规则度，在不同曲面特征、网格密度和模型规模下保持稳定的优化效果，并可由千级面片训练案例推广到十万级面片模型。当前完整网格图输入带来的规模开销以及个别区域的单元尺寸不均匀仍有改进空间。总体而言，该框架减少了对启发式规则和人工经验的依赖，为面向复杂曲面三角形网格的智能拓扑优化提供了可行途径。

参 考 文 献：

[1] NARAYANAN A, PAN Y, PERSSON P O. Learning topological operations on meshes with application to block decomposition of polygons[J]. Computer-Aided Design, 2024, 175: 103744.

[2] Veli˘ckovi´c, P., et al. (2017). Graph attention networks. arXiv preprint arXiv:1710.10903.

[3] SCHULMAN J, et al. Proximal policy optimization algorithms[EB/OL]. arXiv:1707.06347, 2017.

基于二次曲面变分形状逼近的全局四次三角 Bézier 曲面简化

彭晓东　　陈仁杰*

中国科学技术大学，合肥

摘　要：针对传统网格简化以分片线性三角形为基本单元、在高压缩率下难以兼顾自由曲面逼近精度与片间连续性的问题，本文提出一种基于二次曲面变分形状逼近（Quadric VSA）的全局四次三角 Bézier 曲面简化方法。首先，采用同时考虑位置与法向偏差的 Quadric VSA 将输入三角网格划分为二次曲面代理区域，并结合特征约束与图割边界平滑获得几何意义明确且边界规则的分区。随后，在共享区域边界上建立统一的全局锚点拓扑，以固定预算构造粗三角骨架；每个粗三角形对应一个四次 Bernstein–Bézier 曲面片，所有曲面片在统一控制点注册表中整体拟合。共享边控制变量从拓扑上保证跨区域 G^0 连续性，同一区域内部通过 Bernstein 系数约束实现 C^1 连续性，并将检测到的直边作为硬约束保留。Fandisk 和 Homer 模型实验表明，所提方法能够在紧凑表示下获得较高的曲面逼近质量，显著改善边界拟合效果，保持曲面片之间的稳定连续性，并较好保留尖锐特征、复杂部件连接和显著曲率变化区域，生成无裂缝、区域内光滑且结构清晰的高阶网格简化结果。

关键词：网格简化；变分形状逼近；二次曲面代理；三角 Bézier 曲面；全局拟合

0　引言

高精度扫描、数值仿真和 CAD 离散化模型通常包含大量三角形，直接用于存储、传输与实时渲染会产生较高开销。渐进网格通过边折叠构造连续分辨率表示，可同时服务于层次细节、渐进传输和几何压缩 [1]。与这类局部贪心简化不同，变分形状逼近（VSA）将简化表述为误差驱动的全局几何分区问题，通过反复执行区域划分与代理拟合，使有限数量的代理自适应覆盖输入表面 [2]。在此基础上，Yan 等将代理从平面扩展到一般二次曲面，并利用图割改善区域边界 [3]；随后又联合位置误差与法向偏差，形成面向扫描模型和工业 CAD 模型的 Quadric VSA 分割框架 [4]。其中，Taubin 提出的隐式曲面近似几何距离为低阶代数曲面的稳定拟合提供了重要基础 [5]。这些方法能够获得紧凑而有几何意义的区域结构，但输出通常仍是分片线性网格或曲面区域标签，尚未直接形成共享拓扑、连续拼接的全局高阶曲面。

从密集扫描数据恢复光滑参数曲面也是逆向工程和几何建模中的经典问题。Hoppe 等利用分片光滑细分曲面同时表达任意拓扑与尖锐特征 [6]；Eck 和 Hoppe 自动构造 B 样条曲面片网络及数据参数化，以保持片间切平面连续性 [7]；Krishnamurthy 和 Levoy 则将稠密多边形网格拟合为张量积 B 样条曲面，并以位移图保留高频细节 [8]。上述方法表明高阶曲面比平面三角形具有更强的单位自由度逼近能力，但其曲面片布局、参数化和跨片连续性处理往往彼此耦合。对于三角域曲面，Tong 和 Kim 构造了可插值位置、法向与法曲率的 G^1 三角样条曲面 [9]；近期 ParSeNet 等学习方法可将点云分解为包括 B 样条在内的参数曲面片 [10]，但仍需进一步处理共享边界的一致性、全局水密性及曲面片数量控制。本文的核心思想是将 Quadric VSA 产生的几何区域作为高阶简化的结构先验：

*通讯作者

以区域代理组织粗拓扑，以共享锚点建立全局离散骨架，再一次性求解全部四次三角 Bézier 曲面片，从而把区域级几何抽象、预算控制和连续高阶曲面表达统一到同一简化流程中。

1 方法

算法首先执行论文对齐的 Quadric VSA：以位置与法向混合误差驱动 Lloyd 式重分配，并结合强特征预分割、渐进代理插入、冗余区域合并和图割边界平滑，获得连通且边界规则的二次曲面区域。区域标签、共享边界链及代理类型继续作为高阶曲面拓扑和连续性类别的依据，使光滑区域内部可施加导数连续约束，而 Quadric 区域之间只共享公共曲线，避免真实折痕或曲面类型转换被过度光滑。

在区域参数域内，由交汇点、特征端点和曲率驱动的边界点构成必要锚点，并在全局预算下补充内部锚点、生成粗三角剖分。共享边界上的同一源顶点只登记一次，跨区域边界删点与重三角化以原子操作执行，保证边界离散一致。每个粗三角形对应一个含 15 个控制点的四次 Bernstein–Bézier 曲面片；所有顶点、无向边和面内部控制点由统一注册表管理。锚点严格固定，相邻片共享完整的五点边界控制多边形以精确实现 G^0；同一区域内则沿公共边匹配三次 Bernstein 导数系数以实现 C^1。最后，将曲面采样误差、原网格边界误差和公平项与连续性等式共同装配，通过稀疏约束系统一次性求解全部曲面片。

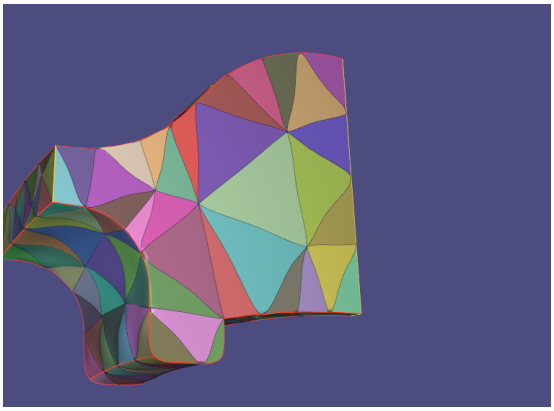


图 1　Fandisk 模型的 180 锚点全局四次三角 Bézier 曲面简化结果

2 结果与结论

Fandisk 模型被划分为 18 个 Quadric 区域。固定预算阶段将初始 224 个逻辑锚点和 444 个曲面片降至 180 个锚点和 356 个四次曲面片，并使用 2850 个全局控制点；锚点数与曲面片数分别减少 19.6% 和 19.8%。最终曲面 RMS/边界 RMS 为 0.0204563/0.00412559，均优于同一粗骨架的分片线性结果 0.0240707/0.0170366；最大 G^0 间隙为 7.16×10^{-15}，最大 C^1 约束残差为 3.74×10^{-11}，固定锚点位移为 0，且没有翻转或近退化 Jacobian。结果表明，利用 Quadric VSA 的区域结构和共享拓扑对粗网格整体高阶化，能够在紧凑表示下同时获得较高的曲面精度、边界保真度和稳定连续性。此外，Homer 模型上的补充实验表明，该流程能够适应复杂部件连接和显著曲率变化，并保持曲面片拼接及特征边界的整体稳定性，如图 2 所示。

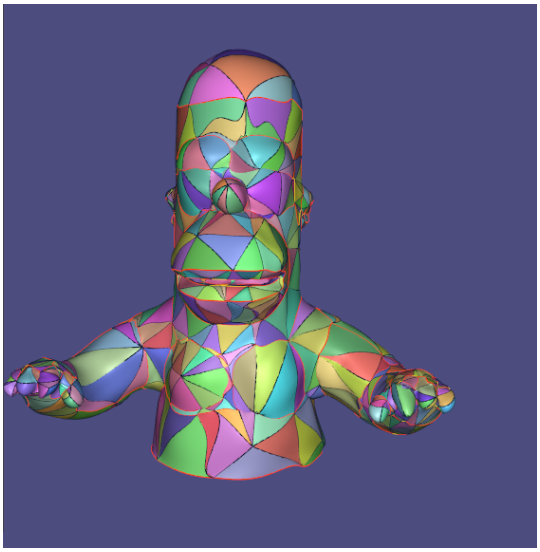


图 2　Homer 模型的全局四次三角 Bézier 曲面简化结果

参考文献

[1] HOPPE H. Progressive meshes[C]//Proceedings of SIGGRAPH 1996. New York: ACM, 1996: 99–108.

[2] COHEN-STEINER D, ALLIEZ P, DESBRUN M. Variational shape approximation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 905–914.

[3] YAN D M, LIU Y, WANG W. Quadric surface extraction by variational shape approximation[C]//Geometric Modeling and Processing—GMP 2006. Berlin: Springer, 2006: 73–86.

[4] YAN D M, WANG W, LIU Y, et al. Variational mesh segmentation via quadric surface fitting[J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(11): 1072–1082.

[5] TAUBIN G. Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(11): 1115–1138.

[6] HOPPE H, DEROSE T, DUCHAMP T, et al. Piecewise smooth surface reconstruction[C]//Proceedings of SIGGRAPH 1994. New York: ACM, 1994: 295–302.

[7] ECK M, HOPPE H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type[C]//Proceedings of SIGGRAPH 1996. New York: ACM, 1996: 325–334.

[8] KRISHNAMURTHY V, LEVOY M. Fitting smooth surfaces to dense polygon meshes[C]//Proceedings of SIGGRAPH 1996. New York: ACM, 1996: 313–324.

[9] TONG W H, KIM T W. High-order approximation of implicit surfaces by G^1 triangular spline surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(6): 441–455.

[10] SHARMA G, LIU D, MAJI S, et al. ParSeNet: A parametric surface fitting network for 3D point clouds[C]//Computer Vision—ECCV 2020. Cham: Springer, 2020: 261–276.

跨声速风洞核心流-透气壁-驻室网格生成与风洞流场计算

郭承鹏，李王斌，贺宇豪，李艳亮，鲁文博

（中国航空工业空气动力研究院，沈阳 110034)

（高速高雷诺数气动力航空科技重点实验室，沈阳 110034）

摘　要：本文针对跨声速风洞的真实环境，不做几何简化和边界条件替代，建立核心流-真实透气壁几何-驻室全尺度一体化仿真框架。网格方面，将喷管、试验段、开孔壁、驻室、扩散段分区生成后通过点点对应拼装为单块非结构网格，消除插值误差并保证界面严格守恒；飞行器模型及支撑杆作为独立运动子域，通过重叠网格与背景域耦合，灵活实现迎角、侧滑角变化。数值方面，针对核心流跨声速与驻室近不可压的马赫数差异，引入低速预处理技术，并差异化设计各区域物面边界层网格厚度。计算应用上，通过一比一真实仿真模拟揭示了孔道内激波/膨胀波多次反射、非定常涡脱落及驻室涡系对核心流的横向动量输运等简化方法无法捕捉的物理机制，试验段马赫数偏差与测量值吻合良好。

关键词：跨声速风洞；网格生成；全尺度仿真；洞壁干扰

0 引　言

飞行器气动特性的数值评估是当代航空航天设计流程中的核心环节。在工程实践中，CFD 计算通常采用自由远场边界条件，假设飞行器处于无界均匀来流中进行模拟。然而对于风洞试验而言，流场域并非是无界的，如果阻塞度较小、迎角较小时，通过调节合适的风洞开闭比、壁板角、驻室抽气量、驻室主流引射缝再入片角度，可以忽略洞壁给模型扰流带来的影响，如果无法完全忽略洞壁的影响，也有专门的洞壁干扰修正方法用于修正模型气动力数据，通常修正量非常小。对于阻塞度较大或大迎角状态时，风洞试验结果往往含有较强的风洞洞壁干扰效应，风洞试验结果有可能不真实，如何评估结果的可靠性，探究试验中复杂的流动机理，可以使用 CFD 手段来对风洞流动进行模拟。

然而，跨声速风洞（$Ma = 0.8 \sim 1.4$）的试验段壁面并非实壁，而是采用透气壁（开孔壁或开槽壁）结构以消除试验段壅塞。透气壁外侧设置驻室（plenum chamber），通过调节试验段静压与驻室静压之比来获得不同的试验马赫数。透气壁的存在使得核心流、壁面微通道流动及驻室回流三者形成强耦合系统：核心流中的激波和膨胀波在壁面处发生反射与透射，部分气流经透气壁泄入驻室，而驻室内的低压涡系又可能通过透气壁反向冲击核心流，造成试验段流场品质下降。

