

构造最优 Delaunay 三角剖分的拓扑优化方法

陈中贵¹⁾, 曹娟^{2)*}, 杨晨晖¹⁾

¹⁾(厦门大学信息科学与技术学院 厦门 361005)

²⁾(厦门大学数学科学学院 厦门 361005)

(juancao@xmu.edu.cn)

摘要: 最优 Delaunay 三角剖分(ODT)是生成区域网格剖分的一种优化方法. 从数值优化的角度来看, 现有的 ODT 优化方法属于局部方法, 对于任意给定初值容易陷入较差的局部极小值点, 从而不能产生高质量网格. 为此提出一种简单的拓扑优化方法, 使得 ODT 方法能有效地从局部极小值点中跳出, 进一步提高网格的质量. 该方法只涉及到局部的边翻转操作, 实现简单; 而且具有显式的目标函数, 能在理论上保证算法的收敛性. 实验结果表明, 文中算法运行速度快, 不论是在拓扑连接关系还是在三角形的形状上都显著地提高了 ODT 方法生成的网格质量.

关键词: 网格生成; 最优 Delaunay 三角剖分; 最优化; 拓扑优化

中图分类号: TP391

Topology Improvement for Constructing Optimal Delaunay Triangulation

Chen Zhonggui¹⁾, Cao Juan^{2)*}, and Yang Chenhui¹⁾

¹⁾(School of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen 361005)

²⁾(School of Mathematic Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

Abstract: Optimal Delaunay triangulation (ODT) is an optimization method for mesh generation. From the point of view of numerical optimization, existing ODT methods are local optimization methods, which can be easily fallen into a local minimum corresponding to a mesh with low quality. In this paper, a topology improvement method is introduced into the ODT optimization procedure, which effectively enables the ODT method to jump out from a poor local minimum and therefore improves the qualities of generated meshes. The proposed topology improvement method consists of only local operations of edge flipping, which is easy to implement. Moreover, our topology improvement method has an explicit objective function, and its convergence is guaranteed theoretically. Experimental results show that our algorithm is fast and can greatly improves the qualities of meshes generated from ODT, with respect to the regularities of the mesh and the aspect ratios of the triangles.

Key words: mesh generation; optimal Delaunay triangulation; optimization; topology improvement

网格生成是指将计算区域(平面区域、三维区域或者空间曲面)分割为有限个单元区域. 大多数的数值模拟计算方法和微分方程的数值解法都需要事先构造一个高质量的网格. 例如在有限元分析中, 网格

质量的好坏直接影响最终解的精度^[1]. 鉴于网格生成在计算机数值模拟方法中的重要性, 已经有大量的文献讨论网格的生成^[2-3].

三角网格在实际应用中被广泛采用, 本文主要

收稿日期: 2011-09-09. 基金项目: 国家自然科学基金(61100105, 61100107); 福建省自然科学基金(2011J05007); 中央高校基本科研业务费专项资金(2011121041); 国防基础科研计划项目(B1420110155). 陈中贵(1982—), 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为计算机图形学、计算几何; 曹娟(1983—), 女, 博士, 讲师, 论文通讯作者, 主要研究方向为 CAGD&CG; 杨晨晖(1967—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为图形图像处理、计算机体系结构、网络安全等.

讨论三角网格的生成. 高质量三角网格的生成通常需要解决 2 个问题: 一是优化网格的顶点位置; 二是构造最优的拓扑连接关系. 已有的一些针对网格生成而设计的目标函数是通过优化顶点的位置以及网格的连接关系来极小化目标函数, 从而生成高质量的网格. 一般来说, 同时优化顶点位置和网格的连接关系是很难的, 所以通常先固定网格的连接关系优化顶点的位置, 再固定顶点的位置优化网格的连接关系, 这样不断迭代优化目标函数. 但是在现有的目标函数中, 有的是关于顶点坐标的高度非线性函数^[4-5], 很难通过优化顶点的位置来极小化; 有的目标函数的定义不具有 Delaunay 最优性^[4,6], 即当固定顶点的位置时 Delaunay 三角剖分并不是极小化目标函数的最优三角剖分, 从而很难构造最优的三角剖分.

在现有的方法中, 最优 Delaunay 三角剖分方法 (Optimal Delaunay triangulation, ODT)^[7] 和质心 Voronoi 图方法 (centroidal Voronoi tessellation, CVT)^[8] 近几年受到了广泛关注. 这 2 种方法的顶点位置更新规则简单, 而且目标函数定义具有 Delaunay (或者其对偶的 Voronoi 图) 最优性, 从而可以利用成熟的计算几何程序包 (如 CGAL^① 等) 快速计算最优的三角剖分.

CVT 方法已经得到了较深入的研究^[8], 并成功地应用于各向同性的网格生成^[9] 和各向异性的网格生成^[10]. ODT 方法最早由 Chen 等^[7] 提出, 该方法将网格生成问题转化为抛物面函数的分片线性逼近问题. Chen 等还在理论上给出了 ODT 问题、球覆盖问题以及多面体逼近问题之间的内在关系^[11], 并讨论了一般二次凸曲面的分片线性逼近问题^[12]. ODT 方法也可用于各向同性的网格生成^[13] 和各向异性的网格生成^[14]. Alliez 等^[15] 发现 ODT 方法在生成空间四面体网格时可比 CVT 方法更加有效地抑制退化的四面体出现, 从而 ODT 方法作为 CVT 方法的替代方法引起了人们的重视.

ODT 方法本质上是解决目标函数优化问题, 现有的 ODT 优化方法基本上都属于局部优化方法, 对任意给定的初值容易陷入函数的较差局部极小值点, 导致网格的质量不高. 如果直接采用全局优化方法进行优化, 如模拟退火算法或遗传算法等^[16], 算法的复杂度较高, 一般需要较长的运算时间. Tournois 等^[17] 利用交替优化网格顶点位置和不断加入新的顶点来防止优化方法陷入太差的局部极小值点. Chen^[12-13] 指出在渐近意义下 ODT 目标函数的全局

最优解对应的平面网格是均匀的正规网格, 即每个三角形都是等边三角形, 每个内部顶点的度数都是 6. 基于这样的理论观察, 本文利用边翻转来改变网格的拓扑连接关系, 试图构造顶点度数都是 6 的正规网格, 从而有效地跳出 ODT 函数的局部极小值点, 再结合 ODT 优化方法的顶点位置更新规则, 使得网格的质量进一步提高.

本文的一项重要内容是构造内部顶点度数都为 6 的正规网格. Maeng 等^[18] 通过合并和分裂顶点来消除不正规顶点. 对于顶点位置和数目给定的点集, 正规的三角剖分一般不存在, 本文将通过寻找不正规的点对, 利用一系列的边翻转来尽量减少不正规顶点的个数. 与本文想法比较相似, Freitag 等^[19] 的算法也是结合拓扑优化和网格光滑方法; 但他们的方法研究空间四面体网格的优化, 拓扑关系复杂, 而且顶点的局部几何位置更新需要求解一个带约束的非线性优化问题, 使得算法不易实现. 与 Freitag 等^[19] 的方法相比, 本文提出的平面拓扑优化方法由于结合了 ODT 网格顶点位置优化方法, 使得顶点位置更新规则简单, 顶点的分布也更加均匀.

1 ODT 方法

ODT 方法由于具有实现简单、结果良好等优点, 受到人们的欢迎. 但是 ODT 作为一个高质量网格的生成方法, 还存在一些问题. 在描述这些问题前, 先详细介绍一下 ODT 能量函数的定义以及它的优化方法.

1.1 ODT 函数定义

ODT 目标函数的定义由 Chen 等^[7] 给出. 对于给定的平面点集 $X = \{x_i \in \mathbb{R}^2, i=1, \dots, n\}$, 设区域 Ω 为点集 X 的凸包, 并记 T 为 X 的一个三角剖分. 在定义域 Ω 上, 定义一个抛物面函数 $f(x) = \|x\|^2, x \in \Omega$. 点集 X 中的每个点都对应了抛物面上的一个点, 记为 $\bar{x}_i = (x_i, \|x_i\|^2)$. 于是由点集 $\bar{X} = \{\bar{x}_i \in \mathbb{R}^3, i=1, \dots, n\}$ 及 T 的连接关系确定了抛物面 $f(x)$ 的一个分片线性逼近函数, 记为 $f_T(x)$, 如图 1 所示. ODT 函数就定义为 $f_T(x)$ 和抛物面 $f(x)$ 在 L_1 范数下的逼近误差

$$F(X, T) = \sum_{\tau \in T} \int_{\tau} |f_T(x) - f(x)| dx \quad (1)$$

其中 τ 为三角剖分 T 中的三角形.

① <http://www.cgal.org>

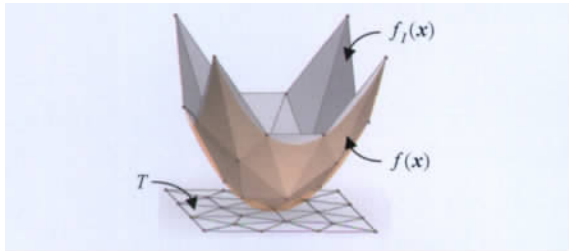


图 1 ODT 函数的定义

在几何上,式(1)中定义的 ODT 函数即为抛物面 $f(x)$ 和分片线性函数 $f_i(x)$ 所夹的那部分空间的体积. ODT 函数的值不仅取决于 X 中点的位置分布,还取决于三角剖分 T 的选择. 对于给定的点集 X , Chen 等^[7] 指出在所有可能的三角剖分中, Delaunay 三角剖分极小化函数 $F(X, T)$ 因为 Delaunay 三角剖分正好是抛物面上点集 $\bar{X}$ 的凸包的下表面在平面上的投影,所以在默认情况下,总是取 ODT 函数中 T 为 X 的 Delaunay 三角剖分. 本文通过优化顶点的位置可以极小化函数 $F(X)$ 的值,提高网格的质量. 给定顶点的数目, ODT 定义为能量函数 $F(X)$ 的全局最优解对应的三角剖分. 在实际中,全局最优解很难达到,所以称 $F(X)$ 的局部最优解为最优 Delaunay 三角剖分.