面对这一复杂的多区域耦合流动，现有 CFD 方法采用了层层简化的策略：

第一层简化：以自由远场代替风洞环境。绝大多数飞行器 CFD 评估直接忽略风洞壁面，假设模型处于无界流场中。

第二层简化：以实壁代替透气壁。 当需要评估洞壁干扰时，仅将试验段简化为实壁边界，完全忽略透气壁的泄流/再入效应。

第三层简化：以经验边界条件代替真实透气壁几何。对于透气壁，现有方法采用壁压信息法、Darcy 型多孔介质边界条件或线化小扰动理论，将壁面法向速度与压降的关系简化为经验公式或线性参数 R，从未将毫米级孔径/槽宽、厘米级壁厚的真实几何纳入计算域。

第四层简化：完全忽略驻室。驻室作为透气壁外侧的空腔区域，其内部的低速回流、涡系运动及压力脉动对核心流的反馈效应，在现有方法中被彻底排除在计算域之外。

上述层层简化虽然降低了计算成本，但也系统性地丢失了关键物理信息：透气壁的激波/膨胀波反射情况无法通过简化边界条件来捕捉。

本文旨在抛弃上述所有简化，建立一套核心流-真实透气壁几何-驻室全尺度一体化的网格生成与流场计算框架。不采用任何壁压信息法、Darcy 定律或线化透气壁参数，而是将透气壁的真实孔道/槽腔几何和驻室空间直接作为计算域的有机组成部分，通过控制方程自然实现三个子域的强耦合。在网格层面，本文采用"分区生成-点点对应-拼装为单块非结构网格"的策略，消除了子域间插值带来的数值误差；同时，飞行器模型及支撑杆作为独立运动子域，通过重叠网格技术与风洞背景网格耦合，以灵活实现不同姿态角的模拟。这一全尺度仿真框架能够直接解析从毫米级孔道到米级试验段的完整流动图景，为跨声速风洞洞壁干扰的精确评估和流场品质优化提供一种高保真数值方法。

1 问题描述

1.1 物理模型与计算域

本文研究的物理模型为典型连续式跨声速风洞，计算域沿流向（x轴）涵盖喷管出口至扩散段出口，沿法向（y轴）和展向（z轴）覆盖试验段半模区域及外部驻室空间。

与现有方法的根本不同在于，本文的计算域明确包含以下物理子域，且透气壁的真实几何被完整保留：

- 喷管段（Ω_1）：从喷管入口至试验段入口的收缩-扩张通道，流动从亚声速加速至跨声速；
- 试验段核心流区（Ω_2）：试验段内部主流区域，包含模型（如有）、支杆及弯刀等试验装置，流动以可压缩湍流为主，存在激波/边界层干扰；
- 透气壁微通道区（Ω_3）：真实开孔壁的孔道或开槽壁的槽腔区域，几何尺度为毫米级（孔径$d \approx 2 \sim 5\,\mathrm{mm}$，壁厚$\delta \approx 5 \sim 10\,\mathrm{mm}$），流动呈强剪切、激波/膨胀波反射及分离特征；
- 驻室区（Ω_4）：透气壁外侧的空腔区域，容积远大于试验段，流动以低速回流和涡系运动为主，压力分布受抽气/排气系统调控；
- 扩散段（Ω_5）：试验段下游的扩压通道，流动从跨声速减速至亚声速；
- 飞行器模型及支撑杆子域（Ω_m）：独立生成的运动子域，包含飞行器模型、支杆及弯刀等试验装置，通过重叠网格与风洞背景网格耦合。

喷管段、试验段、透气壁、驻室及扩散段构成风洞固定背景域，各子域通过点点对应方式在交界面处实现网格节点匹配，最终拼装为单块非结构网格。飞行器模型子域作为独立运动子域，通过重叠网格技术嵌入风洞背景域中，以支持模型迎角、侧滑角等姿态变化。

1.2 控制方程与湍流模型

各子域统一采用三维可压缩雷诺平均 Navier-Stokes（RANS）方程组作为控制方程：

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{F}_j^v}{\partial x_j}$$

其中$\mathbf{Q} = [\rho, \rho u_i, \rho E]^T$为守恒变量，$\mathbf{F}_j$和$\mathbf{F}_j^v$分别为无粘通量和粘性通量。

然而，核心流区/喷管段（$Ma \sim 0.8 \sim 1.2$）与驻室区（$Ma \sim 0.01 \sim 0.1$）的马赫数差异超过两个数量级，若采用标准密度基求解器，驻室区的低速流动将因可压缩性刚度（acoustic stiffness）导致严重的收敛困难，甚至数值发散。因此，本文在驻室区及透气壁微通道下游的低速区域引入低速预处理（Low-Mach

Preconditioning）技术，通过修改时间导数项的特征值，消除声速与对流速度之间的量级差异，使跨声速核心流与近不可压驻室流动能够在同一求解框架下高效收敛。

湍流模拟采用$k-\omega$ SST 两方程模型。需要特别指出的是，驻室区与核心流区的壁面边界层特性截然不同，两个区域的物面边界层网格厚度分布应差异化设计——核心流区及喷管段按$Y^+ \approx 1$布置细密网格以直接解析湍流边界层；驻室区及扩散段壁面可适当放宽至$Y^+ \sim 10 \sim 30$，采用壁面函数处理，以在不影响精度的前提下显著节省网格资源。

1.3 网格生成策略

跨声速风洞全尺度仿真的首要技术障碍在于几何尺度的极端跨度：孔径/槽宽为毫米级，壁厚为厘米级，而试验段长度为米级，驻室容积达数十立方米，尺度跨度超过10^3。现有方法回避这一难题的方式是不生成孔道/槽腔网格，而用边界条件代替真实几何。本文直面这一挑战，采用“固定背景域分区生成-点点对应拼装为单块非结构网格，运动部件采用重叠网格”的混合策略。

1.3.1 风洞固定背景域：分区生成与点点对应拼装

风洞固定背景域包含喷管段、试验段、透气壁微通道区、驻室段及扩散段。各子域分别独立生成非结构网格，在交界面处通过点点对应（point-to-point matching）方式实现网格节点的一一匹配，最终拼装为单块非结构网格。

具体实施步骤如下：

（1）子域独立生成。喷管段采用结构化或混合网格拓扑，在喉道及壁面曲率变化处进行局部加密；试验段核心流区采用非结构网格，壁面第一层网格高度按$Y^+ \approx 1$设计，边界层内布置 30~40 层棱柱层网格；透气壁微通道区采用局部加密策略，每个孔道/槽腔内沿流向布置不少于 20 个网格节点，径向布置不少于 15 个节点，直接解析孔道内部的激波/膨胀波系和边界层演化；驻室区采用非结构网格，壁面边界层按$Y^+ \sim 10 \sim 30$设计，布置 10~15 层棱柱层网格；扩散段网格尺度依据当地速度梯度自适应调整。

（2）交界面点点对应匹配。在各子域的交界面上，通过网格生成软件的人工干预或脚本自动化，确保交界面两侧网格节点坐标严格一致（误差小于10^{-6} 倍特征长度），实现点点对应。

（3）拼装为单块非结构网格。将点点对应后的各子域网格，通过程序容差判定方法静其合并为单块非结构网格，作为风洞固定背景网格。单块网格的优势在于：求解器无需处理子域间界面耦合，全局时间步长和 CFL 条件统一，计算效率显著高于多区域耦合求解；同时，单块网格便于开展网格自适应加密和并行分区负载均衡。

1.3.2 飞行器模型及支撑杆：独立子域与重叠网格

飞行器模型、支杆及弯刀等试验装置作为独立运动子域单独生成网格。该子域采用非结构网格，壁面边界层按$Y^+ \approx 1$设计，边界层内布置$30 \sim 40$层棱柱层网格。

模型子域与风洞固定背景域之间采用重叠网格（overset/Chimera）技术耦合。具体流程为：

- 背景网格挖洞（hole-cutting）：在风洞背景网格中，根据模型子域的包围盒和壁面距离场，标记出被模型占据的网格单元为“洞单元”（hole cells），不参与背景域的流场求解；
- 贡献单元搜索（donor cell search）：对于洞边界附近的“接收单元”（receptor cells），在模型子域中搜索对应的贡献单元，通过三线性插值或高阶插值实现流场变量传递；
- 信息交换：在每个时间步或伪时间步内，模型子域与背景域通过重叠界面交换流场信息，实现质量、动量和能量的守恒传递。

采用重叠网格而非点点对应的核心原因在于姿态变化的灵活性。风洞试验中，模型迎角、侧滑角需在大范围内变化（迎角通常$-10° \sim +25°$，侧滑角$-15° \sim +15°$）。若将模型与风洞背景域固连为单块网格，每次姿态变化都需重新生成整个风洞网格，计算成本极高。重叠网格将模型子域与背景域解耦，仅需重新定位模型子域并执行挖洞和贡献单元搜索，无需重新生成风洞背景网格，极大提高了不同姿态角工况的计算效率。

1.4 边界条件设置

（1）风洞入口边界（喷管段入口）

给定总压p_0、总温T_0和速度方向，采用特征边界条件。总压和总温根据风洞运行工况确定。

（2）风洞出口边界（扩散段出口）

采用动态背压边界条件，通过 PID 控制器迭代调节出口静压直至试验段达到目标马赫数。具体而言，监测试验段中心线某参考点的马赫数，若与目标值存在偏差，则按比例调整出口背压，直至偏差小于10^{-4}。

（3）驻室抽气/排气边界

驻室外壁面设置抽气/排气口，给定质量流量或压力边界，模拟风洞引射/抽气系统。驻室初始压力根据目标马赫数下的试验段静压与透气壁特性预估。

（4）对称面

如果不计算横向特性，根据模型、风洞的对称性，设置对称边界条件：法向速度为零，其余变量法向梯度为零。

（5）物面边界

喷管壁、试验段壁、扩散段壁、驻室外壁及模型表面均采用无滑移绝热壁面条件。

（6）重叠网格界面

模型子域与风洞背景域之间的重叠界面通过挖洞和贡献单元插值实现信息交换。洞边界处采用通量守恒型插值（flux-conservative interpolation），确保通过重叠界面的质量、动量和能量通量严格守恒。

1.5 数值求解方法

采用基于密度的耦合隐式求解器，时间推进采用一阶后向欧拉格式，空间离散对流项采用二阶迎风格式（MUSCL 重构），粘性项采用中心差分。为加速收敛，采用局部时间步长技术和多重网格（multigrid）方法。

2 结　论

本文针对跨声速风洞核心流-真实透气壁几何-驻室多区域耦合流动问题，建立了全尺度一体化网格生成与流场计算框架，主要结论如下：

（1）本文将真实孔道/槽腔几何和驻室空间直接纳入计算域，实现了核心流-透气壁-驻室的无简化、全物理、1:1 数值再现。

（2）建立了“分区生成-点点对应拼装-重叠网格”的混合网格策略。风洞固定部件（喷管、试验段、开孔壁、驻室、扩散段）采用分区生成后通过点点对应拼装为单块非结构网格，从根本上消除了子域间插值误差，确保了交界面处质量、动量和能量的严格守恒；飞行器模型及支撑杆作为独立运动子域，通过重叠网格与背景域耦合，以灵活实现不同迎角、侧滑角的姿态变化，避免了每次变姿态都需重新生成全局网格的巨额开销。

（3）针对核心流区（$Ma = 0.8 \sim 1.2$）与驻室区（$Ma = 0.01 \sim 0.1$）的马赫数差异，引入低速预处理

技术消除可压缩性刚度；同时根据不同区域的边界层特性差异化设计物面网格厚度（核心流区$Y^+ \approx 1$直接解析，驻室区$Y^+ \sim 10 \sim 30$采用壁面函数），在保持精度的同时显著节省了网格资源。

本文所建立的全尺度一体化计算框架，为跨声速风洞洞壁干扰的精确非线性修正、透气壁参数（开闭比、孔径、槽型）的精细化优化设计、驻室抽气系统的气动匹配以及不同姿态角下飞行器模型的风洞干扰评估提供高保真数值方法。

参 考 文 献:

[1] 范召林, 恽起麟, 贺中. 跨声速洞壁干扰研究述评[J]. 气动实验与测量控制, 1996(4): 1-11.

[2] 范召林, 崔乃明, 恽起麟. 民机跨音速实验洞壁干扰修正方法[J]. 航空学报, 1994, 15(2): 129-136.

[3] 范召林. 跨声速风洞模型试验非线性沿壁干扰修正方法研究[J]. 流体力学实验与测量, 1998, 12(2): 9-19.