1.2 ODT 函数优化

式(1)的优化方法最早由 Chen^[13] 提出,并应用于平面网格的生成. 现假设其他点的位置都固定,只考虑优化 x_i 的坐标. 通过计算 ODT 函数关于 x_i 的导数并令其等于 0, Chen^[13] 给出了 x_i 的最优位置

$$\tilde{x}_i = -\frac{1}{2|\Omega_i|} \sum_{\tau_k \in \Omega_i} \left(\frac{\partial |\tau_k|}{\partial x_i} \sum_{\substack{x_j \in \tau_k \\ x_j \neq x_i}} \|x_j\|^2 \right) \quad (2)$$

其中, Ω_i 表示 x_i 的 1-邻域区域, $|\cdot|$ 表示图形的面积. Alliez 等^[15] 深刻挖掘了上述公式的几何意义,给出了更直观的顶点位置更新公式

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\tau_k \in \Omega_i} |\tau_k| c_k \quad (3)$$

其中 c_k 表示 $\triangle \tau_k$ 外接圆的圆心.

式(3)只考虑内部的顶点,即有完整的 1-邻域三角形的顶点. 如果边界顶点也按该公式更新位置,那么一般会向区域 Ω 的内部移动,从而导致顶点的三角剖分的覆盖区域缩小,不能完全剖分用户指定的区域. Tournois 等^[17] 发现了式(3)具有所谓的外接圆性质,即当 x_i 的 1-邻域顶点都落在同一圆上时(如图 2 a 所示),则 $\tilde{x}_i$ 为该圆的圆心. 利用该性质, Tournois 等^[17] 给出了与原有 ODT 顶点位置更新规则统一的边界点位置更新规则;但是 Tournois

等^[17] 给出的公式只适用于四面体网格的生成,下面给出平面情况边界点的位置更新公式.

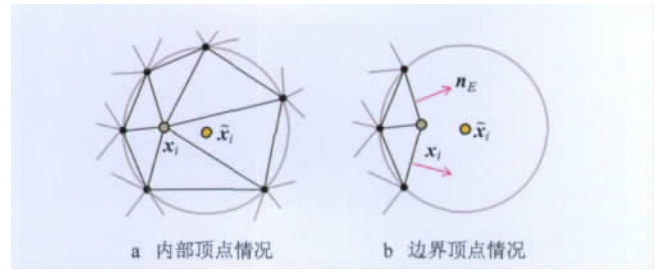


图 2 外接圆性质

为了防止边界点向内萎缩,本文将式(3)更改为

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \left(\sum_{\tau_k \in \Omega_i} |\tau_k| c_k + \sum_{E \in \partial\Omega \cap \Omega_i} \lambda_E n_E \right) \quad (4)$$

其中, n_E 表示垂直于顶点 x_i 相邻的边界边 E 且指向区域 Ω 外部的单位法向(如图 2 b 所示), λ_E 为待定的系数. 利用 Tournois 等^[17] 给出的外接圆性质,可以求得 λ_E . 本文只给出 λ_E 的计算公式

$$\lambda_E = \frac{1}{4} |E|^3,$$

其中 $|E|$ 表示边 E 的长度;其推导过程与 Tournois 等^[17] 中的讨论类似,略.

由于所有顶点位置都需限制在区域 Ω 中,利用式(4)计算得到的新的顶点位置有可能落在区域 Ω 外,这时将它投影到区域 Ω 边界上的最近点. 更新所有顶点的位置后,再构造它们的 Delaunay 三角剖分,之后继续更新顶点位置,如此迭代优化函数式(1).

算法 1. ODT 迭代优化算法

输入. 平面区域 Ω 内的初始点集 X .

输出. 平面区域 Ω 的三角剖分 T .

Step1. 构造 X 的 Delaunay 三角剖分.

Step2. 按式(4)更新每个顶点 x_i 的位置,并将落在区域 Ω 外的顶点投影到区域边界上.

Step3. 如果迭代次数小于指定的值,或者顶点位置的最大偏移小于给定的阈值,转 Step1;否则,算法结束.

图 3 所示为一个随机初始化点集经过 50 步 ODT

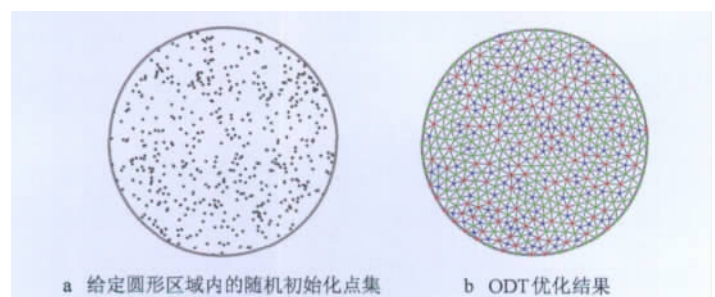


图 3 ODT 优化算法

迭代后的结果. 图 3 b 中, 红色、蓝色和绿色分别表示顶点度数大于 6、小于 6 和等于 6.