[4] 范召林, 崔乃明, 恽起麟. 三种跨声速洞壁干扰修正方法及其在小展弦比飞翼标模试验中的应用[J]. 空气动力学学报, 2016, 34(1): 113-120.

[5] 周长海. 开孔壁透气规律的数值模拟[J]. 气动研究与实验, 1996, 13(1): 15-20.

[6] 周长海. 用 Navier-Stokes 方程解提供的开孔壁边界条件求洞壁干扰修正[J]. 气动研究与实验, 1995, 12(3): 1-14.

[7] 张其威, 黄奕裔. 高速风洞洞壁干扰减小与修正研究[J]. 气动实验与测量控制, 1993(4): 17-27.

[8] 崔乃明. 高速风洞洞壁干扰和支架干扰的工程修正方法[J]. 航空学报, 1990, 12: 523-529.

[9] 丛成华, 廖达雄, 王海锋, 等. 0.6m 连续式跨声速风洞槽壁试验段数值模拟[J]. 空气动力学学报, 2013, 31(6): 752-757.

[10] 刘沛清. 跨声速风洞[M]//流体力学微教材. 北京航空航天大学, 2017.

[11] 跨声速风洞高速段一体化数值模拟研究[J]. 航空工程进展, 2020, 11(1): 42-50.

[12] 一种跨声速风洞透气壁模型的数值模拟研究[J]. 航空工程进展, 2021, 12(1): 50-58.

[13] 槽壁几何参数对跨声速风洞流场品质的影响[J]. 航空学报, 2016, 37(5): 1440-1450.

[14] Mokry M, Khalid M, Mébarki Y. The Art and Science of Wind Tunnel Wall Interference: New Challenges[C]. ICAS 2000 Congress, 2000.

[15] Maseland J E J, Laban M, van der Ven H, et al. Development of CFD-based Interference Models for the DNW-HST Transonic Wind-tunnel[R]. NLR-TP-2006-504, 2007.

[16] Al-Saadi J A. Wall Interference and Boundary Simulation in a Transonic Wind Tunnel with a Discretely Slotted Test Section[R]. NASA-TP-3334, 1993.

[17] Schuman W C. A Computational Evaluation of Transonic Wind Tunnel Wall Interference on High Aspect Ratio Models in the Arnold Engineering Development Complex 16 Foot Transonic Tunnel[D]. University of Tennessee, 2016.

[18] Menter F R. Two-equation Eddy-viscosity Turbulence Models for Engineering Applications[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1598-1605.

[19] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes[C]. AIAA Paper 81-1259, 1981.

[20] 刘厚林, 董亮, 王勇, 等. 流体机械 CFD 中的网格生成方法进展[J]. 流体机械, 2010(4): 32-37.

考虑边界层细分的高阶混合网格翻转检测与修正方法

胡卓然，徐岗

（杭州电子科技大学，中国浙江省杭州市 310018；通信作者工作邮箱：gxu@hdu.edu.cn）

摘 要：间接高阶网格生成中的边界节点投影和内部节点位移传播可能导致单元翻转，而有限点采样难以判断整个参考域内的映射取向。针对含边界层的四面体、六面体和三棱柱混合网格，本文基于已有 Bernstein 下界判据，将边界层分层参考子域的定向 Jacobian 下界作为节点位移修正的约束，并结合共享节点关联单元的联合检查，协调局部修正对相邻单元的影响。进一步给出映射相容条件下母子单元下界的传递关系，并对细分后的子单元进行独立检验。该判据在精确算术下构成无翻转的充分条件，双精度实现的数值结果尚不具有严格的舍入误差保证。五组 P2 工程算例和 2822 的 P2—P4 算例经修正后均满足所设定的数值判定条件，参数分析进一步考察了递归深度、相对容差和分层参数对判定结果和网格质量的影响。形状质量与边界几何偏差的结果表明，翻转修正可能伴随边界拟合偏差增大及平均形状质量下降。上述结果验证了该方法在所测模型与参数范围内的可行性。

关键词：高阶网格；边界层网格；混合网格；单元翻转；Bernstein 多项式

Inversion Detection and Correction for High-Order Hybrid Meshes with Boundary-Layer Subdivision

HU Zhuoran, XU Gang*

(Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang 310000, China; corresponding author e-mail: gxu@hdu.edu.cn)

Abstract: Boundary projection and interior-node deformation in indirect high-order mesh generation may cause element inversion, which finite-point sampling can fail to detect over the entire reference domain. For tetrahedral, hexahedral, and prismatic meshes with boundary layers, this study incorporates oriented Jacobian lower bounds on layer-wise reference subdomains into a displacement correction strategy based on existing Bernstein criteria. Joint checks of elements incident to shared nodes account for the effects of local corrections on neighboring elements. A lower-bound transfer relation is established under a compatibility condition between parent and child mappings, and the subdivided elements are checked independently. The criterion provides a sufficient condition for inversion-free mappings in exact arithmetic; the double-precision implementation does not provide rigorous roundoff-error bounds. The corrected meshes satisfy the prescribed numerical criteria in five P2 engineering cases and in the P2–P4 meshes of the 2822 case. Parameter studies examine the effects of recursion depth, relative tolerance, and layer parameters. Comparisons of shape quality and geometric deviation show that inversion correction may increase boundary-fitting errors and reduce mean shape quality. These results demonstrate the feasibility of the method within the tested models and parameter ranges..

Key words: high-order mesh; boundary-layer mesh; hybrid mesh; element inversion; Bernstein polynomial

引言

高阶有限元、谱元和间断 Galerkin 方法通过曲边单元描述计算域边界，以减小几何离散误差。在高曲率边界和各向异性近壁区域，边界节点投影及其引起的内部节点变形可能导致单元映射退化或翻转。因此，高阶网格生成不仅需要改善边界逼近，还需要判断单元映射在整个参考域内是否保持初始取向。

由线性网格升阶的间接方法能够利用已有网格及其拓扑结构。对于含边界层的混合网格，分层细分进一步引入母子单元映射之间的关系，使翻转检测与修正需要同时考虑边界投影、内部变形和子单元构造。然而，有限点采样无法排除采样点之间的 Jacobian 零点或变号，并且母单元的定号性质能否

传递至细分后的子单元，取决于二者映射的相容性。本文围绕这两个问题，研究四面体、六面体和三棱柱高阶混合网格的翻转检测与修正。

1 相关工作

1.1 高阶曲边网格生成

高阶网格的间接生成包括几何升阶、边界投影和内部节点调整。早期研究中，Dey 等研究了二次单纯形曲边网格的生成[1]，Sherwin 与 Peiró分析了曲边网格变形及奇异映射问题[2]。为将边界位移传播至内部节点，Persson 与 Peraire 采用了拉格朗日弹性体模型[3]，Gmsh 则为 CAD 几何查询和高阶节点处理提供了相应支持[4]。

围绕任意阶曲边网格构造[5]，研究者提出了基于固体力学变形[6]、Winslow 方程[7]、正则化畸变度量[8]和变分优化[9]的节点调整方法。NekMesh 将 CAD 投影、网格变形与边界层等参细分相结合，形成了高阶网格生成框架[10]。近年来，相关研究还拓展至曲边单纯形的局部操作[11]以及极小曲面引导的曲面网格优化[12]。

在几何表示与精度控制方面，Schneider 等研究了基于等几何表示的高阶网格生成[13]；Ruiz-Gironés 等分别研究边界几何精度的度量与改善[14]及大规模并行曲边网格生成[15]。在单元修正方面，Rochery 与 Loseille 通过线性规划改善 Jacobian 下界，并将其用于二次四面体网格[16]。这些工作从几何逼近、节点变形和畸变控制等不同角度，为高阶曲边网格的构造提供了基础。

1.2 高阶单元翻转判定与修复

与节点位置优化相关的另一个问题是如何判定曲边单元的有效性。Johnen 等利用 Bernstein 表示的凸包性质，结合递归细分，在连续参考域上建立 Jacobian 界[17]；Toulorge 等通过优化方法修复无效曲边单元[18]。对于高阶边界层网格，Moxey 等研究了等参细分及母子单元定向性的传递条件[19]。上述研究表明，单元有效性判定、节点位移修正与边界层细分之间具有紧密联系。

1.3 本文主要工作

基于上述研究，本文关注边界层分层约束与共享节点位移修正之间的耦合关系：利用分层参考子域上的 Bernstein 下界约束候选位移，通过关联单元的联合检查协调局部修正，并分析母子单元映射相容时的下界传递条件。Bernstein 凸包界与递归细分沿用已有理论，本文的研究重点在于这些判据与混合网格修正过程的结合。数值实验进一步从单元取向、形状质量和边界几何偏差三个方面评价修正效果。

2 基本定义与问题描述

2.1 高阶几何映射与单元无翻转条件

定义 1（高阶几何映射）。设 $\Omega_V \subset \mathbb{R}^3$ 为单元 V 的标准参考域，其中四面体采用三维单纯形，六面体采用 $[0,1]^3$，三棱柱采用 $T_{\text{ref}} \times [0,1]$，其中 T_{ref} 表示标准三角形参考域。一个 p 阶曲单元 V 由参数映射

$$F_V\colon \Omega_V \to \mathbb{R}^3, \qquad F_V(\hat{\xi}) = \sum_a x_a N_a^{(p)}(\hat{\xi}) \tag{1}$$

给出，其中下标 a 遍历单元的全部 p 阶节点，$\{N_a^{(p)}\}$ 为 Ω_V 上的 p 阶 Lagrange 基，$\{x_a\}$ 为高阶节点的物理坐标。记其 Jacobian 矩阵为 $J_V(\xi) = \partial F_V / \partial \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3}$。

定义 2（单元无翻转条件）。设 F_V^0 为单元对应的初始直边几何映射，并假定 $\det J_V^0(\xi)$ 在 Ω_V 内非零且保持一致符号。记初始取向符号为 $s_V := \operatorname{sign}(\det J_V^0(\xi)) \in \{-1, +1\}$；由于符号在 Ω_V 内一致，该定义与 ξ 的选取无关。若曲边映射 F_V 满足

$$s_V \cdot \det J_V(\xi) > 0 \qquad \forall \xi \in \Omega_V. \tag{2}$$

则称该单元保持初始取向，即单元无翻转。

对仿射四面体，初始 Jacobian 行列式为常数，对于一般直边六面体和三棱柱，其 Jacobian 行列式可能随参考坐标变化，因此其初始取向也应在完整参考域内进行确认。

式（2）刻画的是连续参考域上的取向保持条件，仅在有限采样点处获得相同符号并不足以证明该条件成立。

2.2 定向 Jacobian 下界判据与细分算子

判据 1（有限深度 Bernstein 下界充分条件）。对定向 Jacobian 多项式 $g_V(\xi) := s_V \det J_V(\xi)$，给定阈值 $\tau \geq 0$ 和最大递归深度 D^*。在每个递归子域上，将 $g_V(\xi)$ 写成 Bernstein 形式；若深度不超过 D^* 的全部叶子子域中，最小 Bernstein 控制系数均大于 τ，则记

$$\mathcal{B}_{\tau,D^*}(V) = 1 \tag{3}$$

式（3）表示该单元满足有限深度下界判据。若达到最大递归深度后，仍存在最小控制系数不大于阈值的叶子子域，则记 $\mathcal{B}_{\tau,D^*}(V)=0$。此时，当前细分层次尚不足以由控制系数建立所需下界，不能仅据此断定定向 Jacobian 不大于阈值或单元已发生翻转。对网格 M，记

$$\mathcal{B}_{\tau,D^*}(M)=\bigwedge_{V\in M}\mathcal{B}_{\tau,D^*}(V). \tag{4}$$

其中，符号∧ 表示逻辑合取，即网格中的全部单元均满足下界判据时，式（4）的值为 1。该判据的充分性在第 4.2 节说明。

定义 3（边界层细分算子、参考子域与映射相容性）。设 $S(n,r)$ 为边界层细分算子，其中 $n\in\mathbb{N}$ 为正整数分层数，$r\geq 1$ 为增长比。对待细分母单元 V，算子 $S(n,r)$ 沿指定的分层参考方向将其参考域 Ω_V 划分为 n 个有序参考子域，记为 $\Omega_{V,k}$（$k=0,\dots,n-1$）；相邻子域的分界坐标定义为

$$s_k=\begin{cases}(r^k-1)/(r^n-1), & r>1,\\ k/n, & r=1,\end{cases}\qquad k=0,\dots,n. \tag{5}$$

式（5）确定首层参考厚度 $\Delta s_0=s_1-s_0$。当 $r>1$ 时，$\Delta s_0=\frac{r-1}{r^n-1}$；当 $r=1$ 时，$\Delta s_0=\frac{1}{n}$。若分层方向的物理距离与参考坐标成线性关系，则有 $h_{1,V}=H_V\Delta s_0$，其中 H_V 为相应位置的总厚度。对于一般高阶曲边映射，首层物理厚度还取决于局部几何变形，需要根据实际子单元计算。

式（5）确定分层方向上的区间 $[s_k,s_{k+1}]$，相应的参考子域 $\Omega_{V,k}$ 则依据单元的参考域结构构造。设 $A_k:\Omega_{V_k}\to\Omega_{V,k}$ 为标准子单元参考域到第 k 个母单元参考子域的保向仿射映射，并令 $\delta_k:=\det(DA_k)>0$。母单元映射经 A_k 拉回所得的限制映射记为 $F_{V,k}^{\mathrm{res}}:=F_V\circ A_k$，而根据细分后的节点排列与插值规则构造的子单元映射记为 $F_{V,k}^{\mathrm{prod}}$。二者满足下述关系时，称其映射相容

$$F_{V,k}^{\mathrm{res}}:=F_V\circ A_k,\quad F_{V,k}^{\mathrm{prod}}=F_{V,k}^{\mathrm{res}}. \tag{6}$$

式（6）要求实际子单元映射与母单元限制映射一致。节点次序、局部面取向或高阶插值规则不一致，都可能使这一关系不再成立。

在映射相容的前提下，母单元参考子域上的定向 Jacobian 下界能够传递至子单元。为检验实际细分结果是否满足相应条件，本文还对子单元进行独立判定。

3 方法概述

3.1 边界投影与候选位移

以目标曲面的三角网格表示为基础，采用轴对齐包围盒（AABB）树加速最近点查询。对边界高阶节点 x_i^0，在目标三角片集合 $\{T_j\}$ 上联合确定最近三角片索引 j_i^* 及投影点 x_i^{tar}，并由此得到候选位移 Δ_i。若最近点不唯一，则按三角片索引及重心坐标的字典序确定唯一结果，即

$$\begin{aligned}(j_i^*,x_i^{\mathrm{tar}})&=\arg\min_{j,x\in T_j}\|x-x_i^0\|_2,\\ \Delta_i&=x_i^{\mathrm{tar}}-x_i^0.\end{aligned} \tag{7}$$

边界投影能够减小节点到目标曲面的距离，但并不直接保证相邻体单元的取向。因此，式（7）所得位移还需在后续下界约束下调整。

3.2 总体流程

图 1 给出了本文方法的总体流程。首先计算边界节点的候选位移，并采用边界元法（boundary element method，BEM）传播至内部节点；随后在分层参考子域上建立定向 Jacobian 下界约束，通过位移阻尼调整不满足判据的母单元。由于共享节点的移动会同时影响多个单元，还需联合检查其关联单元，并进一步修正位移。最后完成边界层细分，对实际生成的子单元独立检验，以评价修正后网格的单元取向。

4 基于 Bernstein 表示的定向 Jacobian 下界判据

4.1 Jacobian 行列式的 Bernstein 表示

由式（1），统一以 $\xi\in\Omega_V$ 表示母单元参考坐标。记单元的初始取向为 $s_V\in\{-1,+1\}$，并将几何映射与定向 Jacobian 多项式写为

$$\begin{aligned}F_V(\xi)&=\sum_a\ x_a N_a^{(p)}(\xi),\\ g_V(\xi)&=s_V\det\left(\frac{\partial F_V}{\partial\xi}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

其中，s_V由初始直边单元的 Jacobian 符号确定。对于高阶几何映射，首先将各坐标分量由 Lagrange 表示转换为相应参考域上的 Bernstein 表示，再利用 Bernstein 多项式的求导和乘积关系构造 Jacobian 行列式的 Bernstein 系数。

三类单元分别采用与参考域相适应的 Bernstein 表示：六面体采用三维张量积形式，三棱柱采用三角形单纯形基与一维基的张量积形式，四面体采用

三维单纯形形式。上述基函数转换可通过代数运算完成，无需数值拟合；其浮点实现仍存在舍入误差。

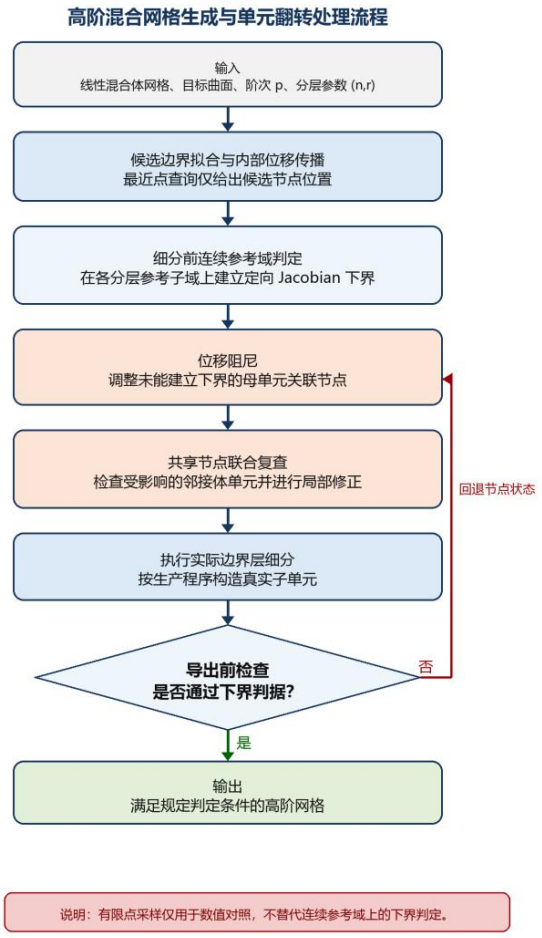


图 1 单元翻转判定与修正流程

4.2 基于凸包性质的定向 Jacobian 下界判据

命题 1（Bernstein 凸包界）。设 $g_V(\xi)$ 在 Ω_V 上的 Bernstein 控制系数为 $\{c_\nu\}$，其中 ν 为相应的多重指标。若全部控制系数满足式（9），则 $g_V(\xi)$ 在该参考域内严格大于给定阈值 τ，

$$\min_{\nu} c_\nu > \tau \Rightarrow g_V(\xi) > \tau, \quad \forall\, \xi \in \Omega_V \tag{9}$$

命题 1 的证明见附录 A。

当前控制系数不能直接给出正下界时，采用 de Casteljau 算法细化参考域：六面体沿三个参考方向细分，三棱柱细分三角形底面并保留挤出方向结构，四面体在三维单纯形上细分。达到深度上限后仍不满足判据的单元，进一步增加判定深度或调整节点位移。

命题 2（有限深度 Bernstein 下界判据的充分性）。若递归细分得到的叶子子域完整覆盖原参考域，且每个叶子子域均满足命题 1 的控制系数下界条件，则定向 Jacobian 在整个参考域内严格大于给定阈值τ。

命题 2 的证明见附录 A。

4.3 四面体、六面体与三棱柱的行列式表示

一维 Bernstein 乘积恒等式为

$$B_i^m(t)B_j^n(t) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}(t), \tag{10}$$

其中，$m,n \in \mathbb{N}$ 为两个一维 Bernstein 多项式的次数，$0 \le i \le m$、$0 \le j \le n$ 为相应的基函数索引；此处的 n 与式（5）中的分层数无关。利用式（10）的张量积形式及其在单纯形上的推广，可由几何映射的 Bernstein 系数组装 Jacobian 行列式系数。不同体单元由于参考域结构不同，其 Jacobian 行列式对应的 Bernstein 多项式次数也有所不同。

引理 1（体单元 Jacobian 行列式的 Bernstein 表示与次数）。设 p 为高阶几何映射的几何阶次，其坐标分量分别采用以下 Bernstein 表示：

- 六面体：三个参考坐标方向上的次数均为 p 的三维张量积多项式；
- 三棱柱：三角形参考底面上的总次数为 p，挤出方向次数为 p；
- 四面体：三维单纯形上的总次数为 p。

则 Jacobian 行列式 $\det J_V$ 仍可在相应参考域上表示为 Bernstein 多项式，并满足：

（1）对于六面体，$\det J_V$ 在每个参考坐标方向上的次数至多为 $3p-1$；

（2）对于三棱柱，$\det J_V$ 在三角形参考底面上的总次数至多为 $3p-2$，在挤出方向上的次数至多为 $3p-1$；

（3）对于四面体，$\det J_V$ 的总次数至多为 $3p-3$。

上述 Jacobian 行列式的 Bernstein 系数可通过几何基函数转换、求导、乘积及必要的升次运算直接构造，而无需依赖数值求积或有限点采样。

引理 1 的证明见附录 A。

5 考虑边界层细分的单元翻转判定与修正

5.1 细分算子与映射相容性

边界层细分改变了参考域的划分方式，因而需要将各层对应的子域纳入位移修正约束。本文依据定义 3 构造这些参考子域，并在实际细分前判定其

定向 Jacobian 下界。第 5.3 节进一步讨论该下界传递至子单元所需的映射相容条件。

5.2 分层参考子域上的定向 Jacobian 下界判定

沿分层方向对母单元的 Bernstein 表示进行 de Casteljau 切分，得到各分层参考子域上的系数。随后依据初始取向构造定向 Jacobian，并在每个子域上应用第 4 节的下界判据。具体过程见算法 1。

算法 1　分层参考子域上的定向 Jacobian 下界判定

输入：母单元 Jacobian 行列式的 Bernstein 系数、第 k 个细分层的参考区间、初始取向符号、阈值与最大递归深度。

Step1：沿分层方向的参考坐标执行两次 de Casteljau 切分，得到 Jacobian 行列式在第 k 个细分层所对应参考子域上的 Bernstein 系数。

Step2：按初始直边单元的 Jacobian 符号构造定向 Jacobian，使初始取向统一对应正值。

Step3：若当前子域的最小 Bernstein 控制系数大于阈值，则该子域通过下界判定。

Step4：否则继续递归细分。若达到最大递归深度后仍有叶子子域不满足控制系数下界条件，则判定该单元未通过有限深度判据。

5.3 母单元定向条件向子单元的传递

对待细分母单元 V，记其定向 Jacobian 的 Bernstein 系数阵列为 C_V。记 ζ 为选定分层方向的参考坐标，第 k 个参考子域上的系数阵列由限制算子获得：

$$C_V{}^{(k)} = \mathcal{R}_{\zeta,[s_k,s_{k+1}]}(C_V). \tag{11}$$

式（11）中的限制算子 $\mathcal{R}_{\zeta,[s_k,s_{k+1}]}$ 由与 $\Omega_{V,k}$ 相匹配的 de Casteljau 细分实现。它仅改变 Bernstein 表示所对应的参数子域，不改变母单元的物理几何映射。

在各分层参考子域建立正下界后，可利用式（6）的映射相容关系推导实际子单元的下界。

定理 1（母单元定向下界向子单元的传递）。设式（6）成立，且 A_k 为保向仿射映射，$\delta_k := det(DA_k) > 0$。若在第 k 个参考子域内有 $s_V \det J_V(\xi) > \tau \geq 0$，则对全部子单元参考坐标 η 有 $s_V \det J_{V,k}{}^{\mathrm{prod}}(\eta) > \delta_k \tau \geq 0$。若要求子单元达到绝对下界 $\tau_{\mathrm{out}} \geq 0$，则母单元相应参考子域的阈值可取 $\frac{\tau_{\mathrm{out}}}{\delta_k}$。

定理 1 的证明见附录 A。该结论给出了绝对下界在母子单元之间的尺度关系；数值实验采用的逐单元相对阈值见第 7.1 节。

上述传递关系依赖三个条件：母单元参考子域由 A_k 完整覆盖，A_k 保持参考取向，以及实际子单元映射满足式（6）。因此，可统一写为 $\Omega_{V,k} = A_k(\Omega_{V_k})$，并由附录式（A1）—（A4）建立定向 Jacobian 下界的传递关系。

上述传递关系对三类单元均适用，但其 Bernstein 表示、限制算子及递归细分方式需分别与参考域结构一致。在数值实现中，通过核对参考子域覆盖、映射非退化性和高阶节点对应关系，检验母子单元构造的一致性，并对实际子单元独立进行下界判定。这些数值检验用于评价实现结果，理论上的下界传递仍以式（6）严格成立为前提。

5.4 定向 Jacobian 下界判据引导的位移阻尼

为协调边界拟合与单元取向保持之间的关系，对候选节点位移引入缩放系数，在保留移动方向的同时限制位移幅度，

$$x_i(\alpha_i) = x_i^0 + \alpha_i \Delta_i, \qquad 0 \leq \alpha_i \leq 1. \tag{12}$$