2 拓扑优化方法

图 3 中, 由于 ODT 属于局部优化算法, 所以得到的只是局部最优解. Chen^[13,20] 指出 ODT 函数的全局最优解对应的是均匀的正规网格, 即每个三角形都是等边三角形, 每个内部顶点的度数都是 6. 度数不为 6 的内部顶点称为不正规顶点. 显然, 图 3 b 中的网格和全局最优网格还相差甚远, 如果对图 3 b 中的结果继续运行 ODT 迭代算法只会陷入 ODT 函数的局部极小值点, 对网格的质量提高没有明显作用.

图 3 b 中, 我们标出了度数大于 6 和小于 6 的顶点. 虽然运用 ODT 的顶点位置更新规则对图 3 b 中的结果无明显改进, 但是可以看到网格的拓扑连接关系有很大的改进空间. 对给定的顶点集, 本文暂时舍弃 Delaunay 三角剖分, 试图构造顶点度数都是 6 的正规三角剖分. 从 ODT 的优化结果出发, 采用简单的边翻转操作改变网格的连接关系, 使得 ODT 算法能有效地从局部最优解中跳出.

图 4 所示为一种边翻转操作, 记为 BB-RR 边翻转操作, 其中, B 表示度数小于正规度数的点 (蓝色), R 表示度数大于正规度数的点 (红色). 图 4 中, 找到一个四边形, 它的 2 条对角线上的顶点的度数分别为 5 和 7, 经过边翻转后, 四边形的 4 个顶点都变成度数为 6 的正规顶点.

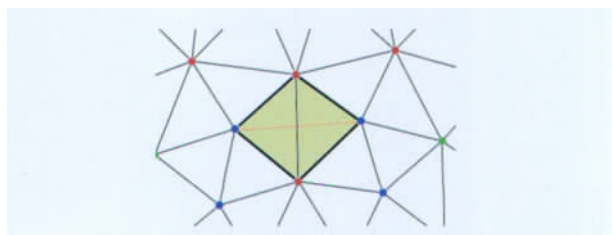


图 4 BB-RR 边翻转操作

为了定义更一般的边翻转操作, 下面给出拓扑优化的目标函数的定义.

2.1 拓扑优化目标函数

记顶点 x_i 的度数为 d_i , 正规度数为 D_i . 显然, 当 x_i 为内部顶点时, $D_i = 6$; 当 x_i 为边界顶点时, 根据 x_i 相邻 2 条边界边的夹角 θ_i 来计算 D_i , 使得 x_i 相邻的每个三角形内角尽量接近 $\frac{\pi}{3}$. 当 D_i 产生变化

时的 θ_i 临界角度应满足

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_i}{D_k} = \frac{\theta_i}{D_k - 1} - \frac{\pi}{3}.$$

当 $D_k = 2, 3, \dots, 7$ 时, 分别求得 $\theta_i = \frac{2D_k(D_k - 1)}{3(2D_k - 1)}\pi$.

所以 D_i 的最终取值如图 5 所示, 图中给出了 θ_i 在不同区间对应的 D_i 的取值.

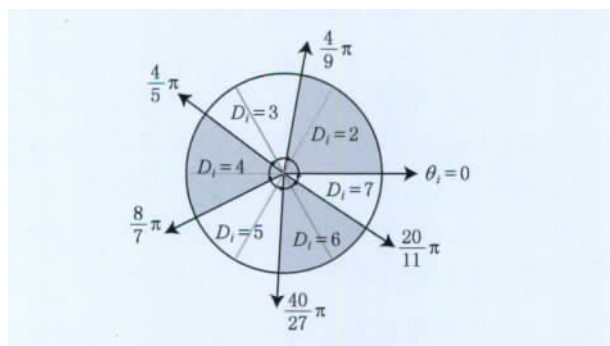


图 5 边界顶点的正规度数

定义了正规度数后, 每个顶点的不正规度可由 $|d_i - D_i|$ 的值来度量, 网格整体的不正规度定义为每个顶点不正规度的累加和, 即

$$E(T) = \sum_{i=1}^n |d_i - D_i| \quad (5)$$

式(5)即为拓扑优化的目标函数, 显然一个正规网格对应上述目标函数的值为 0, 极小化目标函数可以提高网格的正规程度.

2.2 基于边翻转的拓扑优化

对于给定的初始三角剖分, 通过改变它的拓扑连接关系来极小化目标函数 $E(T)$, 从而提高网格的正规度.

图 4 中给出的 BB-RR 边翻转操作将度数分别为 5, 5, 7 和 7 的顶点变为度数都是 6 的顶点, 从而使得目标函数 $E(T)$ 的值减小 4, 所以可看成是一种优化操作. 有效的边翻转操作还有如图 6 中给出的 BG-RR 边翻转和 BB-GR 边翻转, 其中 G 表示正规顶点 (用绿色表示). 经过这 2 种边翻转操作后, $E(T)$ 的值减小了 2.