其中，α_i=1 表示采用完整候选位移，α_i=0 表示保持初始位置。首先检查这两种状态，再根据下界余量插值搜索满足判据的统一缩放系数，必要时采用二分搜索。在此基础上，逐节点增大位移，并在位移范围与线性化下界约束下计算局部修正。由于线性化约束只是原判据的近似，每次调整后均重新计算下界判据，只有满足判据的位移才被保留。各母单元的位移合并后，还需检查共享节点的全部关联单元。该策略用于寻找可行位移，不保证得到最大可行缩放系数。

算法 2　分层参考子域约束下的母单元位移阻尼

输入：候选边界节点位移、待细分边界层体单元、细分参数与阈值。

Step1：对每个待细分边界层体单元，判断其全部分层参考子域的定向 Jacobian 下界。

Step2：若各子域均满足判据，则保留候选位移；否则以已满足判据的零位移状态为起点，搜索可行的统一缩放系数。

Step3：逐节点增大位移并计算局部线性化修正，每次调整后重新检验下界条件；合并母单元位移后，对共享节点的关联单元进行联合检查。

6 共享节点修正与细分后检验

6.1 共享节点关联单元的联合检查

共享节点的移动会同时改变多个边界层母单元及其他体单元的映射。因此，各母单元分别满足下

界判据，并不意味着合并位移后的网格仍满足该判据。为处理这一耦合关系，本文从未满足判据的单元出发，利用节点与单元的邻接关系确定待调整节点及受影响单元，先统一缩小位移，再按固定节点编号逐点恢复。每次恢复后，均检查该节点关联的全部单元及相应分层参考子域。

若分层后的局部位移回退仍不能使子单元满足判据，则进一步对原始角点及其他待调整节点的非零位移进行联合缩减，并重新检验实际子单元。最终网格需在全部受支持单元均满足判据后确定。

算法 3　共享节点联合修正与细分后检验

输入：待细分母单元位移阻尼后的节点位移、体网格邻接关系、细分参数与阈值。

Step1：检查普通体单元和待细分边界层体单元，确定有限深度下界判据未通过的单元集合。

Step2：沿共享节点关系扩展受影响的节点与单元集合，并统一缩小待调整节点的位移。

Step3：按固定节点编号顺序逐点恢复候选位移；每次恢复后复查该节点关联的全部体单元。

Step4：完成边界层细分并检验实际子单元。若仍有单元未满足判据，则回退节点位移并重复检验；回退后仍不满足条件时，不接受该网格作为最终结果。

Step5：当三类受支持单元均满足所设定的 Bernstein 下界条件时，接受最终网格。其他单元类型采用各自对应的检查方法。

6.2 判据结论与适用范围

有限深度 Bernstein 下界判据给出的是取向保持的充分条件，其不成立并不等价于单元翻转。理论证明采用精确算术，而本文的双精度实现尚未建立严格的舍入误差界。因此，以下数值实验中的判定结果应理解为给定精度与阈值下的计算结果。

为区分不同判定结果，本文将单元状态分为三类：“通过”表示已建立所要求的正下界；“无效”表示检出定向 Jacobian 负值或负的子域上界；“未决”表示在给定递归深度或子域访问次数内尚无法确定。后文的“未通过数”为无效单元数与未决单元数之和。最终网格要求全部单元通过相应检查，但这一要求不意味着任意输入均可修复，也不意味着修正过程中的每个中间状态均有效。此外，Jacobian 定号是局部取向条件，本身不足以保证映射的全局单射性。

本文的理论分析针对四面体、六面体和三棱柱。M6 与 F6 算例还包含金字塔单元，其有效性检查和质量统计方法在第 7.7 节另行说明，相关数值统计不属于上述三类单元理论结论的直接推广。

7 数值实验

7.1 实验设置

实验采用 M6、DLR‑F6（简称 F6）、2822、30P 和 Propeller 五组混合网格。P2 测试涵盖全部算例，P3 和 P4 测试以 2822 为对象，各阶次采用相同的线性输入与拓扑细分方式。M6 和 F6 的待细分边界层以三棱柱为主，2822 含 327 个待细分六面体。网格规模与分层参数见表 1 和表 2。图 2 展示了五组算例的输入表面网格，图 3 通过角点连线给出 2822 中截面及前缘区域的分层结构。

最终单元检查中，记单元根参考域上定向 Jacobian 的 Bernstein 系数为 $c_{V,\nu}$，并以 $\kappa_V = \max_\nu |c_{V,\nu}|$ 为尺度，取阈值 $\tau_V = \max\{\tau_{\mathrm{abs}}, \tau_{\mathrm{rel}}\kappa_V\}$。本文采用 $\tau_{\mathrm{abs}} = 0$、$\tau_{\mathrm{rel}} = 10^{-10}$，且在一次递归检查中阈值保持不变。对于分层参考子域和实际子单元，分别根据各自的 Bernstein 表示计算局部尺度。基础最大递归深度设为 $D^* = 5$，对未满足判据的单元，进一步采用深度 8 和 10 进行判定。分层参数决定参考域中的层厚分布，实际首层物理尺度则按第 7.9 节的方法测量。

为评价单元形状，采用经理想单元归一化的 Jacobian 矩阵。记 W_V 为取向与初始单元一致的理想单元 Jacobian 矩阵，并定义 $S_V(\xi) = J_V(\xi) {W_V}^{-1}$。此时，$\det S_V > 0$ 与 $s_V \det J_V > 0$ 等价，从而能够以一致的取向约定评价不同类型的单元，避免直接要求原始 Jacobian 行列式为正所产生的歧义。当行列式为正时，定义形状畸变函数为

$$\mu_V(\xi) = \frac{\|S_V(\xi)\|_F{}^2}{3(\det S_V(\xi))^{2/3}} \tag{13}$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。若任一求积点处的 $\det S_V$ 不大于零，则令 $Q_V = 0$；否则采用数值求积，并按参考域体积归一化，得到单元质量

$$Q_V = \left(\frac{1}{|\Omega_V|}\sum_{q=1}^{N_q} w_q \mu_V{}^2(\xi_q)\right)^{-1/2} \tag{14}$$

其中，w_q 为映射至参考域后的求积权重，$|\Omega_V|$ 对四面体、六面体和三棱柱分别为 1/6、1 和 1/2。Gauss‑Legendre 求积的每方向点数设置如下：M6、F6 和 2822 的 P2 算例取 4，30P 与 Propeller 取 20，2822 的 P3 与 P4 分别取 5 和 6。不同求积配置的采样统计分别列出，不视为相同求积精度下的直接比较。表 1 中的 $Q_{\min} = \min_{V\in M} Q_V$ 为输出网格的最小

单元质量。该离散质量指标与连续参考域上的下界判据具有不同用途。

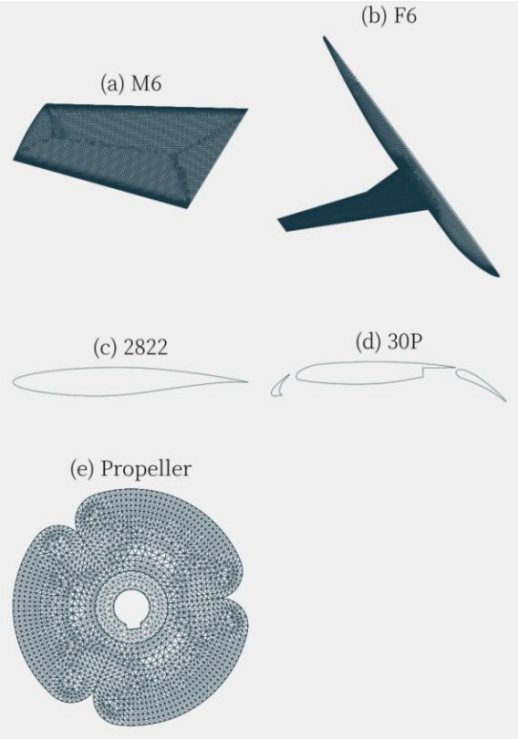


图 2 五组算例的输入表面网格（2822、30P 为 x–z 侧视，其余为主成分投影）

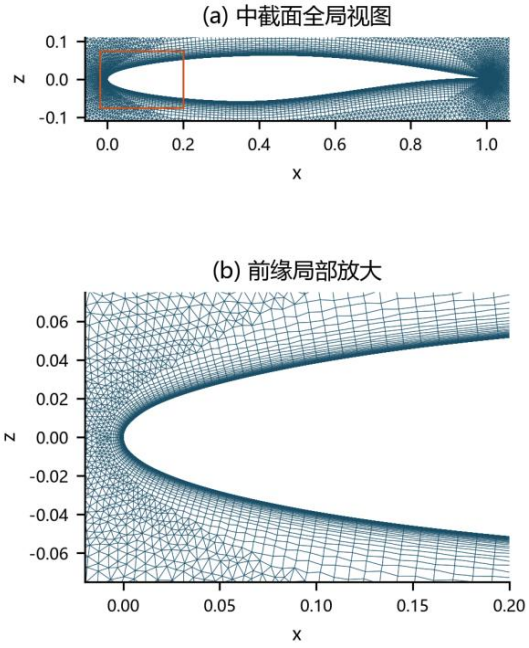


图 3 2822 中截面的边界层网格及前缘放大图

7.2 网格质量与单元翻转检查

首先考察修正后网格的形状质量与单元取向。表 1 汇总了五组 P2 网格的质量统计，图 5 给出了相应分布；分层参考子域初检及共享节点关联检查的结果见图 6

。

表 1 五个 P2 网格的质量与单元翻转采样结果

算例	(n, r)	输出体单元	$Q_{\min}$	平均质量	采样翻转数
M6	(20,1.30)	1,122,839	2.17463×10^{-5}	0.294995	0
F6	(13,1.20)	1,301,309	5.53110×10^{-5}	0.349319	0
2822	(20,1.20)	72,820	3.19621×10^{-7}	0.173235	0
30P	(20,1.30)	14,997	3.06914×10^{-6}	0.110482	0
Propeller	(29,1.20)	362,741	9.79070×10^{-5}	0.180283	0

为考察位移修正的作用，图 4 比较了相同输入和参数下省略位移修正与采用完整方法的结果。前者仍保留边界拟合、实际细分及独立判定，作为消融对照；后者在五组算例中的最终未通过单元数均为零。

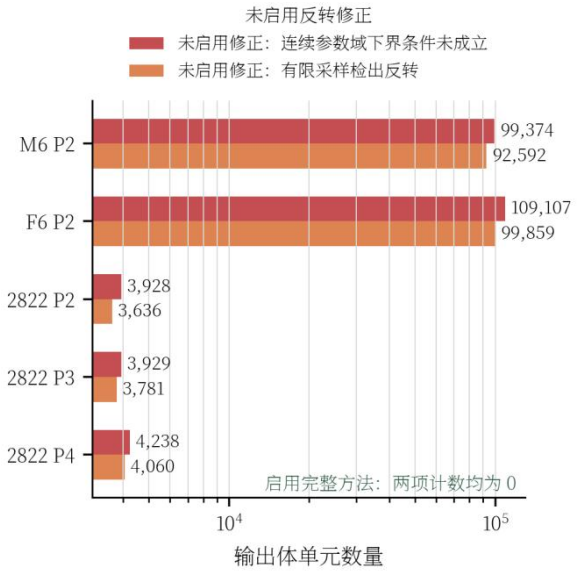


图 4 相同输入与参数下的单元取向检查结果对照

五组网格在所用高斯积分点处均未检出翻转，平均形状质量介于 0.110 与 0.349 之间。图 5 进一步展示了不同质量区间内的单元比例。需要区分的是，形状质量用于描述单元畸变程度，定向 Jacobian 下界则用于判定连续参考域内的取向。因此，采样翻转数为零只能作为补充观测，不能单独证明整个参考域无翻转。

7.3 定向 Jacobian 下界判定与修正统计

图 6 展示了母单元初检及共享节点关联检查的结果，表 2 汇总了初检、位移调整、关联检查和最终判定各阶段的统计。由于各列分别对应母单元、节点或关联单元，统计时采用各自的对象总数作为基数。判据未通过的状态沿用第 6.2 节定义，并与采样检出的翻转分别统计。

采用完整候选边界位移时，M6、F6 和 2822 分别有 27.2%、41.4%和 70.0%的待细分母单元未满足下界判据。母单元位移调整后，关联单元检查仍发现未通过项，说明局部修正对共享节点的影响需要在相邻单元间协调。经进一步修正，三组算例的最终未通过数均降至为零。为检验 Bernstein 系数构造

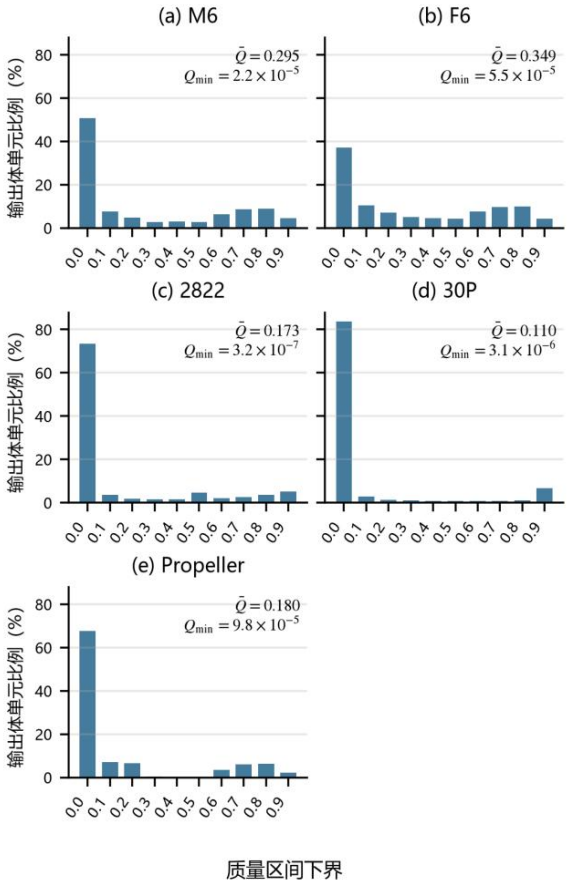


图 5 五个 P2 输出网格的单元质量分布

与直接 Jacobian 计算的一致性，比较了两者在抽查点处的数值，最大相对差异分别为 5.48×10^{-14}、2.98×10^{-12}和 1.41×10^{-12}；这一比较仅反映所选点处的数值一致性。

为衡量修正的影响范围，以阻尼系数小于 1 的不同节点数占细分前该阶段网格总节点数的比例作为阻尼节点比例。M6、F6 和 2822 在母单元修正阶段的比例分别为 0.832%、1.142%和 0.816%；完成关联单元修正后，累计比例分别为 1.755%、3.226%和 22.404%，对应阻尼系数中位数为 0.525、0.576 和 0.0926。累计节点数按节点编号去重。30P 在初检时已全部满足判据，Propeller 则在修正后满足最终判定条件。

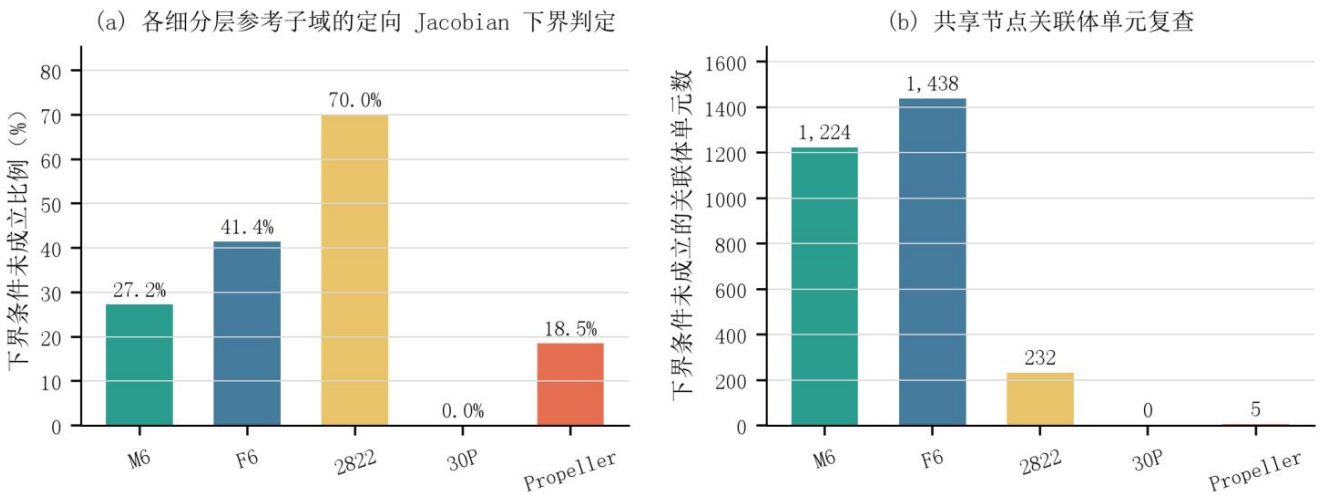


图 6 分层参考子域初检与共享节点关联复查结果

表 2 五个二次曲边网格算例的定向 Jacobian 下界判定与修正统计

算例	待细分母单元数	初检未建立下界数	阻尼节点数	联合复查未建立下界数	最终未建立下界数
M6	21,906	5,967	18,409	1,224	0
F6	27,629	11,450	36,386	1,438	0
2822	327	229	3,638	232	0
30P	333	0	0	0	0
Propeller	8,473	1,566	4,841	5	0

7.4 最终边界离散的几何偏差

为评价边界逼近，统计最终网格中不同壁面节点到目标三角网格的最近距离 d，并以最近目标三角片的三条边平均长度作为局部尺度 h。d_{95}、d_{RMS} 和 $d_{\max}$ 分别表示距离的 95%分位数、均方根和最大值；对逐节点比值 $\frac{d}{h}$ 采用相同统计量。图 7 展示归一化结果，表 3 列出原始距离及归一化距离。由于模型尺度不同，原始距离仅用于评价各算例自身的几何偏差。

M6 与 F6 的最大归一化距离分别为 4.36829 和 3.32750，表明修正后仍存在局部较大的边界偏差。30P 的目标离散表示与边界表示一致，所得距离接近舍入误差量级，因而不宜据此与其他模型进行精度排序。此外，节点距离仅反映离散位置的拟合误差，并非连续边界误差的严格上界。

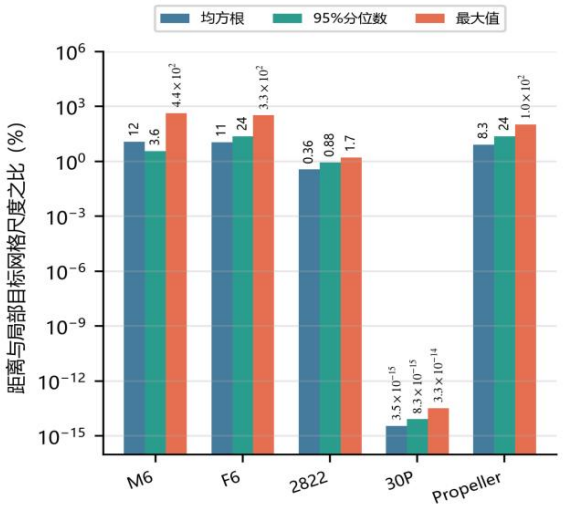


图 7 最终壁面节点的归一化距离统计

表 3 最终壁面节点到目标离散曲面的距离统计

算例	d_{95}	d_{RMS}	$d_{\max}$	$(\frac{d}{h})_{95}$	$(\frac{d}{h})_{\mathrm{RMS}}$	$(\frac{d}{h})_{\max}$
M6	0.05712	0.06698	1.77880	0.03620	0.11532	4.36829
F6	0.12145	0.05968	1.91649	0.23685	0.10990	3.32750
2822	0.002994	0.001232	0.005734	0.008761	0.003613	0.016684

算例	d_{95}	d_{RMS}	$d_{\max}$	$(\frac{d}{h})_{95}$	$(\frac{d}{h})_{\mathrm{RMS}}$	$(\frac{d}{h})_{\max}$
30P	2.78×10^{-17}	1.18×10^{-17}	1.11×10^{-16}	8.33×10^{-17}	3.55×10^{-17}	3.33×10^{-16}
Propeller	0.31461	0.10838	1.06210	0.23751	0.08342	1.00796

7.5 网格质量与边界几何偏差的权衡

为分析取向保持与网格质量之间的关系，表 4 比较了 2822 在相同输入、分层参数及求积配置下的修正前后结果。修正后，判据未通过数与采样翻转数均降至零，但平均形状质量略有下降，边界拟合偏差有所增大。这表明，在该算例中，满足取向约束需要牺牲部分几何逼近精度，且并不必然改善平均形状质量。因此，单元取向、形状畸变和几何误差应作为相互关联而又不同的评价指标。

表 4 2822 算例修正前后的质量与归一化边界距离

模式	未通过数	最小质量	平均质量	95%分位数	均方根	最大值
关闭修正	3928	0	0.173337	2.07838×10^{-17}	1.60511×10^{-17}	3.32925×10^{-16}
完整流程	0	3.19621×10^{-7}	0.173235	8.76065×10^{-03}	3.61348×10^{-03}	1.66843×10^{-02}

注：后三列为逐节点归一化距离 d/h 的统计量，未通过数采用最终连续域数值检查结果。两组均采用 20 层、增长比 1.20 及每方向 4 个求积点。关闭修正的网格结果仅用于诊断。

7.6 不同几何阶次下的修正结果

为考察几何阶次的影响，在 2822 算例中固定层数为 20、增长比为 1.20，比较 P2—P4 网格采用完整方法与省略修正时的结果。表 5 中的诊断性对照关闭母单元阻尼、关联单元修正及最终位移回退，仅保留边界拟合、细分与独立判定，以观察这些修正步骤的共同作用。

表 5 显示，三个阶次的网格经完整修正后均满足最终判据，而对照结果仍含无效单元。这说明修正策略在该算例所测试的阶次范围内具有作用，但不足以据此推断阶次收敛性或任意高阶网格上的一般表现。

7.7 递归深度与相对容差的影响

为进一步分析参数影响并开展方法对照，第 7.7—7.10 节采用统一的补充实验设置：关闭曲率自适应和输入预细化，采用 P2 几何与 8 个 CPU 线程；最终质量计算的每方向求积点数为 6，BEM 位移计算取 4。由于所用程序版本及求积配置与表 1—表 5 不同，以下结果单独讨论。M6 与 F6 分别还包含 2,980 和 7,164 个金字塔单元，其有效性另行检查；形状质量以角点划分所得两个线性四面体中的较小值近似，该指标不表征完整高阶金字塔映射的质量。

表 5 2822 算例不同几何阶次下的单元翻转判定结果

阶次	模式	最终未建立下界数	采样翻转数	$Q_{\min}$
P2	诊断性对照	3,928	3,636	0
P2	完整流程	0	0	3.196×10^{-7}
P3	诊断性对照	3,929	3,781	0
P3	完整流程	0	0	7.707×10^{-7}
P4	诊断性对照	4,238	4,060	0
P4	完整流程	0	0	6.759×10^{-7}

首先固定 2822 和 M6 修正前后的节点坐标与连接关系，仅改变判定参数，以区分判据本身的影响与网格修正的影响。递归深度取 0、2、4、5、6 和 8，相对容差取 10^{-12}、10^{-10}和 10^{-8}，每种配置重复 3 次。判定过程中不再追加深度，每个单元最多访问 20,000 个递归子域。表 6 列出相对容差为 10^{-10}时的判定结果及三次计时中位数，时间统计仅包含复用缓存后的判定计算。

表 6 固定网格的递归判定结果与三次计时中位数

算例	深度	修正前通过数	修正前无效数	修正前未决数	修正前时间/s	修正后通过数	修正后未决数	修正后时间/s
2822	0	68806	2633	1381	0.133	61666	11154	0.139
2822	2	68891	3081	848	0.143	66626	6194	0.156
2822	4	68892	3704	224	0.195	70947	1873	0.174
2822	5	68892	3826	102	0.221	72820	0	0.174
2822	6	68892	3882	46	0.324	72820	0	0.186
2822	8	68892	3917	11	0.255	72820	0	0.181
M6	0	989732	2465	130642	1.129	1013549	109290	1.136
M6	2	1023335	99344	160	1.224	1111882	10957	1.226
M6	4	1023448	99352	39	1.196	1119301	3538	1.234
M6	5	1023457	99358	24	1.215	1122839	0	1.245
M6	6	1023463	99366	10	1.194	1122839	0	1.245
M6	8	1023465	99374	0	1.195	1122839	0	1.239

2822 测试算算例网格含 72,820 个体单元。相对容差为 10^{-12}和 10^{-10}时，修正后网格在递归深度 5 已全部通过。容差增至 10^{-8}后，深度 5 仍有 7 个未决单元，深度 6 和 8 均有 4 个。M6 测试算例网格包含 1,122,839 个体单元，在默认容差下，修正后网格同样于深度 5 全部通过；修正前网格在深度 8 检出 99,374 个无效单元，且无未决项。当容差取 10^{-8}时，M6 修正后网格在深度 5 和 8 分别保留 8 个和 1 个未决单元。由于节点位置未发生变化，这些未决项反映的是更严格阈值下的判定差异，不能解释为新增翻转。总体上，加深递归有助于减少未决项，而提前终止与缓存复用会使计时不呈现严格单调关系。