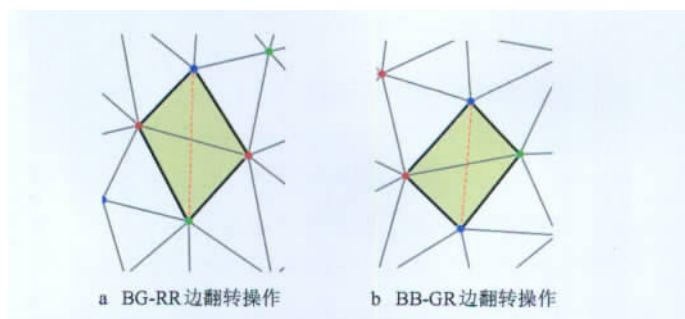


图 6 2 种有效的边翻转操作

至此,本文给出了 3 种有效的边翻转操作,但是这 3 种操作仅局限于一个四边形内. 对于不在一个四边形内的 2 对点,可通过定义一序列边翻转操作来推广上述 3 种边翻转操作. 图 7 所示为推广的 BB-RR 边翻转操作,找到 BB,RR 2 对点,它们落在图中标注的带状区域上,翻转带状区域上的所有边,使得原来的 BB,RR 顶点的度数更接近正规度数,而带状区域上其他顶点的度数没有改变. 同样地,可以推广 BG-RR 边翻转和 BB-GR 边翻转操作.

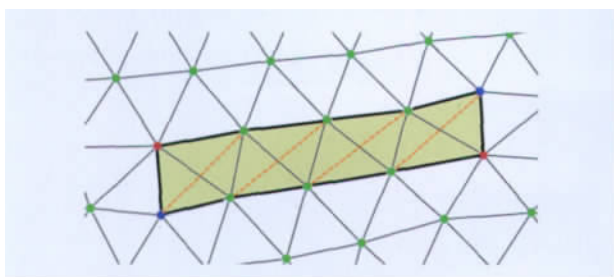


图 7 推广的 BB-RR 边翻转

图 8 所示为综合应用上述边翻转操作的结果,可以看到网格非正规顶点(红色和蓝色顶点)的个数明显减少. 值得注意的是,虽然网格的连接关系得到优化,但是经过边翻转后将产生大量的细长的三角形. 下一节将结合 ODT 的顶点位置优化方法进一步优化网格质量. 另外,为了防止发生三角片的翻转,仅允许在凸四边形内使用边翻转操作,随着顶点位

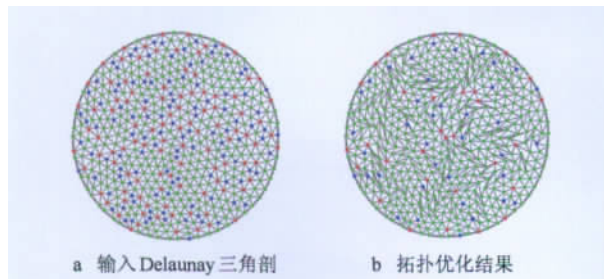


图 8 边翻转操作的综合应用

置的优化,细长三角形将减少,允许进一步边翻转操作.

2.3 结合拓扑优化的 ODT 算法

ODT 算法由于容易陷入较差的局部极小值点,导致生成网格的质量不高. 利用拓扑优化方法可以有效地从 ODT 函数的局部最优解中跳出,获得质量更高的网格. 本文算法步骤如下:

算法 2. 结合拓扑优化的 ODT 迭代算法

输入. 平面区域 Ω 内的初始点集 X .

输出. 平面区域 Ω 的高质量三角剖分 T .

Step1. 运行算法 1,得到 ODT 函数的局部最优解 T .

Step2. 对 T 运行拓扑优化算法:

if T 的拓扑没有改变

结束算法并返回 T

else

得到新的三角剖分,仍记为 T

Step3. do

按式(4)更新 T 中每个顶点的位置,并将落在

区域 Ω 外的顶点投影到区域边界上

while 顶点位置的最大偏移小于给定的阈值

Step4. 转 Step2.

图 9 所示为算法 2 的运行例子,从 ODT 优化算法的一个局部极小值解出发,通过优化网格的拓扑关系进一步改进网格的质量. 图 9 b~9 c 所示为算法 2 中一次迭代过程的结果. 由于边翻转操作只允许在凸四边形内进行,所以更新顶点的位置后,网格的拓扑关系还有可能得到进一步优化,图 9 d 所示为算法 2 的最终结果.

顶点数目固定的点集的三角剖分的个数是有限的,由于拓扑优化操作始终在极小化目标函数式(5),在有限步后三角剖分的拓扑连接关系将不会改变,所以保证了拓扑优化过程的收敛性以及迭代算法 2 的收敛性.

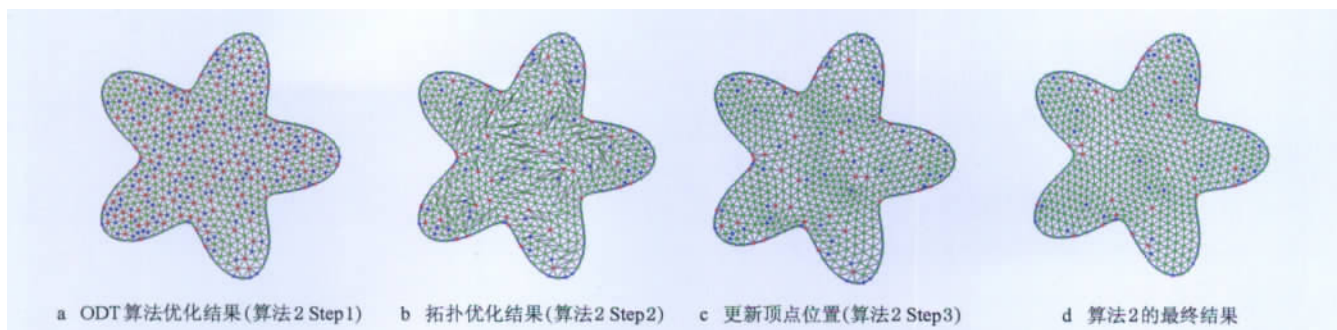


图 9 结合拓扑优化的 ODT 迭代算法

3 实验结果和比较

我们采用 C++ 实现了本文算法, Delaunay 三角剖分的计算采用 CGAL 几何算法库. 本文中所有算法的运行时间都是在 2.0 GHz CPU 和 2 GB 内存的笔记本电脑上获得的.

图 10 所示为本文算法和 ODT 优化算法的比较例子. 图 10 a, 10 b 所示为 ODT 算法和本文算法结果中非正规顶点的分布, 其中非正规顶点的个数分别为 977 和 182, 可以明显看到本文算法在拓扑连接关系上的改进. 为了衡量三角网格质量的好坏, 本文还采用了文献[1]中使用的度量方法, 即三角形

内角分布直方图和内外接圆半径的比值分布直方图. 正三角形在有限元分析中被普遍认为是好的三角形, 它的所有内角都是 60° , 内外接圆半径的比值为 0.5. 为了归一化, 我们在统计内外接圆半径的比值时乘以因子 2. 图 10 c, 10 d 所示为网格三角形形状的改进, 其中网格的顶点个数为 2 000, ODT 算法耗时 0.8 s; 取 ODT 算法的结果作为本文算法的初值, 本文算法运行时间为 0.1 s. 在 ODT 算法中最耗时的是计算 Delaunay 三角剖分, 占整个算法时间的 90% 以上. 由于本文算法只是局部地更新三角剖分的连接关系, 不需要整体计算 Delaunay 三角剖分, 所以算法速度较快.

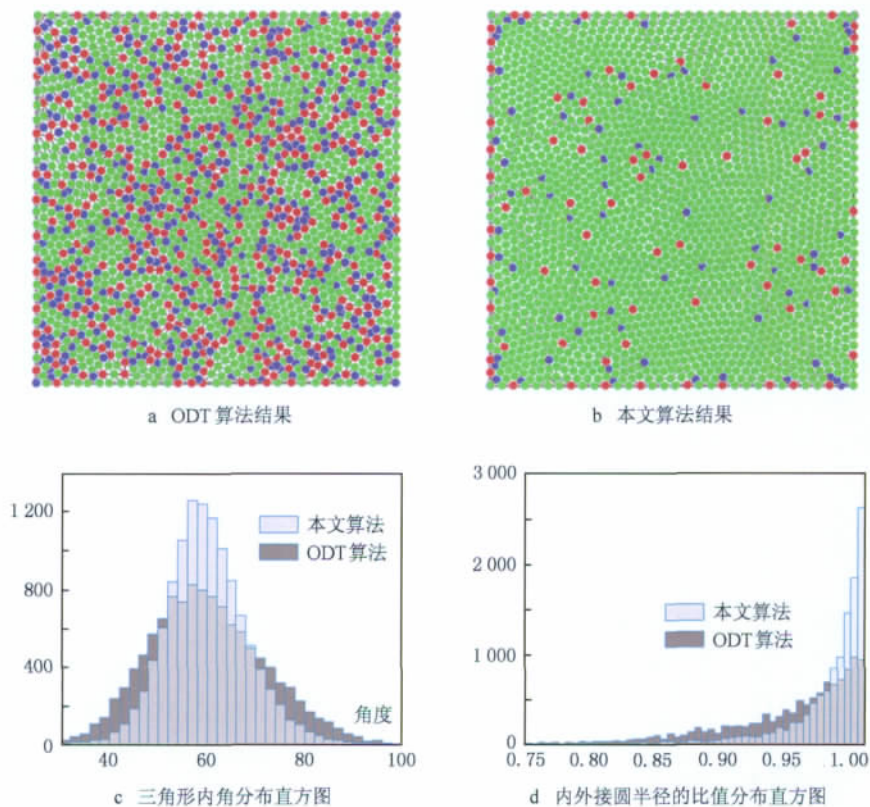


图 10 2 种算法的比较

本文方法目的在于构造一个正规网格, 该方法也可以和其他优化网格顶点位置的方法相结合. 图 11 所示为本文算法结合拉普拉斯网格光顺方法^[21]和 ODT 顶点位置更新方法的优化结果. 图 11 中的 2 个网格具有完全一样的拓扑连接关系, 但是由于拉普拉斯方法只在局部上保证点的均匀分布, 对三角形的大小并不敏感, 从而导致在整体上的分布不均匀, 三角形的大小变化幅度较大, 如图中圆圈标注区域所示. ODT 优化算法能促使三角形的大