表 6 中通过数、无效数和未决数之和等于网格总单元数。修正后网格的无效数均为零，故表中仅列出通过数与未决数。

随后在 M6 和 30P 上考察判定参数对修正过程的影响，固定层数为 20、增长比为 1.30。每次均从相同的未修正 BEM 位移出发，重新进行位移调整、实际细分和和最终检查。母单元与关联单元修正的最大递归深度分别取 6/5、3/3、5/5、7/7，其中 6/5 配置另测相对容差 10^{-12}与 10^{-8}。使不同修正结果具有共同的评价标准，最终判定统一采用基础深度 8，必要时加深至 11 和 13，相对容差固定为 10^{-10}。表 7 的耗时包括初始位移状态读取、修正、细分、检查与结果写出，不包含首次 BEM 位移求解。

表 7 M6 与 30P 修正流程参数测试结果

算例	修正深度	相对容差	时间中位数/s	最小质量	平均质量	壁面距离 P95(d/h)/%
M6	6/5	1×10^{-10}	119.593	1.9211×10^{-5}	0.295007	3.615
M6	3/3	1×10^{-10}	117.422	2.2951×10^{-5}	0.295010	3.627
M6	5/5	1×10^{-10}	119.393	1.5667×10^{-5}	0.295006	3.618
M6	7/7	1×10^{-10}	118.407	1.5987×10^{-5}	0.295006	3.601
M6	6/5	1×10^{-12}	118.930	1.9211×10^{-5}	0.295007	3.615
M6	6/5	1×10^{-8}	122.229	1.9211×10^{-5}	0.295007	3.615
30P	6/5	1×10^{-10}	2.329	3.0142×10^{-6}	0.110482	8.325×10^{-15}
30P	3/3	1×10^{-10}	2.374	3.0142×10^{-6}	0.110482	8.325×10^{-15}
30P	5/5	1×10^{-10}	2.340	3.0142×10^{-6}	0.110482	8.325×10^{-15}
30P	7/7	1×10^{-10}	2.342	3.0142×10^{-6}	0.110482	8.325×10^{-15}
30P	6/5	1×10^{-12}	2.407	3.0142×10^{-6}	0.110482	8.325×10^{-15}
30P	6/5	1×10^{-8}	2.349	3.0142×10^{-6}	0.110482	8.325×10^{-15}

注：每组重复 3 次，共 36 次，所得结果均通过相同最终检查；同一配置重复计算的节点坐标与连接关系一致。质量按式（14）计算，壁面距离沿用第 7.4 节的定义。

表 7 中，M6 的最小质量未随递归深度单调变化，说明下界判定会通过影响位移调整过程改变最终网格。三种容差配置的质量指标在表列精度下相同，但相对于 10^{-10}配置，另两组的最大节点坐标距离差分别为 0.043061 和 0.038366（输入坐标单位），连接关系保持不变。因此，质量统计接近并不意味着容差对节点位置没有影响。相比之下，30P 的六组结果具有相同的坐标与连接关系，在所测范围内未表现出参数敏感性。

7.8 相同边界位移下的内部变形方法对比

为比较不同内部位移传播方法，表 8 在 2822 与 M6 上考察 BEM、线性弹性和 Neo-Hookean 方法，实验设置与第 7.7 节一致。三种方法采用同一组取自未修正 BEM 状态的边界位移，固定原边界节点以及带边界条件或曲面标签的母单元面的全部节点，内部初始位移设为零。比较时均不施加额外的有效性修正，但保留独立判定与 Neo-Hookean 方法自身的线搜索，所得边界节点编号及坐标逐项一致。表中另列 BEM 完整修正结果作为参考；由于该结果允许调整边界位移，其边界约束与前三组并不相同。

线性弹性与 Neo-Hookean 方法均在角点构成的四面体子网格上离散，并将求得的位移插值至内部高阶节点。2822 不含自由角点，因此该算例中的两种方法仅涉及位移插值；M6 包含 262,254 个自由角点，可用于考察力学求解的作用。因此，关于力学求解性能的比较以 M6 及本文采用的角点离散与插值方式为限。

Neo-Hookean 方法通过逐步施加边界位移与线搜索求解平衡状态。残差以参考切线对角元和局部参考高度之积归一化，Newton 位移修正以相同高度归一化；当二者的无穷范数均不大于 10^{-8}，且内部形变梯度行列式大于 10^{-6}时，认为当前步达到平衡。局部参考高度定义为关联子四面体形函数梯度范数倒数的最小值。完整施加边界位移后，进一步对各向异性权重采用延续策略并重新求解平衡，最终平衡状态下不再更新权重。

表 8 相同边界位移的内部位移传播对照及完整修正参考

算例	方法	采样无效单元数	最小质量	平均质量
2822	BEM 关闭修正	3789	0	0.173337
2822	角点线性弹性	3805	0	0.173336
2822	角点 Neo-Hookean	3805	0	0.173336
2822	BEM 完整流程	0	3.6447×10^{-7}	0.173212
M6	BEM 关闭修正	95910	0	0.294923
M6	角点线性弹性	94822	0	0.294965
M6	角点 Neo-Hookean	94855	0	0.294964
M6	BEM 完整流程	0	1.9211×10^{-5}	0.295007

在 M6 算例中，两种力学方法均满足所设定的收敛准则。Neo-Hookean 方法的最终归一化残差与相对 Newton 修正分别为 2.1528×10^{-9}和 2.3289×10^{-9}，但所得高阶网格仍包含 94,855 个采样无效单元。该结果表明，角点离散上的力学平衡收敛并不足以保证插值后高阶单元的有效性。

可以看出已有方法并不能保证生成所有单元雅可比值均为正的高阶网格，本文方法可以检测并修正翻转单元，使得最后生成的高阶网格能用于后续高阶求解器。

7.9 边界层层数与增长比的影响

为分析分层参数对网格质量与首层尺度的影响，在 2822 和 M6 中分别组合层数 10、20、30 与增长比 1.10、1.20、1.30，共考察 18 组配置，每组计算一次，其余设置与第 7.7 节一致。同一算例均采用相同母网格及未修正位移作为起点。首层尺度以壁面角点至第一层对侧角点的弦长及其在面片法向上的投影表征。该测度不同于曲边弧长，也不等同于面内最小法向厚度。2822 与 M6 分别匹配 327 和 21,906 个壁面单元。

表 9 分层参数与首层实际尺度

算例	层数	增长比	最终检查	最小质量	首层弦长中位数	法向投影中位数
2822	10	1.10	通过	2.2033×10^{-6}	2.6570×10^{-5}	2.5639×10^{-5}
2822	10	1.20	通过	1.5019×10^{-6}	1.6269×10^{-5}	1.5699×10^{-5}
2822	10	1.30	通过	1.0350×10^{-6}	9.8869×10^{-6}	9.5537×10^{-6}
2822	20	1.10	通过	8.3448×10^{-7}	7.3504×10^{-6}	7.1067×10^{-6}
2822	20	1.20	通过	3.6447×10^{-7}	2.2510×10^{-6}	2.1788×10^{-6}
2822	20	1.30	通过	1.5973×10^{-7}	6.6647×10^{-7}	6.4535×10^{-7}
2822	30	1.10	通过	3.9758×10^{-7}	2.5550×10^{-6}	2.4729×10^{-6}
2822	30	1.20	通过	1.0474×10^{-7}	3.5531×10^{-7}	3.4408×10^{-7}
2822	30	1.30	通过	2.7537×10^{-8}	4.8097×10^{-8}	4.6580×10^{-8}
M6	10	1.10	通过	3.9988×10^{-4}	9.4105×10^{-3}	3.7535×10^{-3}
M6	10	1.20	通过	2.7553×10^{-4}	5.8567×10^{-3}	2.3045×10^{-3}
M6	10	1.30	通过	1.9121×10^{-4}	3.5992×10^{-3}	1.4036×10^{-3}
M6	20	1.10	通过	1.4934×10^{-4}	2.6872×10^{-3}	1.0445×10^{-3}
M6	20	1.20	通过	5.1011×10^{-5}	8.2947×10^{-4}	3.2045×10^{-4}
M6	20	1.30	通过	1.9211×10^{-5}	2.4621×10^{-4}	9.4933×10^{-5}
M6	30	1.10	通过	5.7207×10^{-5}	9.4103×10^{-4}	3.6368×10^{-4}
M6	30	1.20	通过	1.1738×10^{-5}	1.3133×10^{-4}	5.0617×10^{-5}
M6	30	1.30	通过	2.5717×10^{-6}	1.7786×10^{-5}	6.8527×10^{-6}

注：长度单位为输入坐标单位。

18 组配置均通过最终检查。表 9 列出了相应的形状质量与首层尺度，图 8 展示二者随分层参数的变化，其中空心标记对应经过最终角点位移回退并重新计算的三组 M6 结果。

当层数固定为 20 时，增长比由 1.10 增至 1.30，两组算例的首层弦长中位数均降至原值的约 1/11，最小形状质量也随之降低。这一变化与薄层单元各向异性的增强有关，因为式（14）的形状指标以理想单元为参照，不能直接用于判断流场计算精度。此外，改变层数会同时改变单元总数及质量分布，因此全网格平均质量的变化并不等价于同一组单元质量的变化。。

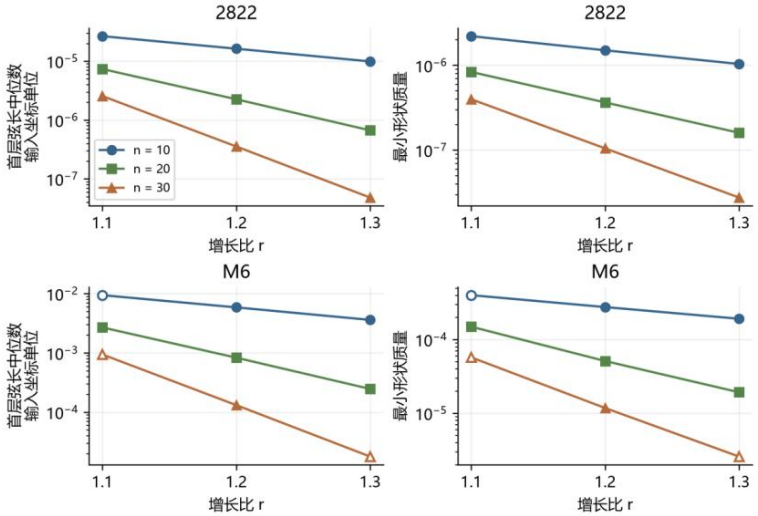


图 8 分层参数对首层弦长和最小形状质量的影响

7.10 基于解析映射的判定检验

为在具有已知 Jacobian 的情形下检验数值判定，在四面体、六面体和三棱柱参考域上构造三次解析映射。其前两个坐标保持不变，第三个坐标取 $\frac{\left(w-\frac{1}{2}\right)^3}{3}+\varepsilon w$，相应 Jacobian 行列式为 $\left(w-\frac{1}{2}\right)^2+\varepsilon$。分别设置 ε =0.02、−0.005、0 和 10^{-12}，对应严格正、内部变号、退化及近退化情形；递归深度、容差与子域访问上限均沿用固定网格参数实验的设置。三类单元共 216 组配置与解析结果逐一对照：在深度 6 和 8 时，严格正与变号情形均被正确识别，退化情形保持未决，近退化情形则随容差要求呈现不同判定结果。特别地，六面体和三棱柱的变号映射在轴向六点 Gauss 采样处仍全部取正值，直接展示了有限采样遗漏内部翻转的可能性。这些解析算例检验了判定过程在已知映射下的表现，其工程适用性仍需结合更广泛的公共基准考察。

8 结论

本文针对含边界层的高阶混合网格，将分层参考子域上的 Bernstein 下界判据与节点位移阻尼相结合，并通过共享节点关联单元的联合检查协调局部修正。理论分析给出了映射相容条件下母子单元定向 Jacobian 下界的传递关系；实际子单元的独立判定则用于检验细分后网格的取向。该方法沿用已有 Bernstein 判定理论，重点处理分层约束与共享节点位移之间的耦合。

在所测五组 P2 工程算例、2822 的 P2—P4 算例及分层参数组合中，修正后的网格均满足设定的最终数值判据。对比实验表明，角点力学平衡的收敛不能替代高阶单元有效性判定；同时，翻转修正可能增大边界几何偏差，并不必然提高平均形状质量。本文结论限于所测模型、参数与实现，精确算术下的理论充分条件与双精度数值判定之间的区别见第 6.2 节。后续研究可进一步考察公共基准上的适用性、舍入误差控制，以及取向保持、几何逼近和形状质量的联合优化。

附录 A 相关命题与定理的证明

命题 1 证明：对于给定次数及相应参考域，Bernstein 基函数非负，且全部基函数之和恒为 1。因此，多项式在任一点的取值为其控制系数的凸组合，不小于最小控制系数。由式（9）即得结论。证毕。