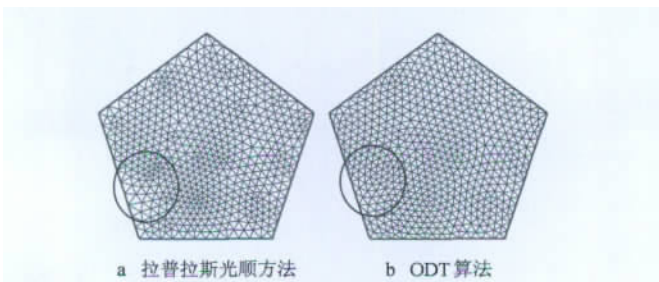


图 11 拓扑优化方法结合不同的网格顶点位置更新规则的比较

小均匀,所以结合拓扑优化方法可以使得最后网格的顶点分布以及三角形大小都均匀。

在有限元分析中非均匀网格也很重要。网格的疏密程度一般由一个定义在区域 Ω 上的密度函数 $\rho(x)$ 决定,密度大的区域网格的三角形会小一些。密度函数可以是用户指定的解析函数,也可以根据区域的几何特征和力学特性来设计^[22]。对于非均匀密

度的网格生成,算法 2 的过程不需要修改,只是在运用顶点位置更新式(4)时,相应的三角形面积和边长分别乘以权值 $\rho(x)$ 和 $\sqrt{\rho(x)}$ 。图 12 所示为在单位圆内算法 2 生成非均匀密度网格的结果,其中采用的密度函数为 $\rho(x)=x^2+0.01$ 。同样地,与 ODT 算法比较发现,本文算法在很大程度上改进了网格的质量。

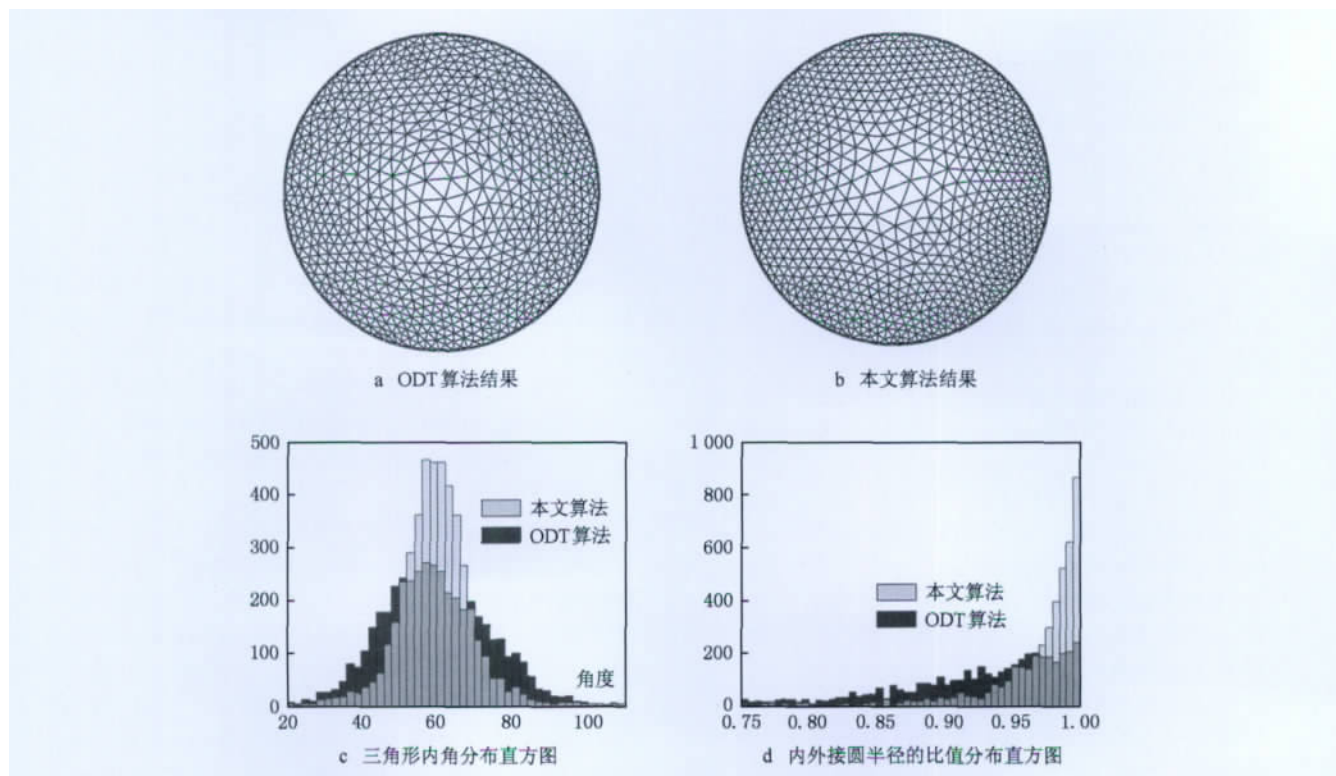


图 12 非均匀密度的网格生成

4 总 结

本文针对现有 ODT 迭代算法容易陷入局部最优解的缺点,设计了拓扑优化算法,使其能有效地从局部最优解中跳出来。本文算法实现简单,只需要局部的边翻转操作,而且能够保证算法的收敛性,运行速度快。实验结果表明,结合了拓扑优化的 ODT 迭代算法使网格的质量得到明显的改进。

本文算法虽然能提高解的质量,但是并不能保证收敛到全局最优解。一方面,因为消除非正规点对的边翻转操作要求非正规点对落在一条带状区域上,这在一定程度上限制了拓扑优化,使得最后的结果中仍然有少数非正规顶点;另一方面,ODT 的全局最优解的结构目前还不清晰,它依赖于顶点个数、区域边界形状和密度函数等因素。对 ODT 的全局最优解在理论上的深入研究将有助于设计高效的全

局优化算法。

本文方法只适用于平面各向同性的网格生成,未来的研究方向为推广到各向异性的网格生成和空间高质量四面体网格的生成。在四面体网格生成问题中,ODT 算法具有抑制退化四面体生成的优点,但是同样难以回避局部优化方法的固有缺点。本文方法有望进一步提高四面体网格的质量,但是由于正四面体并不能铺满整个空间,四面体网格的拓扑优化也将更为困难。

参考文献 (References):

- [1] Shewchuk J R. What is a good linear element? — interpolation, conditioning, and quality measures [C] // Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable. Ithaca: Springer, 2002: 115-126
- [2] Frey P, George P L. Mesh generation [M]. 2nd ed. New York: Wiley, 2008

- [3] Guan Zhenqun, Song Chao, Gu Yuanxian, *et al.* Recent advances of research on finite element mesh generation method [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2003, 15(1): 1-14 (in Chinese)
(关振群, 宋超, 顾元宪, 等. 有限元网格生成方法研究的新进展[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2003, 15(1): 1-14)
- [4] Freitag L A, Knupp P M. Tetrahedral element shape optimization via the Jacobian determinant and condition number [C] // *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable*. Ithaca: Springer, 1999: 247-258
- [5] Bank R E, Smith P K. Mesh smoothing using a Posteriori error estimates [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1997, 34(3): 979-997
- [6] Alboul L, Kloosterman G, Traas C, *et al.* Best data-dependent triangulations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 119(1/2): 1-12
- [7] Chen L, Xu J C. Optimal Delaunay triangulations [J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2004, 22(2): 299-308
- [8] Du Q, Faber V, Gunzburger M. Centroidal Voronoi tessellations: applications and algorithms [J]. *SIAM Review*, 1999, 41(4): 637-676
- [9] Du Q, Gunzburger M. Grid generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 133(2/3): 591-607
- [10] Du Q, Wang D S. Anisotropic centroidal Voronoi tessellations and their applications [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 26(3): 737-761
- [11] Chen L. New analysis of the sphere covering problems and optimal polytope approximation of convex bodies [J]. *Journal of Approximation Theory*, 2005, 133(1): 134-145
- [12] Chen L. On minimizing the linear interpolation error of convex quadratic functions and the optimal simplex [J]. *East Journal on Approximations*, 2008, 14(3): 271-284
- [13] Chen L. Mesh smoothing schemes based on optimal Delaunay triangulations [C] // *Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable*. Berlin: Springer, 2004: 109-120
- [14] Chen L, Sun P T, Xu J C. Optimal anisotropic simplicial meshes for minimizing interpolation errors in L_p -norm [J]. *Mathematics of Computation*, 2007, 76(257): 179-204
- [15] Alliez P, Cohen-Steiner D, Yvinec M, *et al.* Variational tetrahedral meshing [C] // *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH*. New York: ACM Press, 2005: 617-625
- [16] Weise T. Global optimization algorithms—theory and application [OL]. [2011-09-09]. <http://it-weise.de>
- [17] Tournois J, Wormser C, Alliez P, *et al.* Interleaving Delaunay refinement and optimization for practical isotropic tetrahedron mesh generation [C] // *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH*. New York: ACM Press, 2009: 1-9
- [18] Maeng J S, Han S Y, Choi H. A new topological clean up procedure for triangular meshes [J]. *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, 2004, 47(1): 101-107
- [19] Freitag L A, Ollivier-Gooch C. Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(21): 3979-4002
- [20] Chen L. On minimizing the linear interpolation error of convex quadratic functions [J]. *East Journal of Approximation*, 2008, 14(3): 271-284
- [21] Field D A. Laplacian smoothing and Delaunay triangulations [J]. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1988, 4(6): 709-712
- [22] Wang Weixin, Deng Dahua. An adaptive mesh generation algorithm based on geometric features and mechanical properties [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2001, 13(1): 52-55 (in Chinese)
(王威信, 邓达华. 基于几何特征和力学特性的自适应网格生成算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2001, 13(1): 52-55)