命题 2 证明. 由命题 1，每个叶子子域内的定向 Jacobian 均严格大于τ。由于所有叶子子域共同覆盖整个参考域，因此该下界在完整参考域内成立。证毕。

引理 1 证明：Jacobian 矩阵的三列分别对应几何映射对三个参考坐标方向的一阶偏导。对于六面体，沿任一参考坐标方向求导时，该方向的多项式次数由 p 降为 $p-1$，其余两个方向保持为 p。Jacobian 行列式中的每一项均包含三个偏导项的乘积，因此在任一参考方向上的次数至多为

$$(p-1)+p+p=3p-1$$

对于三棱柱，两个三角形参考坐标方向的偏导分别使底面多项式总次数降低 1，而挤出方向偏导不改变底面次数，因此 Jacobian 行列式在三角形参考底面上的总次数至多为

$$(p-1)+(p-1)+p=3p-2$$

类似地，两个底面方向的偏导不改变挤出方向次数，而挤出方向偏导使该方向次数降低 1，因此挤出方向次数至多为

$$p+p+(p-1)=3p-1$$

对于四面体，三个参考方向的一阶偏导均使三维单纯形多项式的总次数降低 1，因此 Jacobian 行列式的总次数至多为

$$3(p-1)=3p-3$$

Bernstein 多项式在求导、乘积和线性组合运算下仍可转换为 Bernstein 表示，因此上述 Jacobian 行列式均可在相应参考域上精确表示。证毕。

定理 1 证明：由式（6）的映射复合关系和链式法则，实际子单元的 Jacobian 矩阵满足

$$J_{V,k}^{\mathrm{prod}}(\eta)=J_V(A_k(\eta))\,DA_k. \tag{A1}$$

对式（A1）两边取行列式，并利用 $\delta_k:=det(DA_k)>0$，可得

$$\det J_{V,k}^{\mathrm{prod}}(\eta)=\delta_k\det J_V(A_k(\eta)). \tag{A2}$$

由于尺度因子为正，式（A2）保持行列式的符号。结合母单元参考子域上的定向下界，可得

$$s_V\det {J_{V,k}}^{\mathrm{prod}}(\eta)>\delta_k\tau\geq 0 \tag{A3}$$

若要求实际子单元达到给定绝对下界，则根据式（A3）可将母单元相应参考子域的阈值取为

$$s_V\det J_V(\xi)>\frac{\tau_{out}}{\delta_k},\quad \xi\in\Omega_{V,k}. \tag{A4}$$

因此，在映射相容且参考子域映射保向的条件下，母单元参考子域上的定向 Jacobian 下界可传递至实际子单元。证毕。

参考文献

[1] DEY S, O'BARA R M, SHEPHARD M S. Towards curvilinear meshing in 3D: the case of quadratic simplices[J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(3): 199-209.

[2] SHERWIN S J, PEIRÓ J. Mesh generation in curvilinear domains using high-order elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(1): 207-223.

[3] PERSSON P O, PERAIRE J. Curved mesh generation and mesh refinement using Lagrangian solid mechanics[C]//47th AIAA Aerospace Sciences Meeting. Reston: AIAA, 2009: 949.

[4] GEUZAINE C, REMACLE J F. Gmsh: a 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 79(11): 1309-1331.

[5] XIE Z Q, SEVILLA R, HASSAN O, et al. The generation of arbitrary order curved meshes for 3D finite element analysis[J]. Computational Mechanics, 2013, 51(3): 361-374.

[6] POYA R, SEVILLA R, GIL A J. A unified approach for a posteriori high-order curved mesh generation using solid mechanics[J]. Computational Mechanics, 2016, 58(3): 457-490.

[7] FORTUNATO M, PERSSON P O. High-order unstructured curved mesh generation using the Winslow equations[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 307: 1-14.

[8] GARGALLO-PEIRÓ A, ROCA X, PERAIRE J, et al. Optimization of a regularized distortion measure to generate curved high-order unstructured tetrahedral meshes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015, 103(5): 342-363.

[9] TURNER M, PEIRÓ J, MOXEY D. Curvilinear mesh generation using a variational framework[J]. Computer-Aided Design, 2018, 103: 73-91.

[10] GREEN M D, KIRILOV K S, TURNER M, et al. NekMesh: an open-source high-order mesh generation framework[J]. Computer Physics Communications, 2024, 298: 109089.

[11] SHI A, PERSSON P O. Local element operations for curved simplex meshes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2024, 125(2): e7379.

[12] YU K, WANG B, CHEN X, et al. Minimal surface-guided higher-order mesh generation for CAD models[J]. Computer-Aided Design, 2025, 178: 103810.

[13] SCHNEIDER T, PANOZZO D, ZHOU X. Isogeometric high order mesh generation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 386: 114104.

[14] RUIZ-GIRONÉS E, SARRATE J, ROCA X. Measuring and improving the geometric accuracy of piece-wise polynomial boundary meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 443: 110500.

[15] RUIZ-GIRONÉS E, ROCA X. Automatic penalty and degree continuation for parallel pre-conditioned mesh curving on virtual geometry[J]. Computer-Aided Design, 2022, 146: 103208.

[16] ROCHERY L, LOSEILLE A. Fast high-order mesh correction for metric-based cavity remeshing and a posteriori curving of P2 tetrahedral meshes[J]. Computer-Aided Design, 2023, 163: 103575.

[17] JOHNEN A, REMACLE J F, GEUZAINE C. Geometrical validity of curvilinear finite elements[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 233: 359-372.

[18] TOULORGE T, GEUZAINE C, REMACLE J F, et al. Robust untangling of curvilinear meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 254: 8-26.

[19] MOXEY D, GREEN M D, SHERWIN S J, et al. An isoparametric approach to high-order curvilinear boundary-layer meshing[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 283: 636-650.

一种复杂几何自适应笛卡尔网格快速生成方法

汤其楠[1]，刘剑明[1]，张朔[2]，陈航[2]，田琳琳[2]，王镇明[2]，赵宁[2]

（1.江苏师范大学，徐州 221009；2.南京航空航天大学，南京 210016）

摘　要：网格生成是计算流体力学使用传统数值方法离散的首要任务，对于复杂的几何外形怎样快速生成高质量网格一直是研究的重点。贴体网格在复杂几何下要人工构建，要想实现网格的自动化生成，对于复杂几何问题仍然是研究的热点。自适应笛卡尔网格生成自动化，绕开工业 CFD 的 "网格瓶颈"，局部自适应加密，使得分辨率能够精准投放到激波、涡量、剪切层、尾迹等大梯度区域，但自适应笛卡尔网格需要八叉树/块管理，网格管理本身有比较大的复杂度，目前复杂几何外形的快速笛卡尔网格生成获得广泛关注。本文针对目前复杂几何网格生成过程中，计算网格的类型判断、几何与网格的相交及物面距离计算的树加速方法，发展了一种改进的树快速生成方法，相对于 kd 树，在部分算例可以达到 10 倍以上的加速。

关键词：自适应笛卡尔网格，kd 树，网格类型判断，壁面距离，网格生成加速

0 引　言

随着航空航天与工业领域对复杂几何高雷诺数流动模拟需求的日益增长，贴体网格的生成已成为制约计算流体力学（CFD）求解效率的主要瓶颈。面对日益复杂的几何外形与多尺度流动物理，传统手工或半自动贴体网格划分不仅耗时巨大，且难以保证复杂区域网格质量，严重限制了高保真模拟的工程适用性。作为有效替代方案，自适应笛卡尔网格在背景直角网格上叠加局部加密，依据几何特征、误差估计或流动特征动态调整网格分辨率，并借助切割单元或浸入边界方法处理任意复杂几何边界，从而在实现网格自动生成的同时，将计算资源精准投向流动特征显著的区域。

在数据组织层面，自适应笛卡尔网格主要有两类主流数据结构：树型结构与块结构。树型结构通过递归剖分空间单元，将网格层级关系编码为树节点，每个节点对应一个立方体单元，其子节点代表均匀细化的子单元。该结构支持局部加密与邻域查询，但跨级邻域查找实现较为复杂，且总内存开销与网格单元总数呈线性关系，但细粒度递归遍历可能引入较高的间接寻址开销。为提升并行效率与缓存友好性，块结构自适应网格加密将若干相邻的相同层级单元聚合成逻辑规则块，以块为基本操作单位进行加密、通信与负载均衡。块结构有效减少了元数据管理成本，便于应用高性能计算中的区域分解和向量化优化，但块内所有单元必须强制处于同一细化层级，这可能引入少量“填充”或“过渡层”处理开销。

网格生成与动态自适应过程中，必须对每个单元执行几何状态分类，以正确施加边界条件。典型分类将单元分为三类：外部单元（完全位于流体域内，采用标准有限体积或有限差分离散）、内部单元（完全位于固体内部，通常被屏蔽或赋予虚拟物性）以及相交单元（被几何边界穿过的切割单元）。相交单元的处理精度直接决定边界表征质量，浸入边界法则通过修改相交单元处的动量源项或插值模板，以非

贴体方式满足无滑移条件。三类单元的判定需借助符号距离函数或射线投射等几何查询，在动态自适应中需频繁更新，是影响整体效率的关键环节。

为此，高效的网格类型判断与壁面距离计算成为支撑自适应笛卡尔网格动态更新的核心技术之一。壁面距离不仅用于湍流模型和边界层加密判据，还可直接参与相交单元的裁剪与内外判别。传统逐点搜索全局壁面三角面片的方法，复杂度随网格量和面片数线性增长，在非定常动边界问题中难以为继。目前基于表面三角网格的 kd 树是最成功的应用之一。为了进一步加快网格类型判断与壁面距离计算，本文进一步研究了一种树生成方法，以提高效率。

1 问题描述

针对自适应笛卡尔网格几何处理采用高效的 kd 树算法是常规有效的方法，获得广泛关注。但相交判断并非 kd 树设计初衷，影响效率提升。KD 树是按空间位置划分的，一个三角面片可能被切割并存储在多个节点中。这导致在判断一个笛卡尔网格单元是否与物面相交时，可能需要在多个节点间重复搜索和求交，逻辑复杂且效率不高。构建 KD 树需要预处理，如果 STL 网格发生变形，KD 树需要完全重建，动态更新成本高。有时会出现数值鲁棒性问题，比如当查询点恰好位于 KD 树的空间分割面上时，可能会因浮点数舍入误差导致查询结果出错（如漏掉最近的三角形）。

本文发展一种新的树处理方法可以得到鲁棒及高效的内外查找、相交判断，距离计算等，相对于原有 KD 树，部分算例可以提高 10 倍以上的效率，如表 1 所示。

表 1 不同方法几何处理总耗时对比

模型	STL 三角形数	加密总网格数	方法	相交判断及壁面距离计算(秒)	内外判断(秒)	几何处理总时间(秒)
JS39	17,037	236,797	KD 树	12.88	0.01	13.40
		236,783	本文	0.22	0.01	0.79
M6	17,844	3,373,000	KD 树	12.77	0.07	15.06
		3,371,922	本文	2.40	0.08	4.87
X37B	16,227	4,915,779	KD 树	42.53	0.18	45.32
		4,912,097	本文	21.51	0.17	24.38

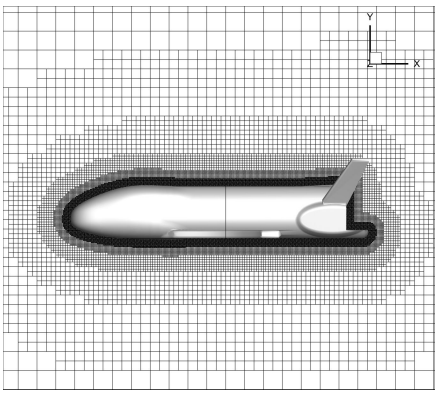


图 1 飞机模型的自适应笛卡尔网格

2 结　论

为了提高网格生成速度，加快单元类型判断及壁面计算效率，本文发展了一种新的树处理方法，部分算例试验显示本文方法具有出色的生成速度。目前，相关算法已经集成到南京航空航天大学大规模并行自适应笛卡尔网格 CABA 软件中。

参 考 文 献:

[1] 杨子璇,齐昕宇,王镇明,田琳琳,刘剑明,赵宁.自适应笛卡儿网格并行生成加速优化方法.中国科学:物理学力学天文学, 2025, 55: 104611.

[2] Hang CHEN, Zhenming WANG, Linlin TIAN, Jianming LIU, Ning QIN, Ning ZHAO. A dynamic partition weight strategy for accelerating parallel adaptive Cartesian grid generation[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2026, 39(7), 103921.

[3] 赵宁, 刘剑明, 田琳琳, 王镇明. 可压缩流动问题笛卡尔网格模拟方法研究进展与展望.力学学报,2025,57(2):285-314.